

Université des Sciences et Technologies de Lille 1
2010/2011 – Licence Parcours Mécanique – Semestre 4
Compléments d'analyse réelle – Math 203'

Examen de Rattrapage

20 Juin 2011 à 14h. **Durée : 2h.**

Documents, calculatrices, téléphones et appareils électroniques **interdits.**

Le devoir comporte des questions de cours et 4 exercices indépendants (sur **2 pages**).
Une attention particulière sera portée à la **clarté** et à la **précision** des réponses.
Barème indicatif : 4+4+4+4+4.

QUESTIONS DE COURS.

- (1) Donner un exemple de suite ayant au moins trois valeurs d'adhérence.
- (2) Montrer que si une fonction continue et 2π -périodique vérifie $c_n(f) = c_{-n}(f) = 0$ pour tout $n \geq 0$, alors $f = 0$.

EXERCICE 1

Étudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions suivantes :

- (1) $f_n(x) = \frac{(\cos x)^2}{n+|x|}$ sur \mathbb{R} ;
- (2) $f_n(x) = x(1-x)^n$ sur $[0, 1]$;
- (3) $f_n(x) = \sin\left(\frac{x}{x^2+n}\right)$ sur \mathbb{R} .

EXERCICE 2

Déterminer les rayons de convergence des séries entières suivantes :

- (1) $\sum_{n \geq 0} \left(\frac{n+1}{2n+1}\right)^{n \ln n} z^n$;
- (2) $\sum_{n \geq 0} 3^n z^{3n}$.

EXERCICE 3

Pour $n > 0$, on pose

$$f_n(x) = \frac{1}{n^3 + (\cos x)^2} \text{ sur } \mathbb{R}.$$

- (1) Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} f_n$ définit une fonction continue sur \mathbb{R} .
- (2) Montrer que $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est de classe \mathcal{C}^1 .

EXERCICE 4

Soit f une fonction 2π périodique et telle que pour tout x dans $[-\pi, \pi[$,

$$f(x) = |x|.$$

On pourra tracer le graphe de f .

- (1) Calculer $a_n(f)$ pour $n \geq 0$ et $b_n(f)$ pour $n \geq 1$.
- (2) Montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$