Université des Sciences et Technologies de Lille 1
2012/2013 – Licence Profil Mécanique – Semestre 4
Introduction à l'analyse réelle – M 203'

Exercices sur les suites de fonctions

Exercice 1

Étudier la convergence (simple, uniforme) des suites de fonctions suivantes :

(1) $f_n(x) = e^{-nx^2}$, $x \in [1, +\infty[$;
(2) $f_n(x) = e^{-nx^2}$, $x \in \mathbb{R}$;
(3) $f_n(x) = xe^{-nx^2}$, $x \in \mathbb{R}$;
(4) $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$, $x \in \mathbb{R}$;
(5) $f_n(x) = \sin(xe^{-nx^2})$, $x \in \mathbb{R}$;
(6) $f_n(x) = \sin(nxe^{-nx^2})$, $x \in \mathbb{R}$;
(7) $f_n(x) = \frac{\arctan nx}{\sqrt{n}}$, $x \in \mathbb{R}$;
(8) $f_n(x) = x^n(1-x)$, $x \in [0,1]$;
(9) $f_n(x) = n^2 \cos^n x \sin x$, $x \in [0, \pi/2]$;
(10) $f_n(x) = \frac{n^2(x+1)}{n^2+x}$, $x \in [0,1]$.

Exercice 2

Montrer qu'une limite uniforme de fonctions polynômiales sur $\mathbb{R}$ est un polynôme. *On pourra chercher à utiliser le critère de Cauchy.*

Exercice 3

On considère sur $[0,1]$ la suite de fonctions

$$f_n(x) = \frac{n^2x + x}{n^2x + 1}.$$

(1) La suite converge-t-elle simplement sur $[0,1]$? Si oui, donner sa limite.
(2) A-t-on convergence uniforme sur $[0,1]$? sur $]0,1]$? sur $[a,1]$ pour $0 < a < 1$?

Exercice 4

Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,b]$.

(1) Justifier l'existence d'une suite de polynômes (P_n) convergeant uniformément vers f' sur $[a,b]$.
(2) Montrer que $\int_a^x P_n(t)dt$ converge uniformément vers $f(x) - f(a)$.
(3) En déduire l'existence d'une suite polynômes (Q_n) telle que (Q_n) converge uniformément vers f et (Q'_n) converge uniformément vers f'.

Exercice 5

(1) Étudier la convergence simple et uniforme sur $[0,1]$ de la suite définie par $f_n(x) = (1-x)^n \sin x$.

(2) En déduire la limite de $\int_0^1 (1-x)^n \sin x \, dx$ lorsque n tend vers $+\infty$.

(3) Déterminer la limite simple f de $f_n(x) = (n+1)(\cos x)^n \sin x$ sur $[0, \pi/2]$.

(4) Calculer $\int_0^{\pi/2} f_n(x) \, dx$ et $\int_0^{\pi/2} f(x) \, dx$. Qu'en concluez-vous ?

Exercice 6*

On considère la suite de fonctions

$$P_0 = 0 \text{ et } P_{n+1}(x) = P_n(x) + \frac{1}{2}(x - P_n^2(x)).$$

(1) Montrer que P_n définit une suite de polynômes.

(2) Montrer que, pour tout $n \geq 0$, on a $(1 - \frac{1}{2}\sqrt{x})(2 + (n+1)\sqrt{x}) \leq 2 + n\sqrt{x}$.

(3) Montrer que, pour tout $n \geq 0$ et pour tout $x \in [0,1]$, $0 \leq \sqrt{x} - P_n(x) \leq \frac{2\sqrt{x}}{2+n\sqrt{x}}$ et $P_n(x) \geq 0$.

(4) Pour $n \geq 0$, déterminer le maximum sur $[0,1]$ de la fonction $x \mapsto \frac{2\sqrt{x}}{2+n\sqrt{x}}$

(5) Conclure que P_n converge uniformément vers $\sqrt{x}$ sur $[0,1]$.