Examen, le 25 Janvier 2008 à 8h, **Durée : 3h**

Documents, calculatrices et téléphones interdits

Exercice I. (3 points) On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}^2$ par

$$f(x,y) = \frac{y^4 - x^3 - xy^2}{x^2+y^2} \quad \text{pour } (x,y) \neq (0,0); \quad \text{et } f(0,0) = 0.$$

(a) Montrer que f est continue en $(0,0)$.

(b) Montrer que f est différentiable en $(0,0)$ et préciser sa différentielle $df(0,0)$.

Exercice II. (6 points)

1. Soit ω la forme différentielle définie sur $\mathbf{R}^2$ par

$$\omega = (e^y y \cos(xy))\, dx + e^y \left[1 + x\cos(xy) + \sin(xy)\right] dy.$$

   (a) Montrer que ω est exacte sur $\mathbf{R}^2$.

   (b) Déterminer les fonctions F telles que $\omega = dF$.

   (c) Donner la valeur de $\displaystyle\int_{\mathcal{C}^+} \omega$ où $\mathcal{C}^+$ est le demi-cercle unité supérieur de $\mathbf{R}^2$ orienté dans le sens trigonométrique.

2. (a) Enoncer le théorème de Green-Riemann.

   (b) Utiliser le théorème de Green-Riemann pour calculer l'intégrale curviligne suivante :

$$\int_{\mathcal{C}^+} y\cos x dx + (x + \sin x)dy$$

   où $\mathcal{C}^+$ est le cercle $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : x^2+y^2 = 4\}$ orienté dans le sens trigonométrique.

Exercice III. (6 points)

1. Montrer que $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2\theta \sin^2\theta d\theta = \frac{\pi}{4}$.

2. On pose pour $a > 0$, $D_a = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | x^2+y^2 \leq a^2\}$. Calculer $\displaystyle\iint_{D_a} x^2y^2 dxdy$.

3. Soit $D = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 | x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$. Calculer $\displaystyle\iiint_D x^2y^2z^2 dxdydz$

   a) En utilisant le théorème de Fubini pour D simple par rapport à z;

   b) En utilisant les coordonnées sphériques.

Exercice IV. (5 points) Soient $U = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | x > y\}$ et $V\{(u,v) \in \mathbf{R}^2 | 2v^2 + u > 0\}$ deux ouverts de $\mathbf{R}^2$, et l'application $\phi : U \to V$ définie par $\phi(x,y) = (x^2 - y^2 - 2xy, y) = (u,v)$.

1. (a) Montrer que ϕ est une bijection de U sur V (on explicitera $\phi^{-1}(u,v)$).

   (b) Justifier le fait que ϕ est un C^1-difféomorphisme de U sur V.

2. Soit $F : V \to \mathbf{R}$ une fonction de classe C^1, on pose $f = F \circ \varphi$, autrement dit, pour $(x,y) \in U$, $f(x,y) = F(u,v)$.

   (a) Exprimer les dérivées partielles premières $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ en fonction de $\dfrac{\partial F}{\partial u}$ et $\dfrac{\partial F}{\partial v}$.

   (b) Résoudre l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$(x+y)\frac{\partial f}{\partial x} + (x-y)\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$