Examen 2^e session, le 19 Juin 2008 à 14h, **Durée : 3h**

Documents, calculatrices et téléphones interdits

Exercice I. (Question de cours) (3 points)

(a) Donner la définition de la différentiabilité en un point d'une fonction $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$.

(b) Donner un exemple de fonction de $\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}$ différentiable sur $\mathbf{R}^2$ et donner sa différentielle.

Exercice II. (3 points) On considère la fonction f définie sur $\mathbf{R}^2$ par

$$f(x,y) = \frac{xy^2}{x^4+y^2} - y \quad \text{pour } (x,y) \neq (0,0); \quad \text{et } f(0,0) = 0.$$

(a) Montrer que f est continue en $(0,0)$.

(b) Calculer $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

(c) Montrer que f n'est pas différentiable en $(0,0)$.

Exercice III. (3 points) Soit $D = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x \geq 0,\ 0 \leq z \leq y,\ x^2+y^2 \leq 1\}$. Calculer $\iiint_D xyz\, dxdydz$.

Exercice IV. (6 points) Soit $\omega = xdx + xydy$ une forme différentielle sur $\mathbf{R}^2$.

1. Est-ce que ω est fermée sur $\mathbf{R}^2$?
2. Soit $\Gamma_1 = \{(x,y) \mid x^2+y^2 = 2, y > 0, -1 \leq x \leq 1\}$ orienté du point $(1,1)$ au point $(-1,1)$. Calculer $\displaystyle\int_{\Gamma_1} \omega$.
3. Soit $\Gamma_2 = \{(x,y) | y = x^2, -1 \leq x \leq 1\}$ orienté du point $(-1,1)$ au point $(1,1)$. Calculer $\displaystyle\int_{\Gamma_2} \omega$.
4. Soit $D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 \leq y, x^2+y^2 \leq 2\}$. Calculer $\displaystyle\iint_D ydxdy$.
5. Faire un dessin représentant D, Γ_1 et Γ_2. Justifier une relation entre les trois intégrales précédentes.

Exercice V. (5 points) Soient $U = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x < 0 < y\}$ un ouvert de $\mathbf{R}^2$, et $\varphi : U \to \mathbf{R}^2$ définie par $\varphi(x,y) = (xy, x+y)$.

1. Montrer que φ est un changement de variables (difféomorphisme) de classe C^1 de U sur
$$V = \{(u,v) \in \mathbf{R}^2 \mid u < 0\}.$$
Donner l'expression de l'application réciproque $\varphi^{-1}(u,v)$.
2. On cherche les solutions f de classe C^1 sur U de l'équation aux dérivées partielles
$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 3(y-x).$$
On pose $f(x,y) = F(u,v)$ où $u = xy, v = x+y$.
   (i) Trouver l'équation aux dérivées partielles que vérifie F.
   (ii) Résoudre l'équation pour F et en déduire les solutions pour f.