

Université des Sciences et Technologies de Lille 1
2010/2011 – Licence Mécanique – Semestre 4
Compléments d'analyse réelle – Math 203'

Interrogation 1

4 Mai 2011 à 11h15. **Durée : 1h.**

Documents, calculatrices, téléphones et appareils électroniques **interdits.**

Une attention particulière sera portée à la **clarté** et à la **précision** des réponses.
Barème indicatif : 2+5+4.

QUESTION DE COURS.

Démontrer le résultat suivant :

Si f est continue et 2π périodique sur \mathbb{R} , alors on a

$$(\forall n \in \mathbb{Z}, c_n(f) = 0) \Rightarrow f = 0.$$

EXERCICE 1

(1) Montrer que la série de terme général

$$\forall n \geq 1, f_n(x) = e^{-n^2 x}$$

est bien définie sur $]0, +\infty[$.

(2) Montrer que la somme $f(x) = \sum_{n \geq 1} f_n(x)$ est de classe \mathcal{C}^1 sur $]0, +\infty[$.

(3) Montrer que la somme $\sum_{n \geq 1} f_n(x)$ est de classe \mathcal{C}^k sur $]0, +\infty[$ pour tout $k \geq 1$.

EXERCICE 2

On considère la fonction 2π périodique et impaire définie sur $]0, \pi[$ par

$$f(x) = \frac{\pi - x}{2}.$$

(1) Calculer les coefficients $a_n(f)$ et les coefficients $b_n(f)$ de la série de Fourier de f .

(2) En déduire que, pour tout x dans $]0, 2\pi[$,

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n}.$$

(3) A-t-on convergence uniforme sur $]0, 2\pi[$? *On justifiera sa réponse.*