Université des Sciences et Technologies de Lille 1
2010/2011 – Licence Parcours SPI – Semestre 3
Éléments de Calcul Différentiel – Math 22 B

Corrigé du Devoir Surveillé 2
10 Janvier 2011 à 14h. **Durée : 2h.**
Documents, calculatrices, téléphones et appareils électroniques **interdits**.

Barème : 4+4+5+5+4

Questions de Cours.

(1) On rappelle que, d'après le cours, un ensemble A est dit négligeable si pour tout $\epsilon > 0$, il existe une famille de pavés recouvrant A et dont la somme des aires est inférieure à ϵ.
Par exemple, $\{(0,0)\}$, un cercle, le graphe d'une fonction sont des ensembles négligeables.

(2) On appelle gradient de f la quantité

$$\mathrm{grad}(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right).$$

(3) On écrit $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$. D'après le théorème de Poincaré, on doit avoir :

$$\frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \ \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \text{ et } \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}.$$

Exercice 1

(1)

$$\int\int_{\Delta} xy^2 dxdy = \int_0^1 y^2 \int_0^y xdxdy = \frac{1}{10}.$$

(2) On développe

$$\int\int_{[0,\frac{\pi}{2}]^2} (\cos x + \sin y)^2 dxdy = \int\int_{[0,\frac{\pi}{2}]^2} (\cos^2 x + \sin^2 y + 2\cos x \sin y)dxdy.$$

On a

$$\int\int_{[0,\frac{\pi}{2}]^2} 2\cos x \sin y dxdy = 2.$$

Puis, on écrit

$$\int\int_{[0,\frac{\pi}{2}]^2} \cos^2 x + \sin^2 y dx dy = \frac{\pi}{2}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 y dy\right) = \frac{\pi^2}{4}.$$

Au final, on trouve

$$\int\int_{[0,\frac{\pi}{2}]^2} (\cos x + \sin y)^2 dx dy = \frac{\pi^2}{4} + 2.$$

Exercice 2

On définit, sur $\mathbb{R}^2$, la forme différentielle

$$\omega := \left(xy + \frac{y^2}{2}\right) dx + \left(xy + \frac{x^2}{2}\right) dy = P dx + Q dy.$$

(1) On utilise le théorème de Poincaré sur $\mathbb{R}^2$ et on vérifie que $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = x + y$.

(2) On écrit

$$\int_\Gamma \omega = \int_0^1 \left(te^t + \frac{e^{2t}}{2} + te^{2t} + \frac{t^2 e^t}{2}\right) dt.$$

On sépare les différents calculs. On utilise des intégrations par parties pour calculer les quantités suivantes

$$\int_0^1 te^t dt = 1, \quad \int_0^1 te^{2t} dt = \frac{e^2+1}{4} \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{t^2 e^t}{2} dt = \frac{e}{2} - 1.$$

On trouve finalement

$$\int_\Gamma \omega = \frac{e^2+e}{2}.$$

(3) On cherche f de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = xy + \frac{y^2}{2} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = xy + \frac{x^2}{2}.$$

La première condition implique qu'il existe g de classe $\mathcal{C}^1$ ne dépendant que de y et telle que

$$f(x,y) = \frac{x^2 y + y^2 x}{2} + h(y).$$

La deuxième condition implique alors $h'(y) = 0$. Une primitive est donc de la forme $f(x,y) = \frac{x^2y+y^2x}{2}$ On trouve alors

$$\int_\Gamma \omega = f(1,e) - f(0,1) = \frac{e^2+e}{2}.$$

Exercice 3

(1) On écrit
$$\int_{\Gamma_1}(xdy - ydx) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\cos^2 t + 2\sin^2 t)dt = \pi.$$

(2) On écrit
$$\int_{\Gamma_2}(xdy - ydx) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin 2t \sin t + 2\cos t \cos 2t)dt.$$
On utilise la formule $\cos 2t = \cos^2 t - \sin^2 t$ pour obtenir l'expression
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin 2t \sin t + 2\cos t \cos 2t)dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3 t dt = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t(1 - \sin^2 t)dt.$$
On trouve finalement
$$\int_{\Gamma_2}(xdy - ydx) = 2[\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{2}{3}[\sin^3 t]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{4}{3}.$$

(3) On va utiliser le théorème de Green Riemann qui dit que
$$m(A) = \frac{1}{2}\int_{\partial A^+} xdy - ydx.$$
Sur la partie horizontale du bord, l'intégrale curviligne est nulle. L'intégrale curviligne sur les deux autres morceaux a été calculée aux questions précédentes et on trouve
$$m(A) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{3}.$$

Exercice 4

$$I := \int\int_{\Delta} \frac{1}{1 + x^2 + y^2}dxdy,$$
où $\Delta := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 1\}$.

(1) On a $\Delta := \{(r\cos\theta, r\sin\theta) : 0 \leq r \leq 1, \theta \in [0, \frac{\pi}{2}]\}$

(2) On fait le changement de variables $(x, y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. On a
$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^1 \frac{r}{r^2 + 1}drd\theta.$$
On a $\int_0^1 \frac{r}{r^2+1}dr = [\frac{1}{2}\ln(r^2 + 1)]_0^1 = \frac{\ln 2}{2}$. On trouve finalement
$$I = \frac{\pi \ln 2}{4}.$$