USTL **2006-2007**
Math202B, Eléments de calcul différentiel, **Parcours SPI**

Examen 2^e **session**, le 7 mars 2007 à 8h
Durée : 3h
Documents, calculatrices et téléphones interdits

Exercice 1.
(i) Donner la définition de la différentiabilité en $(0,0)$ d'une application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.
(ii) Considérons la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} \text{ si } (x,y) \neq (0,0), \quad f(0,0) = 0.$$

a) Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}^2$.
b) Déterminer les dérivées partielles premières de f sur $\mathbb{R}^2$.
La fonction f est-elle différentiable sur $\mathbb{R}^2$? Justifier votre réponse.
c) La fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ est définie par $\varphi(t) = (u(t), v(t))$, où $u(t) = t$ et $v(t) = -t$. Posons $F = f \circ \varphi$. Calculer $F'(0)$ et $A = \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)u'(0) + \dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)v'(0)$.
d) Donner l'équation du plan tangent de la surface définie par $z = f(x,y)$ au point $(1,1,0)$.

Exercice 2. Notons $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0, y > 0\}$ et $\varphi : U \to U$ l'application définie par $\varphi(x,y) = (xy, \frac{y}{x})$.
a) Montrer que φ est un changement de variables (difféomorphisme) sur U.
b) On cherche à déterminer les fonctions $f : U \to \mathbb{R}$ de classe C^1 vérifiant l'équation aux dérivées partielles

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy. \qquad (I)$$

Déterminer l'équation aux dérivées partielles vérifiées par $F = f \circ \varphi^{-1}$ et en déduire la solution générale de (I).

Exercice 3.
(a) Soit $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 \leq y, y^2 \leq x\}$. Déssiner le domaine D et calculer l'intégrale double $\iint_D 2y dx dy$.
(b) Soit $\mathcal{C}$ le bord orienté de D, calculer $\int_{\mathcal{C}} (x - 2y^2)dx - 2xydy$ de deux manières :
(i) en utilisant la définition d'une intégrale curviligne ;
(ii) en utilisant le résultat de (a).

Exercice 4. Soit E la partie de $\mathbb{R}^3$ délimitée supérieurement par la sphère :

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

et inférieurement par le cône C :

$$\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = z^2, z \geq 0\}.$$

(a) Dessiner le cône C puis la partie E.
(b) Calculer le volume de E.