Université des Sciences et Technologies de Lille 1
2010/2011 – Licence Profil Mécanique – Semestre 4
Compléments d'analyse réelle – M 203'

Exercices sur les séries entières

Exercice 1

Calculer les rayons de convergence des séries entières suivantes :

(1) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{7n+1} z^n$;

(2) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{n^2+3}{2n+1} z^n$;

(3) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} n^{\ln n} z^n$;

(4) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n z^n$;

(5) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) z^n$;

(6) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} n^{(-1)^n} z^n$;

(7) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{4n+1} z^{4n}$;

(8) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^n$;

(9) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} E(e^n) z^n$ (où $E(x)$ est l'unique entier tel que $E(x) \leq x < E(x)+1$) ;

(10) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} 3^{(-1)^n n} z^n$;

(11) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} (2-2^{\frac{1}{2}})(2-2^{\frac{1}{3}})\dots(2-2^{\frac{1}{n}}) z^n$;

(12) $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \left(\int_0^1 t^n e^{-t} dt\right) z^n$.

Exercice 2

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence R telle que $a_n > 0$ pour tout n.

(1) Pour $\alpha > 0$, déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n^\alpha z^n$.

(2) Pour $\alpha < 0$, montrer que le rayon de convergence R' de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n^\alpha z^n$ vérifie $R' \leq R^\alpha$.

(3) On pose $a_{2n} = 2^{2n}$ et $a_{2n+1} = 2^{-2n}$. Montrer que l'on n'a pas égalité en général.

Exercice 3

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R = +\infty$.

(1) Montrer que si $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n$ est bornée sur $\mathbb{C}$, alors, $a_n = 0$ pour tout $n \geq 1$.

(2) Montrer que s'il existe un polynôme P tel que $|S(z)| \leq P(|z|)$ pour tout z dans $\mathbb{C}$, alors $a_n = 0$ pour n assez grand.

Exercice 4

Calculer les sommes suivantes :

(1) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 z^n$;

(2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} p_n z^n$, où p_n est le nombre de triplets d'entiers (p, q, r) vérifiant $p + 2q + 3r = n$.

On pourra partir de la formule de $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$.

Exercice 5*

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \geq 1$ et de somme S.

(1) Pour $0 < r < 1$, écrire l'égalité de Parseval pour $f(t) = S(re^{\imath t})$.

(2) En déduire que si S est bornée sur $D(0, 1)$, alors $a_n \to 0$.

Exercice 6

(1) Soit $z \in \mathbb{C}$ et soit $n \in \mathbb{N}$. Écrire la formule de Taylor reste intégral d'ordre n entre 0 et 1 de $f_z(t) = e^{tz}$.

(2) Soit $R > 0$. En déduire que $P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{z^k}{k!}$ converge uniformément vers e^z sur $D(0, R)$.

(3) Soit $R > 0$. Montrer que, pour n assez grand, P_n ne s'annule pas sur $D(0, R)$.

Exercice 7

(1) Soit $z \in \mathbb{C}$ et soit $n \in \mathbb{N}$. Écrire la formule de Taylor reste intégral d'ordre n entre 0 et 1 de $f_z(t) = \sin(tz)$.

(2) Soit $R > 0$. En déduire que $P_n(z) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k z^{2k+1}}{(2k+1)!}$ converge uniformément vers $\sin(z)$ sur $D(0, R)$.

(3) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, la fonction $g : x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^k$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8*

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R > 0$ et telle que $a_0 \neq 0$.

(1) Montrer qu'il existe une unique suite d'entiers $(b_n)_{n\geq 0}$ telle que

$$a_0 b_0 = 1 \text{ et } \forall n \geq 1,\ \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = 0.$$

(2) Soit $0 < r < R$. Montrer qu'il existe $M > 0$ telle que $|b_n| \leq \frac{M(M+1)^{n-1}}{r^n}$ pour tout $n \geq 1$.

(3) En déduire que le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$ est strictement positif.

(4) Conclure que pour $|z|$ assez petit

$$\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right) = 1.$$