Devoir Surveillé

le 15 novembre 2008 à 8h, **Durée : 2h**

Documents, calculatrices et téléphones interdits

Exercice I.

(a) Donner la définition de la différentiabilité en $(0,0)$ d'une fonction $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$.

(b) Donner un exemple de fonction de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ différentiable sur $\mathbf{R}^2$.

Exercice II. Etudier les limites des fonctions suivantes en $(0,0)$:

(a) $f(x,y) = \dfrac{x^2 + xy^2 + y^2}{x^2+y^2}$;

(b) $g(x,y) = \dfrac{x\ln(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$;

(c) $h(x,y) = \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$.

Exercice III. Soient n un entier strictement positif et f la fonction définie sur $\mathbf{R}^2$ par

$$f(x,y) = y^n \sin\frac{1}{x^2+y^2} \quad \text{pour } (x,y) \neq (0,0); \quad \text{et } f(0,0) = 0,$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbf{R}^2$.
2. Pour quelles valeurs de n la fonction f est-elle
   - différentiable sur $\mathbf{R}^2$?
   - de classe C^1 sur $\mathbf{R}^2$?

   Justifier vos réponses.
3. On suppose que $n = 3$. Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0)$.
4. On suppose que $n = 1$. Donner l'équation du plan tangent de la surface définie par $z = f(x,y)$ au point $(0, \sqrt{\frac{2}{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}})$.

Exercice IV. Soient $U = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x+y > 0\}$ un ouvert de $\mathbf{R}^2$, $\varphi(x,y) = (xy, x-y)$ une application définie sur U.

1. Calculer la matrice jacobienne de φ sur U.
2. Montrer que φ est un changement de variables de classe C^1 (C^1-difféomorphisme) de U sur $V = \{(u,v) \in \mathbf{R}^2 \mid v^2 + 4u > 0\}$.

Barème indicatif : $3 + 5 + 8 + 4$