Excision en homologie de Hochschild

Notes d'exposé du groupe de travail
Topologie Algébrique

(Nantes)

Salim RIVIERE

Février 2012

On se donne un anneau de base $\mathbb{K}$, commutatif et unitaire
$\mathbb{K} - \mathcal{A}lg :=$ catégorie des $\mathbb{K}$-algèbres (non nécéssairement unitaires)
$\mathbb{K} - u\mathcal{A}lg :=$ catégorie des $\mathbb{K}$-algèbres unitaires
$\mathbb{K} - \mathcal{M}od_* :=$ catégorie des $\mathbb{K}$-modules gradués

1 Le problème d'excision

L'homologie de Hochschild est un foncteur

$$\begin{array}{rcl} HH_* : \mathbb{K} - \mathcal{A}lg & \to & \mathbb{K} - \mathcal{M}od_* \\ I & \mapsto & HH_*(I) \end{array}$$

Étant donnés une $\mathbb{K}$-algèbre A et un idéal bilatère I de A, il est possible de définir les $\mathbb{K}$-modules gradués **d'homologie de Hochschild relatifs** $HH_*(A, I)$ qui s'insèrent dans une suite exacte longue

$$\cdots \to HH_n(A, I) \to HH_n(A) \to HH_n(A/I) \to HH_{n-1}(A, I) \to \cdots$$

Afin de décrire le problème d'excision, rappelons les définitions de $HH_*(I)$ et $HH_*(A, I)$.
Le foncteur HH_* est obtenu en prolongeant le foncteur HH_* bien connu sur les algèbres unitaires :

Définition 1.0.1. *L'homologie de Hochschild d'une algèbre* ***unitaire*** *A est donnée par*

$$HH_*^u(A) := H_*(CH_*(A), d^H)$$

où

$$CH_n(A; M) := M \otimes A^{\otimes n}$$

et

$$d^H(m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n) := ma_1 \otimes a_2 \otimes \cdots a_n + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+} \otimes \cdots \otimes a_n + (-1)^n a_n m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1}$$

L'homologie de Hochschild d'une algèbre ***non unitaire*** *I est donnée par*

$$HH_*(I) := \operatorname{coker}\big(HH_*^u(\mathbb{K}) \to HH_*^u(I_+)\big)$$

où I_+ est l'algèbre unitaire dont le $\mathbb{K}$-module sous-jacent est $\mathbb{K} \oplus I$ et la multiplication est donnée par

$$(k, i)(k', i') := (kk', ki' + k'i + ii')$$

Remarque 1.0.2. *Le complexe de Hochschild $CH_*(I)$ est bien défini même quand I n'est pas unitaire. Il permet donc de définir une théorie d'homologie naïve de source $\mathbb{K} - u\mathcal{A}lg$ notée HH_*^{naive}.*

Lorsque l'algèbre I est unitaire d'unité 1_I, l'application

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{K} \times I & \to & I_+ \\ (k,i) & \mapsto & (k, k\,1_I + i) \end{array}$$

est un isomorphisme d'algèbres unitaires. Comme l'homologie de Hochschild unitaire commute au produits

$$HH_*(I) = \operatorname{coker}\big(HH_*^u(\mathbb{K}) \to HH_*^u(\mathbb{K}) \oplus HH_*^u(I)\big) \cong HH_*^u(I)$$

On voit que HH_* est bien un prolongement de HH_*^u i.e.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K} - u\mathcal{A}lg \arrow[r, "HH_*^u"] \arrow[d] & \mathbb{K} - \mathcal{M}od_* \\ \mathbb{K} - \mathcal{A}lg \arrow[ur, "HH_*"'] & \end{tikzcd}$$

commute.

Afin de définir l'homologie de Hochschild relative d'une paire (A, I), il est utile de faire apparaître celle-ci comme provenant d'un complexe de chaînes :

Proposition 1.0.3. *Soit I une $\mathbb{K}$-algèbre (non nécessairement unitaire). L'homologie de Hochschild de I est isomorphe à l'homologie du complexe normalisé réduit $C_*^{red}(I_+)$ défini par*

$$C_*^{red}(I) := \operatorname{coker}((\mathbb{K}, 0) \to (I_+ \otimes I^{\otimes *}, d^H))$$

*où $\mathbb{K}$ est vu comme complexe concentré en degré 0 et $(I_+ \otimes I^{\otimes *}, d^H)$ est le complexe de Hochschild **normalisé** de I_+.*

Démonstration. Il suffit de vérifier que l'homologie de $C_*^{red}(I_+)$ coïncide avec $HH_*(I)$ en degrés 0 et 1. □

Définition 1.0.4. *Soit I un idéal bilatère d'une $\mathbb{K}$-algèbre A (non nécéssairement unitaire). L'homologie de Hochschild **relative** de la paire (A, I) est donnée par*

$$HH_*(A, I) := H_*(\ker\big(C_*^{red}(A_+) \to C_*^{red}((A/I)_+)\big))$$

Elle s'insère donc dans une suite exacte longue

$$\cdots \to HH_n(A, I) \to HH_n(A) \to HH_n(A/I) \to HH_{n-1}(A, I) \to \cdots$$

Définition 1.0.5. *Une $\mathbb{K}$-algèbre I est dite **excisive** en homologie de Hochschild lorsque le morphisme canonique*

$$HH_*(I) \to HH_*(A, I)$$

est un isomorphisme pour toute algèbre (non nécessairement unitaire) A contenant I comme idéal bilatère et telle que la projection $A \to A/I$ soit scindée.

2 Le théorème de Wodzicki

Définition 2.0.6.

– *Le **complexe bar** d'une algèbre I est le $\mathbb{K}$-module gradué $C_*^{bar}(I)$ défini par*

$$C_n^{bar}(I) := I^{\otimes n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

muni de la différentielle d^{bar} définie par

$$d^{bar}(x_0 \otimes \cdots \otimes x_n) := \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i x_0 \otimes \cdots \otimes x_i x_{i+1} \otimes x_{i+2} \otimes \cdots \otimes x_n$$

pour tous x_0, ..., x_n dans I. Son homologie est notée $H_*^{bar}(I)$.

– *Une algèbre I est dite H-**unitaire** lorsque pour tout $\mathbb{K}$-module V, le complexe bar $C_*^{bar}(I;V) := (V \otimes C_*^{bar}(I), \mathrm{Id}_V \otimes d^{bar})$ est exact.*

Le but de cet exposé est de démontrer une implication théorème suivant, qui donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une algèbre soit excisive en homologie de Hochschild et en homologie cyclique :

Théorème 2.0.7. [Wodzicki, [Wod89], voir aussi [Lod97]] *Soit I une $\mathbb{K}$-algèbre non nécessairement unitaire. Les conditions suivantes sont équivalentes*

i) I est excisive en homologie de Hochschild,

ii) I est H-unitaire,

iii) I est excisive en homologie cyclique.

Avant de démontrer que *ii*) implique *i*), rappelons les définitions des homologies relatives naïves et bar associées à une paire :

Définition 2.0.8. *Soit A une $\mathbb{K}$-algèbre non nécessairement unitaire et I un idéal bilatère de A.*

– *L'homologie de Hochschild naïve relative $HH_*^{naive}(A,I)$ est l'homologie du complexe*

$$CH_*(A,I) := \ker\big(CH_*(A) \to CH_*(A/I)\big)$$

– *L'homologie bar relative $H_*^{bar}(A,I)$ est l'homologie du complexe*

$$C_*^{bar}(A,I) := \ker\big(C_*^{bar}(A) \to C_*^{bar}(A/I)\big)$$

De même que précédemment, ces deux homologies s'insèrent chacune dans une suite exacte longue d'homologie bar et d'homologie naïve. Il existe également des morphismes canoniques

$$HH_*^{naive}(I) \to HH_*^{naive}(A,I)$$

et

$$H_*^{bar}(I) \to H_*^{bar}(A,I)$$

et I sera dite excisive en homologie naïve/bar lorsque le morphisme canonique correspondant est bijectif pour toute algèbre A contenant I comme idéal bilatère telle que la projection $A \to A/I$ est $\mathbb{K}$-scindée.

Nous aurons besoin de deux lemmes concernant l'excision en homologies bar et de Hochschild naïve.

Lemme 2.0.9. *Soit I une $\mathbb{K}$-algèbre H-unitaire. Alors I est excisive en homologie bar*

Démonstration. Considérons une algèbre A telle que $A \to A/I$ est $\mathbb{K}$-scindée. Il s'agit de montrer que $H_*^{bar}(A,I)$ est nulle. Introduisons la filtration $(F_pC_*^{bar}(A,I))_{p\geqslant 0}$ de $C_*^{bar}(A,I)$ définie par

$$\begin{aligned} F_pC_*^{bar}(A,I)_n :=& \mathbb{K} - \text{submod} < a_0 \otimes \cdots \otimes a_n \ / \text{ au moins } n-p \ a_i \text{ sont dans } I > \\ =& C_n^{bar}(A,I) \cap \sum_{\substack{n_0+\cdots+n_{l+1}=p \\ l\geqslant 1 \\ q_1+\cdots+q_l=n-p}} A^{\otimes n_1} \otimes I^{\otimes q_1} \otimes A^{\otimes n_2} \otimes I^{\otimes q_2} \otimes \cdots \otimes A^{\otimes n_l} \otimes I^{\otimes q_l} \otimes A^{\otimes n_{l+1}} \end{aligned}$$

où la somme parcourt tous les $l+1$-uplets d'entiers de somme p tels que $n_1 \geqslant 0$, $n_{l+1} \geqslant 0$, et les autres n_i sont strictement positifs (ces $l+1$-uplets correspondent aux choix possibles des éléments qui sont dans $I \subset A$) et tous les l-uplets .

Cette filtration donne lieu à une suite spectrale dont la première page est

$$E_{p\,q}^0 = F_pC_*^{bar}(A,I)_{p+q} \ / \ F_{p-1}C_*^{bar}(A,I)_{p+q}$$

Comme $A \to A/I$ est $\mathbb{K}$-scindée, A se décompose comme $\mathbb{K}$-module sous la forme $A \cong A \oplus A/I$. Soit $\underline{\mathrm{n}} = (n_1, \cdots, n_{l+1})$ un $l+1$-uplet tel que précédemment. Notons $Y_*(\underline{\mathrm{n}})$ le complexe

$$Y_*(\underline{\mathrm{n}}) := (A/I)^{\otimes p}[n_{l+1}-p] \otimes C_*^{bar}(I)[n_1] \otimes \cdots \otimes C_*^{bar}(I)[n_l]$$

On dispose d'un isomorphisme (au moins en degré $* \geqslant 1$) canonique de $\mathbb{K}$-modules gradués

$$\phi : E_{p\,*}^0 \cong \bigoplus_{\underline{\mathrm{n}}} Y_*(\underline{\mathrm{n}})$$

qui envoie la classe $[X]$ de

$$X := a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n_1} \otimes i_1 \otimes \cdots \otimes i_{q_1} \otimes a_{n_1+1} \otimes \cdots \otimes a_{n_1+n_2} \otimes \cdots \otimes \cdots \otimes i_{q_1+q_2+\cdots+q_{l-1}+1} \otimes \cdots \otimes i_{q_l} \otimes a_{n_l+1} \otimes \cdots a_{n_{l+1}}$$

modulo $F_{p-1}C_*^{bar}(A,I)_{p+q_1+\cdots+q_l}$ sur

$$(\bar{a_1} \otimes \cdots \otimes \bar{a_p}) \otimes (i_1 \otimes \cdots \otimes i_{q_1}) \otimes \cdots \otimes (i_{q_1+q_2+\cdots+q_{l-1}+1} \otimes \cdots \otimes i_{q_l}) \in Y_*(n_1, \cdots, n_{l+1})$$

où $\bar{a_j}$ désigne la classe de a_j modulo I. L'isomorphisme réciproque ϕ^{-1} est construit grâce à la section $A/I \to A$ de $A \to A/I$. Montrons que ϕ commute aux différentielles : Dans $d^{bar}(X)$, tous les termes qui impliquent le produit d'un a_j par un a_{j+1} donnent un tenseur de longueur $p+q_1+\cdots+q_l-1$ contenant $q_1+\cdots+q_l$ facteurs dans I donc sont nuls modulo $F_{p-1}C_*^{bar}(A,I)_{p+q_1+\cdots+q_l-1}$. Il en est de même pour les termes impliquant le produit d'un a_j par un i_s. Ainsi, l'image par ϕ de la classe de $d^{bar}(X)$ est la somme de tous les termes de la forme

$$\pm(\bar{a_1} \otimes \cdots \otimes \bar{a_p}) \otimes (i_1 \otimes \cdots \otimes i_s i_{s+1} \otimes i_{q_1}) \otimes \cdots \otimes (i_{q_1+q_2+\cdots+q_{l-1}+1} \otimes \cdots \otimes i_{q_l}) \in Y_*(n_1, \cdots, n_{l+1})$$

où s prend toutes les valeurs possibles entre 1 et $q_1 - 1$, entre $q_1 + 1$ et $q_1 + q_2 - 1$ etc ... C'est exactement l'image de $\phi([X])$ par la différentielle de $Y(n_1, \cdots, n_{l+1})$.

ϕ est donc un isomorphisme de complexes de chaînes (au moins en degré strictement positif). Or, I est H-unitaire donc chaque $Y_*(\underline{n})$ est acyclique ce qui prouve que $E^1_{pq} = 0$ (au moins en degré $q > 0$) et donc que l'aboutissement de la suite spectrale est nul, i.e. $H_*^{bar}(A,I) = 0$. □

Le même type d'arguments permet de démontrer l'analogue du lemme 2.0.9 pour l'homologie naïve :

Lemme 2.0.10. *Si I est H-unitaire, alors I est excisive pour l'homologie de Hochschild naïve.*

Démonstration. Admise. □

La proposition suivante permet de réinterpréter l'homologie de Hochschild en terme de complexe total associé au bicomplexe cyclique tronqué en la liant aux homologies bar et naïve :

Proposition 2.0.11. *Soit I une $\mathbb{K}$-algèbre non nécessairement unitaire. Le complexe réduit $C^{red}(I_+)$ s'identifie au complexe total du bicomplexe cyclique tronqué $CC^{\{2\}}_{**}(I)$ suivant*

$$CC^{\{2\}}_{**}(I) := \begin{array}{ccc} \vdots & & \vdots \\ \downarrow & & \downarrow \\ I^{\otimes 3} & \xleftarrow[\mathrm{Id}-t]{} & I^{\otimes 3} \\ \downarrow{\scriptstyle d^H} & & \downarrow{\scriptstyle d^{bar}} \\ I^{\otimes 2} & \xleftarrow[\mathrm{Id}-t]{} & I^{\otimes 2} \\ \downarrow{\scriptstyle d^H} & & \downarrow{\scriptstyle d^{bar}} \\ I & \xleftarrow[\mathrm{Id}-t]{} & I \end{array}$$

où t est l'opérateur cyclique qui envoie $i_1 \otimes \cdots i_n$ sur $(-1)^{n-1} i_n \otimes i_1 \otimes \cdots i_{n-1}$

Démonstration. Pour $n > 0$, décomposons $C_n^{red}(I_+)$ en utilisant l'isomorphisme de $\mathbb{K}$-modules $I_+ \cong I \oplus \mathbb{K}$:

$$C_n^{red}(I_+) := I_+ \otimes I^{\otimes n} = I^{\otimes n+1} \oplus I^{\otimes n}$$

où le terme $I^{\otimes n}$ est à comprendre comme $\mathbb{K} \otimes I^{\otimes n}$. Si l'on suit l'image par la différentielle (normalisée) d^H d'un tenseur $(1 i_0) \otimes i_1 \otimes \cdots \otimes i_n$ dans cette décomposition, il vient (1 est l'unité de $\mathbb{K}$) :

$$\begin{aligned} d^H((i_0+1) \otimes i_1 \otimes \cdots \otimes i_n) =& d^H(i_0 \otimes \cdots \otimes i_n) + i_1 \otimes i_2 \otimes \cdots \otimes i_n \\ & - \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k+1} 1 \otimes i_1 \otimes \cdots \otimes i_k i_{k+1} \otimes \cdots \otimes i_n + (-1)^n i_n \otimes i_1 \otimes \cdots \otimes i_{n-1} \\ =& d^H(i_0 \otimes \cdots \otimes i_n) - 1 \otimes d^{bar}(i_1 \otimes \cdots \otimes i_n) + 1 \otimes (\mathrm{Id} - t)(i_1 \otimes \cdots \otimes i_n) \end{aligned}$$

Ainsi, la matrice de d^H relativement à la décomposition est

$$\begin{pmatrix} d^H & (1-t) \\ 0 & -d^{bar} \end{pmatrix}$$

Le complexe réduit $C_*^{red}(I)$ apparaît donc comme complexe total du bicomplexe $CC_{**}^{\{2\}}(I)$. $\square$

Remarque 2.0.12. *La première colonne de* $CC_{**}^{\{2\}}(I)$ *est* $CH_*(I)$ *et la seconde est* $C_*^{bar}(I)$*, ce qui donne lieu à une suite exacte courte de complexes*

$$0 \to CH_*(I) \to \mathrm{Tot}_* CC_{**}^{\{2\}}(I) \to C_*^{bar}(I)[-1] \to 0$$

induisant une suite exacte longue en homologie

$$\cdots \to HH_n^{naive}(I) \to HH_n(I) \to H_{n-1}^{bar}(I) \to HH_{n-1}^{naive}(I) \to \cdots \tag{1}$$

Démonstration du théorème 2.0.7. Nous ne montrons que l'implication $ii) \Rightarrow i)$.

Soit I une $\mathbb{K}$-algèbre (non nécessairement unitaire) et A une algèbre contenant I comme idéal bilatère, telle que $A \to A/I$ soit scindée. Commençons par établir l'analogue relatif de la suite exacte longue (1). La proposition 2.0.11 montre que le sous-bicomplexe

$$CC_{**}^{\{2\}}(A, I) := \ker(CC_{**}^{\{2\}}(A) \to CC_{**}^{\{2\}}(A/I))$$

a pour homologie totale $HH_*(A, I)$ et s'insère dans le diagramme commutatif à lignes et colonnes exactes

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & CH_*(A,I) \arrow[r] & CH_*(A) \arrow[r] \arrow[d] & CH_*(A/I) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Tot}_* CC_{**}^{\{2\}}(A,I) \arrow[r] & \mathrm{Tot}_* CC_{**}^{\{2\}}(A) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Tot}_* CC_{**}^{\{2\}}(A/I) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & C_*^{bar}(A,I) \arrow[r] & C_*^{bar}(A) \arrow[r] \arrow[d] & C_*^{bar}(A/I) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

dont on déduit (lemme des cinq pour les suites exactes courtes) la suite exacte courte relative recherchée

$$0 \to CH_*(A, I) \to C_*^{red}(A, I) \to C_*^{bar}(A, I) \to 0$$

Nous disposons donc d'un morphisme de suites exactes courtes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & CH_*(I) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Tot}_* CC_{**}^{\{2\}}(I) \arrow[r] \arrow[d] & C_*^{bar}(I) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & CH_*(A,I) \arrow[r] & \mathrm{Tot}_* CC_{**}^{\{2\}}(A,I) \arrow[r] & C_*^{bar}(A,I) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

induisant un morphisme de suite exactes longues

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & HH_n^{naive}(I) \arrow[r] \arrow[d] & HH_n(I) \arrow[r] \arrow[d] & H_{n-1}^{bar}(I) \arrow[r] \arrow[d] & HH_{n-1}^{naive}(I) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & HH_n^{naive}(A,I) \arrow[r] & HH_n(A,I) \arrow[r] & H_{n-1}^{bar}(A,I) \arrow[r] & HH_{n-1}^{naive}(A,I) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Si I est H-unitaire, les lemmes 2.0.9 et 2.0.10 impliquent que $HH_*(I) \cong HH_*(A, I)$. $\square$

Remarque 2.0.13. *L'excisivité en l'homologie cyclique d'une algèbre H-unitaire I, c'est à dire ii) $\Rightarrow$ iii) dans le théorème 2.0.7, se déduit de ii) $\Rightarrow$ i) via la suite exacte longue de Connes*

$$\cdots \to HH_n(I) \to HC_n(I) \to HC_{n-2}(I) \to HH_{n-1}(I) \to \cdots$$

et sa version relative.

3 Un résultat sur l'homologie des algèbres de matrices

Définition 3.0.14. *Soit A une $\mathbb{K}$-algèbre. Un A-module à gauche M est dit H-**unitaire** lorsque A-est H-unitaire et lorsque pour tout $\mathbb{K}$-module V, le complexe bar tordu $(C_*^{bar}(A, M; V), d^{bar} \otimes \mathrm{Id}_V)$ défini par*

$$C_n^{bar}(A, M; V) := \otimes A^{\otimes n-1} \otimes M \otimes V$$

et

$$d^{bar}(m \otimes a_1 \otimes a_{n-1}) := (-1)^n a_1 \otimes a_2 \otimes \cdots \otimes a_{n-1} m + \sum_{j=1}^{n-2} (-1)^{j+1} a_1 \otimes \cdots \otimes a_j a_{j+1} \otimes \cdots \otimes a_{n-1} \otimes m$$

est exact.

Il est bien sûr possible de définir de manière analogue la notion de H-unitarité pour un module à droite. Les modules H-unitaires se comportent bien lors de la prise d'extension :

Lemme 3.0.15. *Si A est une algèbre H-unitaire et M est un A-bimodule H-unitaire à gauche ou à droite. Alors le produit semi-direct $A \ltimes M$, dont $\mathbb{K}$-module sous-jacent est $A \oplus M$ et le produit est donné par*

$$(a, m)(a', m') := (aa', am' + ma')$$

est une algèbre H-unitaire.

Démonstration. Soit V un $\mathbb{K}$-module et supposons que M est H-unitaire comme A-module à gauche. Il s'agit de démontrer que le complexe bar $C_*^{bar}(A \ltimes M; V)$ est exact. L'argument allant être détaillé dans la démonstration de 3.0.16, nous ne détaillons pas les identifications : le complexe $C_*^{bar}(A \ltimes M; V)$ se décompose en

$$C_*^{bar}(A \ltimes M; V) \cong \bigoplus_{l \geqslant 0} B_*(l)$$

où $B_*(l)$ est engendré par les tenseurs ayant exactement l composantes dans M (et les autres dans A). $B_*(l)$ peut-être muni d'une filtration $(F_p B_*(l))_p$ en déclarant que $F_p B_*(l)$ est engendré par les tenseurs de $B_*(l)$ dont les l composantes appartenant à M se situent dans les $l + p$ dernières positions possibles. La page $E^0(l)$ de la suite spectrale associée est donnée par

$$E^0_{p\,*}(l) \cong C_*^{bar}(A, M; \mathbb{K}) \otimes B_{p+l-1}(l-1)[l-1]$$

ce qui montre que chacune de ses lignes est exacte et, par conséquent, que l'aboutissement de la suite spectrale est nul. $\square$

Le résutat suivant, dû à Wodzicki, sera utile dans l'étude de l'excision en K-théorie algébrique :

Théorème 3.0.16. [Wodzicki, [Wod89]] *Soient A et B deux algèbres, M un A-B-bimodule, et notons T l'algèbre des matrices triangulaires de la forme*

$$\begin{pmatrix} a & m \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

avec a dans A, b dans B et m dans M.

i) Si M est H-unitaire comme A-module à gauche ou comme B-module à droite, alors le morphsime canonique scindé $T \to A \oplus B$ induit des isomorphismes

$$HH_*(T) \cong HH_*(A) \oplus HH_*(B)$$

et

$$HC_*(T) \cong HC_*(A) \oplus HC_*(B)$$

ii) Si de plus A et B sont H-unitaires, alors T est H-unitaire.

Démonstration. Montrons le point $i)$ pour l'homologie de Hochschild dans le cas où M est H-unitaire comme A-module à gauche. La projection (scindée comme morphisme d'algèbres) $T \to B$ a pour noyau l'idéal R de T constitué des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} a & m \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec a dans A, et m dans M. Ainsi, la suite exacte courte scindée d'algèbres

$$0 \to R \to T \to B \to 0$$

induit une suite exacte longue en homologie de Hochschild

$$\cdots \to HH_n(T,R) \to HH_n(T) \to HH_n(B) \to HH_{n-1}(T,R) \to \cdots$$

dont les connectants sont nuls, et donc une suite exacte courte scindée de $\mathbb{K}$-modules gradués

$$0 \to HH_*(T,R) \to HH_*(T) \to HH_*(B) \to 0$$

Il est clair que R s'identifie au produit semi-direct $A \ltimes M$ (où la structure de A-module à droite sur M est triviale i.e. $ma = 0$) qui est H-unitaire par le lemme 3.0.15. donc par le théorème 2.0.7 $HH_*(R,T) \cong HH_*(R)$, ce qui montre que $HH_*(T)$ se décompose sous la forme

$$HH_*(T) \cong HH_*(R) \oplus HH_*(B)$$

Montrons que l'inclusion canonique de A dans $R \cong A \ltimes M$ induit un isomorphisme en homologie de Hochschild. Les deux algèbres étant H-unitaires, leur homologie de Hochschild est égale à leur homologie de Hochschild naïve et peut donc se calculer à l'aide du complexe usuel $CH_*(-)$. Le complexe de Hochschild de R se décompose en la somme directe

$$CH_*(R) \cong CH_*(A) \oplus \bigoplus_{l=1}^{\infty} C_*(l)$$

où chaque $C_*(l)$ est le sous-complexe de $CH_*(R)$ engendré en degré n par les tenseurs de la forme $r_0 \otimes r_1 \otimes \cdots \otimes r_n$ tels qu'exactement l des r_j soient dans $M \subset A \ltimes M$ et les autres dans A. Comme l'inclusion canonique $A \to R$ correspond à l'inclusion dans le facteur $CH_*(A)$ de cette décomposition, il suffit de montrer que pour tout $l > 1$, $C_*(l)$ est exact.

Fixons un $l > 1$ et munissons $C_*(l)$ de la filtration $(F_pC_*(l))_{p \geqslant 0}$ définie par

$$F_pC_*(l)_{p+q} := \mathbb{K} - \text{submod} < r_0 \otimes \cdots \otimes r_{p+q} \;/\; r_j \in A, j \leqslant q-l >$$

Explication : $p = 0$ correspond aux tenseurs dont les l facteurs r_j qui sont dans M sont exactement les l derniers, $p = 1$ correspond à ceux où ces mêmes r_j apparaissent dans les $l+1$ dernières positions, etc... Clairement, $F_{n-l}C_*(l)_n = C_n(l)$ ce qui montre que la filtration est exhaustive.

La suite spectrale associée à cette filtration a pour 0-ième page $E^0_{*\,*}$ dont la p-ième ligne $E^0_{p\,*}$ se décompose sous la forme

$$E^0_{p,*} := F_pC_*(l)_{*+p}/F_{p-1}C_*(l)_{*+p} \overset{\psi}{\cong} C^{bar}_*(A, M; \mathbb{K}) \otimes T(p, l-1)[l-2]$$

où $T(i,j)$ est la composante homogène de bilongueur (i,j) dans $(A \oplus M)^{\otimes(i+j)}$ (i facteurs dans A et j dans M). L'isomorphisme ψ envoie la classe du tenseur

$$a_0 \otimes \cdots a_{q-l} \otimes r_{q-l+1} \otimes r_{q-l+2} \otimes \cdots \otimes r_{p+q}$$

dans $E^0_{p\,q}$ sur

$$(a_0 \otimes \cdots \otimes a_{q-l} \otimes \overline{r_{q-l+1}}) \otimes (r_{q-l+2}) \otimes \cdots \otimes r_{p+q}$$

où $\overline{(a,m)} = m$ désigne la classe de $(a,m) \in A \ltimes M \cong R$ modulo le sous-$\mathbb{K}$-module A.

Dans la différentielle de $E^0_{p\,*}$, les termes faisant intervenir un produit r_jr_{j+1} sont nuls car la position des l éléments de M se trouve dans le $p-1+l$ derniers facteurs. Le terme "cyclique" qui commence par $r_{p+q}a_0$ est nul car soit r_{p+q} est dans M et $r_{p+q}a_0 = 0$, soit il ne l'est pas ce qui signifie que les l éléments se trouvant dans M se trouvaient entre les positions $q-l+1$ et $p+q-1$ donc dans les $l+p-1$ derniers facteurs de ce terme cyclique.

Ceci démontre que l'isomorphisme ψ est bien un isomorphisme de complexes de chaînes. Or M est supposé H-unitaire comme A-module à gauche donc $C_*^{bar}(A, M; \mathbb{K}) \otimes T(p, l-1)[l-2] \cong C_*^{bar}(A, M; T(p, l-1))[l-2]$ est exact, ce qui montre que chaque ligne de la première page $E^0_{p\,*}$ est exacte. Ainsi, la première page $E^1_{*\,*}$ de la suite spectrale est nulle et par suite, l'aboutissement est également nul donc chaque $C_*(l)$ est exact.

Le cas de l'homologie cyclique se déduit de la suite exacte longue de Connes, puisque cette dernière est fonctorielle.

Le point *ii)* est admis. □

Donnons pour terminer quelques précisions sur l'utilisation du théorème précédent faite par A. Suslin et M. Wodzicki dans [SW92] afin de démontrer le théorème suivant :

Théorème 3.0.17. [Suslin Wodzicki, [SW92]] *Soit I une $\mathbb{Q}$-algèbre non nécessairement unitaire. Les conditions suivantes sont équivalentes*

i) I est excisive en K-théorie algébrique

ii) I est H-unitaire.

L'implication *ii)* $\Rightarrow$ *i)* est démontrée dans [Wod89]. C'est l'autre implication qui est étudiée dans [SW92]. Comme nous l'a expliqué Aurélien dans son second exposé, les auteurs commencent par reformuler la condition d'excisivité *i)* en termes d'homolgie de groupes : la $\mathbb{Q}$-algèbre I est excisive en K-théorie algébrique si et seulement si le morphisme d'inclusion

$$GL(I) \hookrightarrow \widetilde{GL}(I) \tag{2}$$

induit un isomorphime en homologie de groupes. Rappelons que la notation $\widetilde{GL}(I)$ désigne le produi semi-direct de $GL(I)$ par le module des matrices colonnes infinies presques nulles $M_{\infty\,1}(I)$.

Ensuite, la théorie de Malcev et les constructions de Volodin pour les groupes et les algèbres de Lie permettent de montrer que (2) induit un isomorphisme en homologie si et seulement si l'inclusion analogue pour les algèbres de Lie de matrices

$$gl(I) \to \widetilde{gl}(I) \tag{3}$$

induit un isomorphisme en homologie, avec $\widetilde{gl}(I) := gl(I) \ltimes M_{\infty\,1}$.

La dernière étape consiste à montrer que si I est H-unitaire, alors (3) induit bien un isomorphisme en homologie. Pour ce faire, les auteurs introduisent une $\mathbb{Q}$-algèbre intermédiaire I_1 formée des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec a et b dans I. Grâce au théorème 3.0.16 appliqué au cas où $B = 0$, $A = M = I$, I_1 est H-unitaire et a même homologie cyclique que I_1 (a priori, il suffit d'utiliser la proposition 3.0.15 pour en déduire que I_1 est H-unitaire). La version H-unitaire du théorème de Loday-Quillen-Tsygan démontrée par Hanlon dans [Han88] permet d'écrire

$$H_*(gl(I)) \cong \Lambda HC_*(I)[1] \cong \Lambda HC_*(I_1)[1] \cong H_*(gl(I_1))$$

L'isomorphisme entre les termes extrémaux est bien sûr induit par l'inclusion canonique $I \to I_1$ donnée par

$$a \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Or l'algèbre $gl(I_1)$ s'identifie au produit semi-direct $gl(I) \ltimes M(I)$, où $M(I) := \oplus_{j\geqslant 1} M_{\infty\,1}$ est la somme directe dénombrable de copies de $M_{\infty\,1}(I)$, et l'inclusion de $gl(I)$ dans $gl(I_1)$ s'écrit comme composée d'inclusions d'algèbres de Lie dont la seconde (inclusion dans le premier facteur) est scindée :

$$gl(I) \hookrightarrow \widetilde{gl}(I) \hookrightarrow gl(I_1)$$

D'où

$$H_*(gl(I)) \cong H_*(\widetilde{gl}(I))$$

Références

[Han88] Phil Hanlon. On the complete GL(n,c)-decomposition of the stable cohomology of gl(n,a). *Transactions of the American Mathematical Society*, pages 209–225, 1988.

[Lod97] Jean-Louis Loday. *Cyclic homology*, volume 301. Springer, 1997.

[SW92] Andrei A Suslin and Mariusz Wodzicki. Excision in algebraic k-theory. *Annals of mathematics*, pages 51–122, 1992.

[Wod89] Mariusz Wodzicki. Excision in cyclic homology and in rational algebraic k-theory. *Ann. of Math*, 129(591-640) :296, 1989.