Exercices sur les séries de fonctions

Exercice 1

Étudier la convergence (simple, normale, uniforme) des séries de fonctions dont le terme général est le suivant :

(1) $f_n(x) = e^{-nx^2}$, $x \in [1, +\infty[$;

(2) $f_n(x) = e^{-nx^2}$, $x \in \mathbb{R}$;

(3) $f_n(x) = e^{inx}$, $x \in \mathbb{R}$;

(4) $f_n(x) = \frac{\cos(nx)}{n^2}$, $x \in \mathbb{R}$;

(5) $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$, $x \in \mathbb{R}$;

(6) $f_n(x) = xe^{-nx^2}$, $x \in \mathbb{R}$;

(7) $f_n(x) = (-1)^n e^{-nx^2}$, $x \in \mathbb{R}$;

(8) $f_n(x) = \frac{x}{nx+1}$, $x \in [0, 1]$.

Exercice 2

On pose $f_n(x) = x^{2^n}$.

(1) Montrer que $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur $]-1, 1[$.

(2) Montrer que $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge uniformément sur $[-a, a]$ pour $0 < a < 1$.

(3) A-t-on convergence uniforme sur $[0, 1]$? $[0, 1[$?

Exercice 3

On pose $f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{n^2}$ sur $[0, +\infty[$.

(1) Montrer que $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$ est définie et continue sur $[0, +\infty[$.

(2) Calculer $\lim_{x \to 0} f(x)$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x)$.

(3) Montrer que f est deux fois dérivable sur $]0, +\infty[$.

(4) Calculer explicitement f'.

(5) Conclure

$$\lim_{\epsilon \to 0, A \to +\infty} \int_{\epsilon}^{A} \ln\left(\frac{e^x}{e^x - 1}\right) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Exercice 4*

Soit $0 < a < \pi$. On considère la suite de fonctions

$$f_n(x) := \frac{e^{inx}}{n} \text{ sur } I = [a, 2\pi - a].$$

On pose $T_n(x) := \sum_{k=0}^{n} e^{ikx}$.

(1) Montrer que $\sum_{n\geq 1} f_n$ ne converge pas normalement sur I.

(2) Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{T_k(x)}{k(k+1)} - 1 + \frac{T_n(x)}{n}.$$

(3) Montrer que $(T_n)_n$ est uniformément bornée sur I (en x et en n).

(4) Conclure que $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément sur I.

(5) Même questions avec $g_n(x) := a_n e^{inx}$ et $(a_n)_{n\geq 0}$ suite décroissante tendant vers 0.