Catégories

Notes d'exposé du groupe de travail
Théorie de Lie

(Nantes)

Salim RIVIERE

Janvier 2011

$\mathbb{K}$ désigne un anneau commutatif.

1 Catégories et foncteurs

1.1 Catégories, types de morphismes, objets initiaux et terminaux

Définition 1.1.1 *Une catégorie $\mathcal{C}$ est la donnée d'une classe d'objets $Ob(\mathcal{C})$ et, pour tous A et B dans $Ob(\mathcal{C})$, d'un ensemble de morphismes (aussi appelées "flèches") noté $Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$ telles que*

1. *Pour tous A ,B et C objets de $\mathcal{C}$, il existe une fonction appelée composition et notée $\circ$*

$$\begin{array}{ccc} Hom_{\mathcal{C}}(B,C) \times Hom_{\mathcal{C}}(A,B) & \to & Hom_{\mathcal{C}}(A,C) \\ (g,f) & \longmapsto & g \circ f \end{array}$$

   Vérifiant la proprieté d'associativité suivante

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

   pour tous A, B, C, D dans $Ob(\mathcal{C})$, et $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$, $g \in Hom_{\mathcal{C}}(B,C)$, $h \in Hom_{\mathcal{C}}(C,D)$.

2. *Pour tout objet A dans $Ob(\mathcal{C})$ il existe un morphisme 1_A dans $Hom_{\mathcal{C}}(A,A)$ tel que pour tout objet B dans $Ob(\mathcal{C})$:*

$$f \circ 1_A = f \quad et \quad 1_A \circ g = g$$

   pour tous $f \in Hom_{\mathcal{C}}(A,B)$ et $g \in Hom_{\mathcal{C}}(B,A)$

Exemples 1.1.2

1. *La catégorie des ensembles, notée **Ens**, dont les objets sont les ensembles et les morphismes sont les applications entre ensembles.*
2. *La catégorie des espaces topologiques, notée **Top**, dont les objets sont les espaces topologiques et les morphismes les applications continues entre espaces topologiques.*

3. *La catégorie des groupes, notée* ***Grp****, dont les objets sont les groupes et les morphismes sont les morphismes de groupes.*
4. *La catégorie des* $\mathbb{K}$*-modules (ou des* $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels lorsque* $\mathbb{K}$ *est un corps), notée* $\mathbb{K}$***-mod*** *, dont les objets sont les* $\mathbb{K}$*-modules et les morphismes sont les applications* $\mathbb{K}$*-linéaires entre* $\mathbb{K}$*-modules.*
5. *La catégorie des algèbres associatives, notée* $\mathbb{K}$***-Alg****, dont les objets sont les* $\mathbb{K}$*-algèbres associatives unitaires et les morphismes sont les morphismes d'algèbres associatives unitaires.*
6. *Et enfin* ***Var****, la catégorie dont les objets sont les varietés* $\mathcal{C}^\infty$ *et les morphismes sont les applications* $\mathcal{C}^\infty$ *entre deux varietés.*

Définition 1.1.3 *Soient* $\mathcal{C}$ *une catégorie,* A *et* B *deux objets de* $\mathcal{C}$*. Un morphisme* $f : A \to B$ *est dit*

- ***épimorphisme*** *si pour tout objet* $C \in Ob(\mathcal{C})$ *et pour tous morphismes* g *et* h *dans* $Hom_{\mathcal{C}}(B, C)$

$$g \circ f = h \circ f \quad \Rightarrow \quad g = h$$

  i.e f *est simplifiable à droite.*
- ***monomorphisme*** *si pour tout objet* $C \in Ob(\mathcal{C})$ *et pour tous morphismes* g *et* h *dans* $Hom_{\mathcal{C}}(B, C)$

$$f \circ g = f \circ h \quad \Rightarrow \quad g = h$$

  i.e f *est simplifiable à gauche.*

Exemples 1.1.4 *Les monomorphismes de* ***Ens*** *sont les applications injectives entre ensembles. Les épimorphismes correspondent quant à eux aux applications surjectives.*

Définition 1.1.5 *Soient* $\mathcal{C}$ *une catégorie,* A *et* B *deux objets de* $\mathcal{C}$ *et* $f : A \to B$ *un morphisme. Une flèche* $g : B \to A$ *est dite* ***inverse à gauche*** *ou* ***rétraction*** *(resp.* ***inverse à droite*** *ou* ***section****) de* f *si elle vérifie* $g \circ f = 1_A$ *(resp.* $f \circ g = 1_B$*).* f *est dite inversible si il existe un morphisme* $g : B \to A$ *qui est à la fois inverse à gauche et à droite de* f*. Dans ce cas* g *est unique et est appelé l'****inverse*** *de* f*, noté* f^{-1}*.*

Un ***idempotent*** $f : A \to A$ *est un morphisme vérifiant* $f^2 := f \circ f = 1_A$*. Il est scindé lorsque qu'il existe un objet* B *dans* $Ob(\mathcal{C})$*, un morphisme* $g : A \to B$ *et un morphisme* $h : B \to A$ *tels que* $f = h \circ g$ *et* $g \circ h = 1_B$*.*

Remarque 1.1.6 *Un morphisme inversible à droite est un épimorphisme mais la réciproque n'est pas toujours vraie (elle est vraie dans* ***Ens*** *mais pas dans* ***Grp****). De même, un morphisme inversible à gauche est toujours un monomorphisme.*

Définition 1.1.7 *Soient* $\mathcal{C}$ *une catégorie et* A *un objet de* $\mathcal{C}$*.* A *est dit*

- ***initial*** *si pour tout objet* B *de* $\mathcal{C}$*,* $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ *contient exactement une seule flèche.*
- ***terminal*** *si pour tout objet* B *de* $\mathcal{C}$*,* $Hom_{\mathcal{C}}(B, A)$ *contient exactement une seule flèche.*

– ***nul*** *si il est à la fois initial et terminal. A est alors est unique à isomorphisme près. La* ***flèche nulle*** *entre entre deux objets B et C, notée $B \stackrel{0}{\to} C$ est l'unique composée $B \to A \to C$.*

Exemples 1.1.8

– *Dans la catégorie* ***Ens****, l'ensemble réduit à un point $\{*\}$ est terminal.*
– *Dans la catégorie* ***Grp****, le groupe à un élément $\{1\}$ est un objet nul.*

1.2 Foncteurs

Définition 1.2.1 *Soient $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ deux catégories. Un* ***foncteur covariant*** *$\mathcal{F}$ de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{D}$, noté $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, est la donnée*

– *d'un objet $\mathcal{F}(A)$ dans $Ob(\mathcal{D})$ pour tout objet A dans $Ob(\mathcal{C})$,*
– *et pour toute paire (A, B) d'objets de $\mathcal{C}$, d'une application $\mathcal{F} : Hom_{\mathcal{C}}(A, B) \to Hom_{\mathcal{D}}(A, B)$ telle que, pour tout objet C de $\mathcal{C}$:*

$$\mathcal{F}(g \circ f) = \mathcal{F}(g) \circ \mathcal{F}(f) \quad \forall (f, g) \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B) \times Hom_{\mathcal{C}}(B, C) \quad (*)$$

Un ***foncteur contravariant*** *$\mathcal{F}$ de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{D}$, noté $\mathcal{F} : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, est la donnée*

– *d'un objet $\mathcal{F}(A)$ dans $Ob(\mathcal{D})$ pour tout objet A dans $Ob(\mathcal{C})$,*
– *et pour toute paire (A, B) d'objets de $\mathcal{C}$, d'une application $\mathcal{F} : Hom_{\mathcal{C}}(A, B) \to Hom_{\mathcal{D}}(B, A)$ telle que, pour tout objet C de $\mathcal{C}$:*

$$\mathcal{F}(g \circ f) = \mathcal{F}(f) \circ \mathcal{F}(g) \quad \forall (f, g) \in Hom_{\mathcal{C}}(A, B) \times Hom_{\mathcal{C}}(B, C) \quad (*\ bis)$$

Exemples 1.2.2

1. *On définit le foncteur contravariant $\mathcal{C}^\infty(-, \mathbb{R})$:* ***Var*** *$\to$* ***Alg*** *tel que*
   – *Pour toute varieté M, $\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ est l'algèbre des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ de M à valeurs dans $\mathbb{R}$,*
   – *Si M et N sont deux varietés, et $f : M \to N$ un morphisme, le morphisme d'algèbres $\mathcal{C}^\infty(f) : \mathcal{C}^\infty(N, \mathbb{R}) \to \mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R})$ est défini par*

$$\mathcal{C}^\infty(f)(h) := h \circ f$$

2. *Le foncteur covariant $\mathcal{P}$:* ***Ens*** *$\to$* ***Ens*** *peut être défini en posant :*
   – *$\mathcal{P}(V) := \{U \subset V\}$ pour tout objet V dans $Ob($**Ens**$)$,*
   – *Si $f : U \to V$ est une application d'un ensemble U vers un ensemble V, $\mathcal{P}(f) : \mathcal{P}(U) \to \mathcal{P}(V)$ est l'application définie par*

$$\mathcal{P}(f)(U') := f(U') \subset V \quad \forall U' \in \mathcal{P}(U)$$

Définition 1.2.3 *Soient $\mathcal{C}$ une catégorie avec objet nul O, A et B deux objets de $\mathcal{C}$, et $f : A \to B$ un morphisme. Un* ***noyau*** *de f est une paire (N, i), où N est un objet et $i : N \to A$ est un morphisme, telle que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} N \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "0"'] & A \arrow[d, "f"] \\ & B \end{tikzcd}$$

c'est à dire $f \circ i = 0 : N \to B$, et telle que pour tout autre paire (N', i') vérifiant $f \circ i' = 0 : N' \to B$, il existe une unique flèche $h : N' \to N$ qui factorise i' en $i' = i \circ h$, ce qui peut s'écrire sous la forme du diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} N' \arrow[dr, "i'"'] \arrow[drr, bend left, "0"] \arrow[dd, dotted, "\exists! h"'] & & \\ & A \arrow[r, "f"] & B \\ N \arrow[ur, "i"] \arrow[urr, bend right, "0"'] & & \end{tikzcd}$$

Deux noyaux d'un même morphisme sont canoniquement isomorphes c'est à dire que si (N, i) et (N', i') sont deux noyaux de f, il existe un unique isomorphisme $j : N \to N'$ tel que $i = i' \circ j$.

Un conoyau de f est une paire (N^*, i^*), où N^* est un objet de $\mathcal{C}$ et $i^* : B \to N^*$ est un morphisme, telle que $i^* \circ f = 0 : A \to N^*$ et vérifiant la proprieté suivante : Si (N'^*, eti'^*) est une autre paire vérifiant $i'^* \circ f = 0 : A \to N'^*$, alors il existe une unique flèche $h^* : N^* \to N'^*$ telle que $h^* \circ i^* = i'^*$ i.e

$$\begin{tikzcd} & & N^* \arrow[dd, dotted, "\exists! h"] \\ A \arrow[r, "f"] \arrow[urr, bend left, "0"] \arrow[drr, bend right, "0"'] & B \arrow[ur, "i^*"'] \arrow[dr, "i'^*"] & \\ & & N'^* \end{tikzcd}$$

commute. Deux conoyaux de f sont canoniquement isomorphes.

Proposition 1.2.4 *Soient $\mathcal{C}$ une catégorie avec objet nul noté O, A et B deux objets de $\mathcal{C}$, et $f : A \to B$ un morphisme de $Hom_{\mathcal{C}}(A, B)$. Tout noyau de f est un monomorphisme.*

Preuve :

Soit (N, i) un tel noyau. Considérons un objet C dans $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ et un morphisme $p : C \to N$ tel que $i \circ p = 0 : C \to N$:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[d, "p"] \arrow[dr, "0"] \arrow[drr, bend left, "0"] & & \\ N \arrow[r, "i"] & A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

Comme $f \circ 0 = 0 : C \to B$ la flèche nulle $0 : C \to A$ se factorise par un unique morphisme $u : C \to N$ tel que $0 = i \circ u : C \to A$. Or $u = p$ et $u = 0$ sont deux choix possibles qui conviennent donc sont égaux par unicité de u. D'où $p = 0$ ce qui prouve que $i : N \to A$ est un monomorphisme.

□

Exemples 1.2.5

– *Dans la catégorie* ***Grp****, tout morphisme de groupes* $f : A \to B$ *admet un noyau* (N, i)*, avec* $N := \{a \in A \ / \ f(a) = e_B\}$ *où* e_B *est l'élément neutre de* B *et* $i : N \to A$ *est l'inclusion du sous-groupe* N *dans* A*. Le conoyau de* f *est le groupe quotient* $N^* := B/_{< \boldsymbol{Imf} >}$*, où* $\boldsymbol{Im}f := \{f(a)/a \in A\}$ *et* $< \boldsymbol{Im}f >$ *est le sous-groupe normal de* B *engendré par* $\boldsymbol{Im}f$*, muni de la projection* $p : B \to N^*$*.*

De même, on définit la notion d'image et de coimage :

Définition 1.2.6 *Soient* $\mathcal{C}$ *une catégorie avec objet nul* O*,* A *et* B *deux objets de* $\mathcal{C}$*, et* $f : A \to B$ *un morphisme. Si il existe une suite*

$$N \xrightarrow{i} A \xrightarrow{p} I \xrightarrow{p^*} B \xrightarrow{i^*} N^* \qquad (D)$$

telle que (N, i) *est un noyau de* f*,* (N^*, i^*) *est un conoyau de* f*,* (I, p) *est un noyau de* i^**,* (I, p^*) *est un conoyau de* i *et* $f = p^* \circ p$*, alors* (I, p) *est une* ***image*** *de* f *et* (I, p^*) *est une* ***coimage*** *de* f*.*

Si elle existe, une telle suite est unique à isomorphisme près.

Ceci nous mène à la définition de suite exacte de la façon suivante : Soient $\mathcal{C}$ une catégorie avec objet nul O pour laquelle tout morphisme a une décomposition de type (D) (i.e un noyau, une image, une coimage et un conoyau). Soient A, B et C trois objets de $\mathcal{C}$, et $f : A \to B$, $g : B \to C$ deux morphismes tels que $g \circ f = 0 : A \to C$. Soient (N, i) un noyau de g, (N', i') un noyau de f, et (I, p) une image de f. Par proprieté universelle des noyaux, vu que $g \circ f = 0$, il existe une unique flèche $\bar{f} : A \to N$ telle que $i \circ \bar{f} = f : A \to B$:

$$\begin{tikzcd}
 & I & N \arrow[d, "i"] & \\
N' \arrow[r, "i'"'] & A \arrow[u, "p"] \arrow[ur, "\bar{f}"] \arrow[r, "f"'] & B \arrow[r, "g"'] & C
\end{tikzcd}$$

Ainsi

$$i \circ \bar{f} \circ i' = f \circ i' = 0$$

donc $\bar{f} \circ i'$ (car i est un monomorphisme d'après la proposition 1.2.4). Comme (I, p) un conoyau de i', il existe donc un unique morphisme $\bar{\bar{f}} : I \to N$ tel que $\bar{f}$ se factorise en

$$\bar{f} = \bar{\bar{f}} \circ p : A \to N$$

Ce qui nous conduit à la définition suivante :

Définition 1.2.7 *La suite de morphismes*

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} B$$

est dite ***exacte*** *lorsque l'unique morphisme* $\bar{\bar{f}}$ *défini précédemment est un isomorphisme.*

$$\begin{tikzcd}
 & I \arrow[r, "\bar{\bar{f}}"] & N \arrow[d, "i"] & \\
N' \arrow[r, "i'"'] & A \arrow[u, "p"] \arrow[ur, "\bar{f}"] \arrow[r, "f"'] & B \arrow[r, "g"'] & C
\end{tikzcd}$$

Cette proprieté ne dépend pas du choix des noyaux (N, i) et (N', i'), ni du choix de l'image (I, p).

Proposition 1.2.8 *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie dont tous les morphismes ont une (co)image et un (co)noyau. Soit $f : A \to B$ un morphisme entre deux objets A et B de $\mathcal{C}$. Alors*

- *f est un monomorphisme si et seulement si la suite*

$$0 \xrightarrow{0} A \xrightarrow{f} B$$

  est exacte.
- *f est un épimorphisme si et seulement si la suite*

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{0} 0$$

  est exacte.

2 Catégories monoïdales symétriques

Dans tout ce paragraphe, $\mathcal{C}$ est une catégorie avec objet nul, dont tous les morphismes ont un (co)noyaux et une (co)image.

2.1 Catégories monoïdales

Définition 2.1.1 *La catégorie $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ est la catégorie dont les objets sont les paires (A, B) d'objets de $\mathcal{C}$ et les les morphismes sont les paires (f, g) de morphismes de $\mathcal{C}$, i.e pour tous toutes paires (A, B) et (C, D) d'objets de $\mathcal{C}$*

$$Hom_{\mathcal{C}\times\mathcal{C}}((A, B), (C, D)) := Hom_{\mathcal{C}}(A, C) \times Hom_{\mathcal{C}}(B, D)$$

où le produit $\times$ du membre de droite est le produit cartésien ensembliste usuel.

Les catégories $(\mathcal{C} \times \mathcal{C}) \times \mathcal{C}$ et $\mathcal{C} \times (\mathcal{C} \times \mathcal{C})$ seront identifiée à la catégorie $\mathcal{C} \times \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ dont les objets (resp. morphismes) sont les triplets d'objets (resp. de morphismes) de $\mathcal{C}$.

Définition 2.1.2 *La catégorie $\mathcal{C}$ est dite **monoïdale** si elle est munie*

- *d'un foncteur $\mathcal{F} : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ tel que le diagramme de foncteurs suivant commute*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}\times\mathcal{C}\times\mathcal{C} \arrow[r, "\mathcal{F}\times I"] \arrow[d, "I\times\mathcal{F}"] & \mathcal{C}\times\mathcal{C} \arrow[d, "\mathcal{F}"] \\ \mathcal{C}\times\mathcal{C} \arrow[r, "\mathcal{F}"] & \mathcal{C} \end{tikzcd}$$

  à isomorphisme naturel près c'est à dire si pour tout triplet (A, B, C) d'objets $\mathcal{C}$ il existe un isomorphisme $\alpha_{(A,B,C)} : \mathcal{F}(\mathcal{F}(A, B), C) \to \mathcal{F}(A, \mathcal{F}(B, C))$ tel que pour tout morphisme (f, g, h) de (A, B, C) dans un autre triplet d'objets (U, V, W), le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(\mathcal{F}(A,B),C) \arrow[r, "\alpha_{(A,B,C)}"] \arrow[d, "\mathcal{F}(\mathcal{F}(f,g),h)"'] & \mathcal{F}(A,\mathcal{F}(B,C)) \arrow[d, "\mathcal{F}(f,\mathcal{F}(g,h))"] \\ \mathcal{F}(\mathcal{F}(U,V),W) \arrow[r, "\alpha_{(U,V,W)}"] & \mathcal{F}(U,\mathcal{F}(V,W)) \end{tikzcd} \qquad (*)$$

On demande également la commutativité du diagramme suivant pour tout quadruplet (A, B, C, D) d'objets de $\mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & \mathcal{F}(A,\mathcal{F}(\mathcal{F}(B,C),D)) \arrow[dr, "\alpha_{(A,\mathcal{F}(B,C),D)}"] & \\ \mathcal{F}(A,\mathcal{F}(B,\mathcal{F}(C,D))) \arrow[ur, "\mathcal{F}(1_A,\alpha_{(B,C,D)})"] \arrow[d, "\alpha_{(A,B,\mathcal{F}(C,D))}"'] & & \mathcal{F}(\mathcal{F}(A,\mathcal{F}(B,C)),D) \arrow[d, "\mathcal{F}(\alpha_{(A,B,C)},1_D)"] \\ \mathcal{F}(\mathcal{F}(A,B),\mathcal{F}(C,D)) \arrow[rr, "\alpha_{(\mathcal{F}(A,B),C,D)}"'] & & \mathcal{F}(\mathcal{F}(\mathcal{F}(A,B),C),D) \end{tikzcd} \qquad (**)$$

– *d'un objet unité K dans $Ob(\mathcal{C})$ et d'un isomorphisme naturel β (resp. γ) entre $\mathcal{F}(K, -)$ (resp. $\mathcal{F}(-, K)$) et $Id_{\mathcal{C}}$ c'est à dire la donnée d'un isomorphisme $\beta_A : \mathcal{F}(K, A) \to A$ (resp. $\gamma_A : \mathcal{F}(A, K) \to A$) pour tout objet de $\mathcal{C}$ tel que pour tout morphisme $f : A \to B$ entre deux objets de $\mathcal{C}$, les diagrammes suivants commutent :*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\beta_A^{-1}"] \arrow[d, "f"] & \mathcal{F}(K,A) \arrow[d, "\mathcal{F}(1_K,f)"] \\ B \arrow[r, "\beta_B^{-1}"] & \mathcal{F}(K,B) \end{tikzcd} \quad \textit{et} \quad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "\gamma_A^{-1}"] \arrow[d, "f"] & \mathcal{F}(A,K) \arrow[d, "\mathcal{F}(f,1_K)"] \\ B \arrow[r, "\gamma_B^{-1}"] & \mathcal{F}(B,K) \end{tikzcd}$$

Les isomorphismes β et γ doivent également vérifier les relations de compatibilité correspondant à la commutation du diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F}(A,\mathcal{F}(K,B)) \arrow[r, "\alpha_{(A,K,B)}"] \arrow[d, "\mathcal{F}(1_A,\beta_B)"'] & \mathcal{F}(\mathcal{F}(A,K),B) \arrow[d, "\mathcal{F}(\gamma_A,1_B)"] \\ \mathcal{F}(A,B) \arrow[r, equal] & \mathcal{F}(A,B) \end{tikzcd}$$

et à l'égalité

$$\beta_K = \gamma_K : \mathcal{F}(K, K) \to K$$

Lorsque α, β et γ sont des identités, la catégorie est appelée ***monoïdale stricte****. Dans ce cas, les objets $\mathcal{F}(\mathcal{F}(A, B), C)$ et $\mathcal{F}(A, \mathcal{F}(B, C))$ pour tout triplet (A, B, C) d'objets de $\mathcal{C}$.*

Exemples 2.1.3

1. *La catégorie des ensembles pointés, munie du produit cartésien avec pour objet unité l'ensemble pointé à un élément.*
2. *La catégorie $\mathbb{K}$**-mod** munie du produit tensoriel sur $\mathbb{K}$ et ayant pour objet unité l'anneau $\mathbb{K}$:*

   Supposons que $\mathbb{K}$ est un corps pour simplifier les choses. Rappelons la définition du produit tensoriel de deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels A et B. Commençons par former $L(A, B)$, le $\mathbb{K}$-espace vectoriel libre engendré par $A \times B$ (il a pour base la famille des couples (a, b) avec $a \in A$ et $b \in B$). Considérons maintenant $R(A, B)$, le sous-espace vectoriel de $L(A, B)$ engendré par les élements d'une des trois formes

– $(a, b + b') - (a, b) - (a, b')$ *avec* a *dans* A *,* b *et* b' *dans* B*,*
– $(a + a', b) - (a, b) - (a', b)$ *avec* a*,* a' *dans* A*, et* b *dans* B*,*
– $(ka, b) - (a, kb)$ *avec* a *dans* A*,* b *dans* B*, et* k *dans* $\mathbb{K}$
Le produit tensoriel de A *par* B *au dessus de* $\mathbb{K}$*, noté* $A \otimes_{\mathbb{K}} B$ *(ou* $A \otimes B$ *quand il n'y a pas d'ambiguïté), est l'espace vectoriel quotient*

$$A \otimes B := L(A, B)/_{R(A,B)}$$

Pour tout a *dans* A *et* b *dans* B*, la classe d'équivalence du couple* (a, b) *dans* $A \otimes B$ *sera notée* $a \otimes b$*. Il est facile de vérifier que si* $\{a_i\}_{i \in I}$ *est une base de* A *et* $\{b_j\}_{j \in J}$ *est une base de* B*, alors* $\{a_i \otimes b_j\}_{(i,j) \in I \times J}$ *est une base de* $A \otimes B$*. De plus,* $A \otimes B$ *peut être caractérisé, à isomorphisme près, par la proprieté universelle suivante :*

Proposition 2.1.4 *Pour tout* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel* C *et pour toute application bilinéaire* $f : A \times B \to C$*, il existe une application linéaire* $\bar{f} : A \otimes B \to C$ *qui factorise* f*, i.e telle que le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd}
A \otimes B \arrow[dr, "\bar{f}"] & \\
A \times B \arrow[u, "i"] \arrow[r, "f"'] & C
\end{tikzcd}$$

où $i : A \times B \to A \otimes B$ *est l'application bilinéaire canonique définie par* $i(a, b) := a \otimes b$ *pour tous* a *dans* A *et* b *dans* B*.*

Pour tous $\mathbb{K}$*-espaces vectoriels* A *,*B*, posons* $\mathcal{F}(A, B) := A \otimes B$*. Si* C *est un troisième espace vectoriel, l'application* $\alpha_{(A,B,C)} : A \otimes (B \otimes C) \to (A \otimes B) \otimes C$ *définie par*

$$\alpha_{(A,B,C)}(a \otimes (b \otimes c)) := (a \otimes b) \otimes c \quad \forall (a, b, c) \in A \times B \times C$$

est clairement un isomorphisme naturel vérifiant les conditions $(*)$ *et* $(**)$ *de la définition précédente. Remarquons que* $\mathbb{K}$ *est un bon candidat au rôle d'objet unité : les isomorphismes* β_A *et* γ_A *définis par*

$$\beta_A(k \otimes a) := ka =: \gamma(a \otimes k) \quad \forall (k, a) \in \mathbb{K} \times A$$

vérifient bien les conditions demandées dans le deuxième point de la définition. Ainsi, $\mathbb{K}$***vect*** *munie de* $\mathbb{F} := \otimes$ *et des isomorphismes naturels* α*,* β *et* γ *ainsi définis est une catégorie monoïdale.*

2.2 Catégories monoïdales symmétriques

Dans ce paragraphe, la catégorie $\mathcal{C}$ est supposée monoïdale, le foncteur $\mathcal{F} : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ sera noté $\Box : (A, B) \mapsto A \Box B$. K désignera l'objet unité de $\mathcal{C}$. On conservera les notation de la définition 2.1.2 en ce qui concerne les isomorphismes α, β et γ. L'objectif de ce paragraphe est de définir les notions d'objet de type algèbre de Hopf dans une catégorie monoïdale symmétrique.

Définition 2.2.1 *La catégorie monoïdale $\mathcal{C}$ est dite* ***tressée*** *lorsqu'elle est munie d'un isomorphisme naturel $\tau : \mathcal{F} \to \mathcal{F} \circ t$, où $t : \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ est le foncteur défini par $t(A,B) := (B,A)$ pour toute paire (A,B) d'objets de $\mathcal{C}$. Un tel τ est la donnée, pour chaque paire (A,B) d'objets de $\mathcal{C}$, d'un ismorphisme $\tau_{(A,B)} : A\Box B \to B\Box A$ tel que pour toute autre paire d'objets (C,D) et pour tout morphisme $(f,g) : (A,B) \to (C,D)$, le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd}
A\Box B \arrow[r, "\tau_{(A,B)}"] \arrow[d, "f\Box g"] & B\Box A \arrow[d, "g\Box f"] \\
C\Box D \arrow[r, "\tau_{(C,D)}"'] & D\Box C
\end{tikzcd}$$

L'isomorphisme τ doit vérifier des conditions de compatibilité avec la structure monoïdale existante, qui reviennent à demander que les trois diagrammes suivants commutent pour tout triplet (A,B,C) d'objets de $\mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd}
A\Box K \arrow[r, "\tau_{(A,K)}"] \arrow[d, "\gamma_A"'] & K\Box A \arrow[d, "\beta_A"] \\
A \arrow[r, equal] & A
\end{tikzcd}$$

et

$$\begin{tikzcd}
(A\Box B)\Box C \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\alpha^{-1}"] & C\Box(A\Box B) \arrow[d, "\alpha"] \\
A\Box(B\Box C) \arrow[d, "1_A\Box\tau"] & (C\Box A)\Box B \arrow[d, "\tau\Box 1_B"] \\
A\Box(C\Box B) \arrow[r, "\alpha"] & (A\Box C)\Box B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A\Box(B\Box C) \arrow[r, "\tau"] \arrow[d, "\alpha"] & (B\Box C)\Box A \arrow[d, "\alpha^{-1}"] \\
(A\Box B)\Box C \arrow[d, "\tau\Box 1_C"] & B\Box(C\Box A) \arrow[d, "1_B\Box\tau"] \\
(B\Box A)\Box C \arrow[r, "\alpha^{-1}"] & B\Box(A\Box C)
\end{tikzcd}$$

La catégorie monoïdale tressée $\mathcal{C}$ est dite ***symétrique*** *lorsque $\tau^{-1}_{(A,B)} = \tau_{(B,A)} : B\Box A \to A\Box B$ pour toute paire (A,B) d'objets de $\mathcal{C}$.*

Définition 2.2.2 *Un objet A de $\mathcal{C}$ est dit* ***de type algèbre associative*** *(ou plus simplement est une* ***algèbre associative****) dans $\mathcal{C}$ si il est muni de deux morphismes $\mu : A\Box A \to A$ et $\eta : K \to A$ tels que les diagrammes suivants commutent :*

$$\begin{tikzcd}
& (A\Box A)\Box A \arrow[dr, "\mu\Box 1_A"] & \\
A\Box(A\Box A) \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[d, "1_A\Box\mu"'] & & A\Box A \arrow[d, "\mu"] \\
A\Box A \arrow[rr, "\mu"] & & A
\end{tikzcd}$$

et

$$\begin{tikzcd}
K\Box A \arrow[r, "\eta\Box 1_A"] \arrow[dr, "\beta"'] & A\Box A \arrow[d, "\mu"] & A\Box K \arrow[l, "1_A\Box\eta"'] \arrow[dl, "\gamma"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

Un objet C de $\mathcal{C}$ est dit ***de type cogèbre coassociative*** *(ou plus simplement est une* ***cogèbre****) dans $\mathcal{C}$ si il est muni de deux morphismes $\delta : C \to C\Box C$ et $\varepsilon : C \to K$ tels que les diagrammes suivants commutent :*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "\delta"] & C\Box C \arrow[r, "1_C\Box\delta"] & C\Box(C\Box C) \arrow[d, "\alpha"] \\ C\Box C \arrow[rr, "\delta\Box 1_C"'] & & (C\Box C)\Box C \end{tikzcd}$$

et

$$\begin{tikzcd} K\Box C & C\Box C \arrow[l, "\varepsilon\Box 1_C"'] \arrow[r, "1_C\Box\varepsilon"] & C\Box K \\ & C \arrow[ul, "\beta^{-1}"] \arrow[u, "\delta"] \arrow[ur, "\gamma^{-1}"'] & \end{tikzcd}$$

Maintenant, $\mathcal{C}$ est supposée munie d'un tressage τ qui en fait une catégorie monoïdale symmétrique.

Définition 2.2.3 *Une* ***algèbre de Hopf*** *dans $\mathcal{C}$ est un objet H de $\mathcal{C}$ muni de cinq morphismes $\mu : H\Box H \to H$, $\eta : K \to H$, $\delta : H \to H\Box H$, $\varepsilon : H \to K$ et $\lambda : H \to H$ tels que (H, μ, η) est une algèbre associative, (H, δ, ε) est une cogèbre coassociative, $\lambda^2 = 1_C$, et les deux diagrammes suivants sont commutatifs :*

$$\begin{tikzcd} C\Box C \arrow[r, "\delta\Box\delta"] \arrow[d, "\mu"] & (C\Box C)\Box(C\Box C) \arrow[r, "\alpha"] & C\Box((C\Box C)\Box C) \arrow[r, "1_C\Box(\tau\Box 1_C)"] & C\Box((C\Box C)\Box C) \arrow[r, "\alpha^{-1}"] & (C\Box C)\Box(C\Box C) \arrow[d, "\mu\Box\mu"] \\ C \arrow[rrrr, "\delta"'] & & & & C\Box C \end{tikzcd}$$

et

$$\begin{tikzcd} C\times C \arrow[r, "\lambda\Box\lambda"] \arrow[d, "\mu"] & C\Box C \arrow[r, "\tau"] & C\Box C \arrow[d, "\mu"] \\ C \arrow[rr, "\lambda"] & & C \end{tikzcd}$$

Références

[God58] R. Godement. *Topologie algébrique et théorie des faisceaux.* Hermann Paris, 1958.

[ML98] S. Mac Lane. *Categories for the working mathematician.* Springer verlag, 1998.

[Par70] B. Pareigis. *Categories and functors.* Academic Press, 1970.