Corigé du DS du 15/11/2008, M202 parcours SPI, Licence 2-ième année

Exercice II.

(a) En passant aux coordonnées polaires, on trouve : $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{r\to 0} \dfrac{r^2 + r^3(\cos\theta - \sin^2\theta)}{r^2} = 1 + \lim_{r\to 0} r(\cos\theta\sin^2\theta) = 1$, par la règle des gendarmes puisque $r \to 0$ et $\cos\theta\sin^2\theta$ est borné.

(b) Regardons la limite de g en $(0,0)$ le long de la courbe d'équation $x = 0$: Elle s'écrit :

$$\lim_{y\to 0} g(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{\ln(1+y^2)}{y^3} = \lim_{y\to 0} \frac{y^2 + y^2\epsilon(y^2)}{y^3} = \lim_{y\to 0} \frac{1+\epsilon(y^2)}{y}$$

cette limite n'existe pas ($+\infty$ en 0_+ et $-\infty$ en 0_-).

(c) Regardons la limite de h en $(0,0)$ le long de la courbe d'équation $x = 0$: $\lim_{y\to 0} h(0,y) = \lim_{y\to 0} \dfrac{0}{y^2} = 0$.

Regardons la limite suivant la courbe d'équation $y = x^2$: $\lim_{x\to 0} h(x,x^2) = \lim_{x\to 0} \dfrac{x^4}{2x^4} = \dfrac{1}{2}$

Ces deux limites sont différentes, on conclut que h n'a pas de limite en $(0,0)$.

Exercice III.

1.

• f est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ comme produit, et composée de fonction usuelles continues sur leurs domaines de définition.

• f est continue en $(0,0)$ si seulement si $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = f(0,0)$, ici :

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} y^n \sin(\dfrac{1}{x^2+y^2}) = 0 = f(0,0)$ par la règle des gendarmes puisque y^n tend vers 0 dès que $n \geq 1$ et que $\sin(\frac{1}{x^2+y^2})$ est bornée.

2.

• *Existence des dérivées partielles de f en $(0,0)$?*

Par définition la dérivée partielle de f par rapport à x en $(0,0)$ est –si elle existe– la limite

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(0+x,0) - f(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0$$

Par définition la dérivée partielle de f par rapport à y en $(0,0)$ est –si elle existe– la limite

$$\lim_{y\to 0} \frac{f(0,0+y) - f(0,0)}{y} = \lim_{x\to 0} y^{n-1} \sin(\frac{1}{y^2}).$$

si $n \geq 2$, cette limite existe et est nulle par la règle des gendarme

si $n = 1$, cette limite est $\lim_{x\to 0} \sin(\frac{1}{y^2})$ qui n'existe pas.

En conclusion : f admet de dérivées partielles (de plus nulles) par rapport aux deux variables x et y ssi $n \geq 2$.

• *Pour quelle valeur de n, f est-elle différentiable en $(0,0)$*

On sait qu'une condition nécessaire pour f soit différentiable en $(0,0)$ est que f admette des dérivées partielles en $(0,0)$, c'est à dire que $n \geq 2$. Supposons donc $n \geq 2$. D'après le cours, montrer que f est différentiable en $(0,0)$ revient à montrer que la limite

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(0+x,0+y) - f(0,0) - \left(\frac{\partial f}{\partial x}\big((0,0)\big)\cdot x + \frac{\partial f}{\partial y}\big((0,0)\big)\cdot y\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

existe et vaut 0. Ici, on a :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(0+x,0+y)-f(0,0) - \left(\frac{\partial f}{\partial x}((0,0)).x + \frac{\partial f}{\partial y}((0,0)).y\right)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^n \sin\frac{1}{x^2+y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{r\to 0} r^{n-1}\sin^n\theta \sin\frac{1}{r^2} = 0$$

pour $n \geq 2$, par passage en polaires puis en appliquant la règle des gendarmes.

En conclusion : f est différentiable si et seulement si $n \geq 2$.

Pour quelle valeur de n, f est-elle de classe C^1 au voisinage de $(0,0)$?
Il faut déjà que f soit différentiable c'est à dire que $n \geq 2$.

Calculons les dérivées partielles de f sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(y^n \sin(\frac{1}{x^2+y^2})\right) = y^n(\frac{-2x}{(x^2+y^2)^2})\cos(\frac{1}{x^2+y^2})$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(y^n \sin(\frac{1}{x^2+y^2})\right) = ny^{n-1}\sin(\frac{1}{x^2+y^2}) + y^n\left(\frac{-2y}{(x^2+y^2)^2}\right)\cos(\frac{1}{x^2+y^2})$$

Montrer que f en C^1 en $(0,0)$ c'est montrer que les fonctions dérivées partielles (calculées en dehors de $(0,0)$) tendent vers 0 en $(0,0)$ (0 étant la valeur des dérivées partielles en $(0,0)$).

Par passage en coordonnées polaires :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = r^n \sin^n\theta(\frac{-2r\cos\theta}{r^4})\cos(\frac{1}{r^2}) = -2r^{n-3}\sin^n\theta\cos\theta\cos(\frac{1}{r^2})$$

- si $n \geq 4$ la limite de $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ en $(0,0)$ vaut 0 par la règle des gendarmes.
- si $n = 2$ ou 3, alors la limite en $(0,0)$ de $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ n'existe pas (on peut calculer les limites suivants les courbes d'équation $y=0$ et $x=y$)

De manière analogue, par passage en coordonnées polaires :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = nr^{n-1}\sin^{n-1}\theta\sin(\frac{1}{r^2}) + r^n\sin^n\theta\left(\frac{-2r\sin\theta}{r^4}\right)\cos(\frac{1}{r^2}).$$

Si $n \geq 4$, par la règle des gendarmes, la limite de $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ en $(0,0)$ existe et vaut 0.

En conclusion : f est de classe C^1 au voisinage de $(0,0)$ ssi $n \geq 4$.

3. $n = 3$. Les dérivées partielles secondes de f en $(0,0)$ sont égales aux limites suivantes si elles existent :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{\partial f}{\partial x})(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{0-0}{x} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0) = \frac{\partial}{\partial y}(\frac{\partial f}{\partial x})(0,0) == \lim_{y\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y} = \lim_{y\to 0}\frac{0-0}{y} = 0$$

4. $n = 1$. D'après le cours, le plan tangent à la surface d'équation $z = f(x,y)$ au point $(0, \sqrt{\frac{2}{\pi}}, f(0, \sqrt{\frac{2}{\pi}})) = (0, \sqrt{\frac{2}{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}})$ a pour équation :

$$z = \sqrt{\frac{2}{\pi}} + x \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(0, \sqrt{\frac{2}{\pi}}) + (y - \sqrt{\frac{2}{\pi}}) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(0, \sqrt{\frac{2}{\pi}}).$$

Ici, on a $\frac{\partial f}{\partial x}(0, \sqrt{\frac{2}{\pi}}) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(0, \sqrt{\frac{2}{\pi}}) = 1$.

En conclusion : une équation du plan tangent à $z = f(x,y)$ au point $(0, \sqrt{\frac{2}{\pi}}, \sqrt{\frac{2}{\pi}})$ est : $z = y$.

Exercice IV.

1. Pour tout $(x,y) \in U$, la matrice jacobienne de φ en (x,y) est $J_\varphi(x,y) = \begin{pmatrix} y & x \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

2. On montre d'abord que φ est injective sur U en résolvant $xy = u, x - y = v$. On a $y(v+y) = u \Leftrightarrow y^2 + vy - u = 0 \Leftrightarrow v^2 + 4uv \geq 0, y = \frac{-v \pm \sqrt{v^2+4uv}}{2}, x = \frac{v \pm \sqrt{v^2+4uv}}{2}$, $x + y = \pm\sqrt{v^2 + 4uv}$. Or $(x,y) \in U, x + y > 0$ donc $v^2 + 4uv > 0$ et $x = \frac{v + \sqrt{v^2+4uv}}{2}, y = \frac{-v - \sqrt{v^2+4uv}}{2}$. Donc pour tout (u,v) tel que $v^2 + 4uv > 0$, il existe un unique (x,y) vérifiant $\varphi(x,y) = (u,v)$. φ est bijective de U sur $V = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2 | v^2 + 4uv > 0\}$.

φ est de classe C^1, injective sur U et on a $\det J_\varphi(x,y) = -y - x \neq 0$ pour tout $(x,y) \in U$. Donc φ est un C^1 difféomorphisme de classe C^1 de U sur V.