Université des Sciences et Technologies de Lille 1
2012/2013 – Licence Profil Mécanique – Semestre 4
Introduction à l'analyse réelle – M 203'

Exercices sur les séries de Fourier

Dans la suite, les fonctions sont définies sur $\mathbb{R}$ et sont à valeurs réelles ou complexes.

Exercice 1

Soient k et n deux entiers dans $\mathbb{Z}$. Calculer les intégrales suivantes

$$\int_0^{2\pi} e^{i(n+k)x}dx,\ \int_0^{2\pi} \cos(nx)\cos(kx)dx,\ \int_0^{2\pi} \sin(nx)\sin(kx)dx,\ \int_0^{2\pi} \cos(nx)\sin(kx)dx.$$

Exercice 2

Étudier la convergence (simple, uniforme, normale) sur $\mathbb{R}$ des séries trigonométriques dont les coefficients sont les suivants :

(1) $a_0 = 1$, $a_n = 1$, $b_n = 1$;

(2) $c_0 = 1$, $c_n = \frac{1}{n^2}$;

(3) $n \geq 0$, $c_n = r^n$ (avec $r \in \mathbb{R}$) et $n \leq -1$, $c_n = 0$ avec $r \in \mathbb{R}$.

Déduire de la dernière question que pour tout $n \geq 0$ et pour tout $-1 < r < 1$,

$$r^n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{-inx}}{1 - re^{ix}}dx.$$

Exercice 3

Calculer $a_k(f)$, $b_k(f)$ et $c_k(f)$ et tracer les graphes des fonctions 2π-périodiques suivantes :

(1) $f(x) = -1$ sur $[-\pi, 0[$, $f(x) = 1$ sur $[0, \pi[$;

(2) $f(x) = x$ sur $[-\pi, \pi[$;

(3) $f(x) = |x|$ sur $[-\pi, \pi[$.

Exercice 4

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) une fonction continue par morceaux 2π-périodique. Montrer les résultats suivants :

(1) Si f est à valeurs réelles, alors $a_k(f)$ et $b_k(f)$ sont à valeurs réelles ;

(2) $\forall k \in \mathbb{Z},\ \overline{c_k(f)} = c_k(\overline{f})$;

(3) Les suites $(c_n(f))_n$, $(a_n(f))_n$ et $(b_n(f))_n$ sont bornées ;

(4) Si $f(x) = f(-x)$ pour tout x dans $\mathbb{R}$, alors $b_n(f) = 0$ pour tout n dans $\mathbb{N}$;

(5) Si $f(x) = -f(-x)$ pour tout x dans $\mathbb{R}$, alors $a_n(f) = 0$ pour tout n dans $\mathbb{N}$;

(6) Si f est continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $[0, 2\pi[$, alors $c_n(f) = \frac{1}{in} c_n(f')$;

(7) Si f est de classe $\mathcal{C}^k$ et $\mathcal{C}^{k+1}$ par morceaux sur $[0, 2\pi[$, alors $c_n(f) = \frac{1}{(in)^{k+1}} c_n(f^{(k+1)})$.

Exercice 5*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) une fonction continue par morceaux 2π-périodique. Pour $N \geq 1$, on pose

$$S_N(f)(x) := c_0(f) + \sum_{n=1}^{N} (c_n(f)e^{inx} + c_{-n}(f)e^{-inx}).$$

(1) Montrer que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |S_N(f)(x)|^2 dx = |c_0(f)|^2 + \sum_{n=1}^{N} (|c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|^2).$$

(2) Montrer que

$$\int_0^{2\pi} (f(x) - S_N(f)(x)) \overline{S_N(f)}(x) dx = 0.$$

(3) Conclure que

$$|c_0(f)|^2 + \sum_{n=1}^{N} (|c_n(f)|^2 + |c_{-n}(f)|^2) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx.$$

Exercice 6

Soit a appartenant à $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$. On considère la fonction 2π périodique définie sur $[-\pi, \pi[$ par

$$f(x) := \cos(ax).$$

(1) Montrer que $a_0(f) = \frac{2\sin(\pi a)}{\pi a}$.

(2) Montrer que, pour $n \geq 1$, $a_n(f) = \frac{(-1)^n 2a \sin(a\pi)}{\pi(a^2 - n^2)}$.

(3) Conclure que, pour tout x dans $\mathbb{R} - \pi\mathbb{Z}$,

$$\operatorname{cotg}(x) = \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2x}{x^2 - n^2\pi^2}.$$

EXERCICE 7

On considère la fonction continue 4π périodique et paire définie sur $[0, 2\pi]$ par

$$f(x) := \pi - x.$$

(1) Tracer le graphe de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
(2) Montrer que $b_k^{4\pi}(f) = 0$ pour tout $k \geq 0$.
(3) Calculer $a_k^{4\pi}(f)$ pour $k \geq 0$.
(4) Conclure que, pour tout x dans $[0, 2\pi]$, on a :

$$\pi - x = \frac{4}{\pi} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\cos\left(n + \frac{1}{2}\right) x}{(2n+1)^2}.$$

(5) A-t-on convergence uniforme sur $\mathbb{R}$?

EXERCICE 8

En suivant la stratégie des exercices précédents, montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ |\sin x| = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\cos(2px)}{4p^2 - 1}.$$

A-t-on convergence uniforme sur $\mathbb{R}$?

EXERCICE 9**

Soit f une fonction 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux sur $\mathbb{R}$.

(1) Soit $n \geq 1$ et soit $t \in \mathbb{R} - 2\pi\mathbb{Z}$. Montrer que

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt} = \frac{\sin\left((2n+1)\frac{t}{2}\right)}{\sin\left(\frac{t}{2}\right)}.$$

(2) Soit $n \geq 1$. Montrer que

$$S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f) e^{ikx} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (f(x+2u) + f(x-2u)) \frac{\sin((2n+1)u)}{\sin u} du.$$

(3) Montrer que $1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)u)}{\sin u} du$.
(4) Démontrer le premier théorème de Dirichlet.

Exercice 10

Soit f une fonction 2π-périodique de classe $\mathcal{C}^0$ et soit γ appartenant à $\mathbb{R}$. On pose

$$u_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(2\pi k\gamma).$$

(1) Déterminer la limite de $(u_n)_n$ si γ appartient à $\mathbb{Q}$.

(2) On suppose maintenant que γ n'appartient pas à $\mathbb{Q}$. Si $f(t) = e^{ipt}$ avec $p \in \mathbb{Z}$, montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)dt.$$

(3) Montrer que cette propriété reste vraie si f est un polynôme trigonométrique.

(4) Conclure dans le cas où f est seulement continue et 2π périodique.

Exercice 11

Soit $\alpha > 0$. Soit f une fonction 2π-périodique telle que pour tout x dans $[0, 2\pi[$, on a

$$f(x) = e^{\alpha x}.$$

(1) Soit n appartenant à $\mathbb{Z}$. Montrer que $c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\frac{e^{2\pi\alpha}-1}{\alpha-ir}$.

(2) Appliquer l'égalité de Parseval à f pour déduire que

$$\frac{e^{2\pi\alpha}+1}{e^{2\pi\alpha}-1} = \frac{1}{\pi\alpha} + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2\alpha}{\alpha^2+n^2}.$$

(3) Montrer que $\lim_{\alpha\to 0}\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\alpha^2+n^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$.

(4) Conclure que

$$\frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Exercice 12

Soit f une fonction 2π-périodique de classe $\mathcal{C}^1$ telle que $\int_0^{2\pi} f(t)dt = 0$.

(1) Montrer que $\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \leq \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2 dt$.

(2) Montrer que l'on a égalité si et seulement si $f(t) = ae^{it} + be^{it}$.

Exercice 13***

Soit f une fonction 2π-périodique et de classe $\mathcal{C}^0$ par morceaux sur $\mathbb{R}$. On pose, pour $n \geq 0$ et pour x dans $\mathbb{R}$,

$$S_n(f)(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k(f)e^{ikx}.$$

On définit aussi la moyenne de Césaro de la série de Fourier :

$$\delta_n(f)(x)\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} S_k(f)(x).$$

(1) En utilisant la formule pour $S_k(f)(x)$ de l'exercice 10, montrer que

$$\delta_n(f)(x) = \frac{1}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (f(x+2u) + f(x-2u))\frac{\sin^2(nu)}{\sin^2 u}du.$$

(2) En déduire que $1 = \frac{2}{n\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2(nu)}{\sin^2 u}du$.

(3) Montrer que pour tout x dans $\mathbb{R}$, $\delta_n(f)(x)$ converge vers $\frac{1}{2}(f(x^+) + f(x^-))$.

(4) Montrer que si f est continue, la convergence est uniforme sur $\mathbb{R}$.