Université des Sciences et Technologies de Lille 1
2012/2013 – Licence Mécanique – Semestre 4
Introduction à l'analyse réelle

Examen final
25 Juin 2013 à 16h30. **Durée : 2h.**
Documents, calculatrices, téléphones et appareils électroniques **interdits**.

Une attention particulière sera portée à la **clarté** et à la **précision** des réponses.
Barème indicatif : 4+3+3+5+5.

Questions de Cours.

On justifiera ses réponses.

(1) Donner un exemple de fonctions convergeant simplement mais pas uniformément sur $[0,1]$.

(2) Déterminer les coefficients de Fourier a_n, b_n et c_n des fonctions 2π périodiques suivantes :

$$f(x) = (\cos(x))^3 \text{ et } g(x) = (\sin(x))^3.$$

Exercice 1

Les séries de terme général u_n suivantes sont-elles absolument convergentes, convergentes ou divergentes ?

(1) $u_n = \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{\sqrt{n}}$, avec $n \geq 1$;

(2) $u_n = \ln\left(\cos\dfrac{a}{2^n}\right)$, avec $n \geq 0$ et $0 < a < \frac{\pi}{2}$;

Exercice 2

Étudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions suivantes :

(1) $f_n(x) = \frac{n^2x+1}{x+n^2}$ sur $[0,+\infty[$;

(2) $f_n(x) = \sqrt{n}(1-x)^n \sin(\pi x)$ sur $[0,1]$.

Exercice 3

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \geq 0$, on pose

$$f_n(x) = \frac{\arctan(nx)}{n^2}.$$

(1) Démontrer que la série $\sum_{n\geq 0} f_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$. On notera $f(x)$ la somme.

(2) Déterminer la limite de $f(x)$ quand $x \to +\infty$ et quand $x \to -\infty$.

(3) Montrer que $f(x)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$.

(4) Montrer que $f'(x)$ est décroissante sur $]0, +\infty[$ et que

$$\lim_{x\to 0, x>0} f'(x) = +\infty.$$

Exercice 4

On considère la fonction 2π-périodique suivante :

$$f(x) = \frac{\sin x + |\sin x|}{2}.$$

(1) Tracer le graphe de f.

(2) Calculer $a_n(f)$ et $b_n(f)$ pour tout $n \geq 0$.

(3) Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2}.$$