

Université des Sciences et Technologies de Lille 1
2010/2011 – Licence Parcours Mécanique – Semestre 4
Compléments d'analyse réelle – Math 203'

Examen

31 Mai 2010 à 16h30. **Durée : 2h.**

Documents, calculatrices, téléphones et appareils électroniques **interdits.**

Le devoir comporte des questions de cours et 4 exercices indépendants (sur **2 pages**).
Une attention particulière sera portée à la **clarté** et à la **précision** des réponses.
Barème indicatif : 4+5+4+4+5.

QUESTIONS DE COURS.

- (1) Donner un exemple de suite de fonctions $(f_n)_{n \geq 0}$ convergeant simplement mais pas uniformément.
- (2) Démontrer le résultat suivant : “Si f est de classe \mathcal{C}^1 et 2π périodique sur \mathbb{R} , alors $(c_n(f))_{n \geq 0}$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.”

EXERCICE 1

Étudier la convergence simple et uniforme des suites de fonctions suivantes :

- (1) $f_n(x) = \frac{(\arctan x)^2}{n^2+x^2}$ sur \mathbb{R} ;
- (2) $f_n(x) = \exp(x^n)$ sur $[0, 1]$;
- (3) $f_n(x) = \frac{(nx+1)^2}{n^2+x}$ sur $[0, 1]$.

EXERCICE 2

Déterminer les rayons de convergence de séries entières suivantes :

- (1) $\sum_{n \geq 0} \frac{n^2}{n!} z^n$;
- (2) $\sum_{n \geq 0} e^{-\sqrt{n^2+1}} z^n$;
- (3) $\sum_{n \geq 0} 2^{(-1)^n n} z^n$.

EXERCICE 3

Pour $n > 0$, on pose

$$f_n(x) = \frac{1}{n^2 + x^2} \text{ sur } \mathbb{R}.$$

- (1) Montrer que la série $\sum_{n \geq 1} f_n$ converge uniformément sur \mathbb{R} .
- (2) Montrer que $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est de classe \mathcal{C}^1 .

EXERCICE 4

Soit f une fonction 2π périodique et telle que pour tout x dans $[0, 2\pi[$,

$$f(x) = |\pi - x|.$$

On pourra tracer le graphe de f .

- (1) Calculer $a_n(f)$ pour $n \geq 0$ et $b_n(f)$ pour $n \geq 1$.
- (2) Montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

- (3) Conclure que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$