Université des Sciences et Technologies de Lille 1
2010/2011 – Licence Parcours SPI – Semestre 3
Éléments de Calcul Différentiel – Math 22 B

Examen de rattrapage
28 Février 2011 à 10h30. **Durée : 2h.**
Documents, calculatrices, téléphones et appareils électroniques **interdits**.

Le sujet comporte des questions de cours et 4 exercices indépendants (sur **2 pages**).

Une attention particulière sera portée à la **clarté** et à la **précision** des réponses. On veillera notamment à **bien préciser les théorèmes utilisés**.
Barème indicatif : 4+5+5+4+4.

Questions de Cours.

(1) Donner un exemple de fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ et non continue au point $(1,0)$.
(2) Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ de classe $\mathcal{C}^1$. Donner l'expression de la matrice jacobienne de f au point a.
(3) Soit $\omega := Pdx + Qdy$ une forme différentielle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. Donner une condition sur les dérivées partielles de P et Q pour que ω soit exacte.

Exercice 1

On pose
$$f(x,y) := xy(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}.$$
(1) Calculer les dérivées partielles de f pour $(x,y) \neq (0,0)$.
(2) Montrer que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ ont une limite en $(0,0)$.
(3) Conclure que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 2

On définit
$$U := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x > 0, \ y > 0\right\}.$$
et
$$\varphi : U \to U, \ (x,y) \mapsto (xy, y/x).$$
(1) Montrer que φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme sur U.

(2) On pose $F \circ \varphi = f$, où f est solution sur U de l'E.D.P.

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy.$$

Déterminer l'E.D.P. satisfaite par F.

(3) En déduire la forme de f.

Exercice 3

On définit, sur $\mathbb{R}^2$, la forme différentielle

$$\omega := (2\sin(x+y)\cos(x+y))\,dx + (2\sin(x+y)\cos(x+y))\,dy.$$

(1) Montrer que ω est exacte sur $\mathbb{R}^2$.

(2) Déterminer une primitive de ω sur $\mathbb{R}^2$.

(3) On pose $\Gamma := (\gamma, I)$ où $\gamma(t) = (t, 3t^2/(2\pi))$ sur $I = [0, \pi/3]$. Calculer $\int_\Gamma \omega$.

Exercice 4

On cherche à calculer

$$I := \int\int_\Delta \frac{x^2}{1+x^2+y^2}dxdy,$$

où $\Delta := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq |y|, x^2+y^2 \leq 1\}$.

(1) Représenter graphiquement l'ensemble Δ.

(2) Calculer I.