Notes d'exposé

au séminaire de l'IRMA

(Strasbourg)

Salim RIVIERE

Septembre 2013

1 Introduction

Soient $(\mathfrak{g}, [,])$ une algèbre de Lie sur un anneau commutatif $\mathbb{K}$, $U\mathfrak{g} = TU\mathfrak{g}/_I$ son algèbre enveloppante, où $TU\mathfrak{g} = \bigoplus_{n\geqslant 0} U\mathfrak{g}^{\otimes k}$ désigne l'algèbre tensorielle sur $U\mathfrak{g}$ munie du produit de concaténation, et I est l'idéal bilatère engendré par les éléments de la forme

$$g \otimes h - h \otimes g - [g,h] \;/\; g, h \in \mathfrak{g}$$

Supposons donnés M un $U\mathfrak{g}$-bimodule et N est un g-module à droite (l'action de $\mathfrak{g}$ est alors notée par $\cdot$). Le produit de deux éléments x et y de $U\mathfrak{g}$ sera noté xy, tout comme l'action de $U\mathfrak{g}$ sur M.

Definition 1.0.1.

- *Le **complexe de Chevalley-Eilenberg** de $\mathfrak{g}$ à coefficients dans N est le $\mathbb{K}$-module $\mathbb{N}$-gradué $C_*(\mathfrak{g})$ défini en degré n par*
$$C_n(\mathfrak{g}; N) := N \otimes \Lambda^n \mathfrak{g}$$
muni de la différentielle $d^{CE} : C_*(\mathfrak{g}; N) \to C_{*-1}(\mathfrak{g}; N)$ définie en degré n par
$$\begin{aligned} d^{CE}(x \otimes g_1 \wedge \cdots \wedge g_n) := & \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i+1} x \cdot g_i \otimes g_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{g_i} \wedge \cdots \wedge g_n \\ & + \sum_{i<j} x \otimes g_1 \wedge \cdots \wedge [g_i, g_j] \wedge \cdots \wedge \widehat{g_j} \wedge \cdots \wedge g_n \end{aligned}$$
avec $x \in N$ et g_1, ..., g_n dans $\mathfrak{g}$.
- *Le **complexe de Hochschild** de $U\mathfrak{g}$ à coefficients dans M est le $\mathbb{K}$-module $\mathbb{N}$-gradué $CH_*(U\mathfrak{g}; M)$ défini en degré n par*
$$CH_n(U\mathfrak{g}; M) := M \otimes U\mathfrak{g}^{\otimes n}$$
muni de la différentielle $d^H : CH_*(U\mathfrak{g}; M) \to CH_{*-1}(U\mathfrak{g}; M)$ définie en degré n par
$$\begin{aligned} d^H(m \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) := & mx_1 \otimes x_2 \otimes \cdots \otimes x_n + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i m \otimes x_1 \otimes \cdots x_i x_{i+1} \otimes \cdots x_n \\ & + (-1)^n x_n m \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n-1} \end{aligned}$$

Dans le cas particulier où $N = M^{ad}$ est le g-module **adjoint** dont le $\mathbb{K}$-module sous-jacent est M avec l'action de $\mathfrak{g}$ définie par

$$m \cdot g := mg - gm \quad , m \in M, \; g \in \mathfrak{g}$$

H. Cartan et S. Eilenberg ont démontré le théorème suivant :

Theorem 1.0.2. [Cartan-Eilenberg] *Si $\mathfrak{g}$ est projective sur $\mathbb{K}$, l'application d'antisymétrisation $F : C_*(\mathfrak{g}; M^{ad}) \to CH_*(U\mathfrak{g}; M)$ définie en degré n par*

$$F(m \otimes g_1 \wedge \cdots \wedge g_n) := \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \operatorname{sgn}(\sigma) g_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge g_{\sigma(n)}$$

pour tous m dans M et g_1, ..., g_n dans $\mathfrak{g}$ est un quasi-isomorphisme de complexe de chaînes.

Le but de cet exposé est de répondre à la question suivante (dans le cas où $\mathbb{Q} \subset \mathbb{K}$) :

Existe-t-il un quasi-isomorphisme de complexes de chaînes $G : CH_*(U\mathfrak{g}; M) \to C_*(\mathfrak{g}; M^{ad})$, quasi-inverse de F, explicite et fonctoriel en $\mathfrak{g}$?

En donnant les grandes lignes de la démonstration du théorème suivant :

Theorem 1.0.3. *Pour tout entier n existe des opérateurs explicites $\Gamma_n : U\mathfrak{g}^{\otimes n} \to U\mathfrak{g}[t_1, \cdots, t_n]$, et $B_n^i : U\mathfrak{g}^{\otimes n} \to U\mathfrak{g}[t_1, \cdots, t_n]$ polynomiaux en les indéterminées t_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, tels que l'application*

$$G : CH_*(U\mathfrak{g}; M) \to C_*(\mathfrak{g}; M^{ad})$$

définie en degré n par

$$G(m \otimes x_1 \otimes \cdot \otimes x_n) := \int_{[0,1]^n} dt_1 \cdots dt_n S\Gamma_n(x_1^{(1)}, \cdots, x_n^{(1)}) x_1^{(2)} \cdots x_n^{(2)} m \Gamma_n(x_1^{(3)}, \cdots, x_n^{(3)}) \otimes B_n^1(x_1^{(4)}, \cdots, x_n^{(4)}) \otimes \cdot \otimes B_n^n(x_1^{(n+3)}, \cdots, x_n^{(n+3)}$$

pour tout m dans M et x_1, ..., x_n dans $U\mathfrak{g}$ soit un quasi-inverse de l'application d'antisymétrisation, fonctoriel en $\mathfrak{g}$.

Dans le théorème précédent, S désigne l'antipode de l'algèbre de Hopf $U\mathfrak{g}$ et la notation de Sweedler

$$x^{(1)} \otimes \cdots \otimes x^{(n)}$$

désigne le résultat du coproduit itéré $(n-1)$ fois appliqué à un élément x de $U\mathfrak{g}$.

Ce résultat peut être vu comme une généralisation des deux suivants :

Une solution non-explicite :

Theorem 1.0.4. [Suslin-Wodzicki] *Si $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, il existe un quasi-isomorphisme de complexes de chaînes*

$$G^{SW} : CH_*(U\mathfrak{g}; Q) \to C_*(\mathfrak{g}; Q)$$

fonctoriel en $\mathfrak{g}$.

et, dans le cas abélien réel ($U\mathfrak{g} = S\mathfrak{g}$ est identifié aux fontions polynomiales sur $\mathfrak{g}^*$), une solution explicite :

Theorem 1.0.5. [Bordemann-Ginot-Halbout-Herbig-Waldmann] *Si $\mathfrak{g}$ est de dimension finie sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, l'application $G^{BGHHW} CH_*(U\mathfrak{g}; M) \to C_*(\mathfrak{g}; M^{ad})$ définie par*

$$G^{BGHHW}(m \otimes x_1 \otimes \cdots x_n) := \sum_{i_1, \cdots, i_n} \big(\int_{\Delta^n} dt_1 \cdots dt_n O'_{i_1, \cdots i_n}(x_1, \cdots, x_n) m O_{i_1, \cdots i_n}(x_1, \cdots, x_n) \big) \otimes e_{i_1} \wedge \cdots e_{i_n}$$

où e_1, ..., e_m désigne une base de $\mathfrak{g}$ et les $O_{i_1, \cdots, i_n}$, $O'_{i_1, \cdots, i_n}$ sont des opérateurs différentiels en les x_i polynomiaux en les t_j, est un quasi-inverse de F.

Dans ces deux cas, la construction repose sur l'existence d'une certaine homotopie contractante et sur l'interprétation des homologies de Chevalley-Eilenberg et de Hochschild en termes de foncteurs dérivés.

2 La méthode

Pour comprendre d'où viennent les quasi-isomorphismes définis précédemment (F, G, G^{SW} et G^{BGHHW}), il suffit de revenir à la démonstration du théorème 1.0.2 donnée par Cartan et Eilenberg (dans le cas où $\mathfrak{g}$ est projective sur $\mathbb{K}$) :

Proposition 2.0.6.

$$HH * (U\mathfrak{g}; M) := H_*(CH_*(U\mathfrak{g}; M), d^H) = \mathrm{Tor}_*^{U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g}^{op}}(U\mathfrak{g}; M)$$

Car

$$(CH_*(U\mathfrak{g}; M), d^H) \cong (M \otimes_{U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g}^{op}} B_*(U\mathfrak{g}), \mathrm{Id} \otimes d^B$$

*où $(B_*(U\mathfrak{g}) = U\mathfrak{g}^{*+2}, d^B)$ est la **résolution bar** de $U\mathfrak{g}$ comme $U\mathfrak{g}$-bimodule.*

Proposition 2.0.7.
$$H_*(\mathfrak{g}; N) := H_*(C_*(\mathfrak{g}; N)) = \mathrm{Tor}_*^{U\mathfrak{g}}(\mathbb{K}; N)$$

Car
$$(C_*(\mathfrak{g}; N), d^{CE}) \cong (N \otimes_{U\mathfrak{g}} C_*(\mathfrak{g}; U\mathfrak{g}), \mathrm{Id} \otimes d^{CE})$$

et $C_*(\mathfrak{g}; U\mathfrak{g})$ est une résolution projective de $\mathbb{K}$ comme $U\mathfrak{g}$-module à gauche (via l'augmentation $\varepsilon : U\mathfrak{g} \to \mathbb{K}$), appelée ***résolution de Chevalley-Eilenberg****.*

Le point clé de la démonstration du théorème 1.0.2 est la proposition suivante, qui tire parti de la structure de $U\mathfrak{g}$ module à droite sur $U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g}^{op}$ induite par le morphisme d'algèbres $(\mathrm{Id} \otimes S)\Delta : U\mathfrak{g} \to U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g}^{op}$:

Proposition 2.0.8. *Le complexe de chaînes $(CK_*(\mathfrak{g}), d^K)$ défini en degré n par*
$$CK_n(\mathfrak{g}) := U\mathfrak{g} \otimes \Lambda^n \mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g}$$
et où d^K est la différentielle obtenue en transportant d^{CE} via l'isomorphisme
$$CK_*(\mathfrak{g}) \cong C_*(\mathfrak{g}; U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g}^{op})$$
est une résolution projective de $U\mathfrak{g}$ comme $U\mathfrak{g}$-bimodule, appelée ***résolution de Koszul*** *de $U\mathfrak{g}$.*

Pour conclure, il suffit d'utiliser le lemme fondamental du calcul des foncteurs dérivés qui assure que n'importe quel morphisme de résolutions
$$CK_*(\mathfrak{g}) \to B_*(U\mathfrak{g}),$$
en particulier l'application d'antisymétrisation F à coefficients dans $U\mathfrak{g}\otimes U\mathfrak{g}^{op}$, induira une équivalence d'homotopie
$$M \otimes_{U\mathfrak{g}\otimes U\mathfrak{g}^{op}} CK_*(\mathfrak{g}) \to M \otimes_{U\mathfrak{g}\otimes U\mathfrak{g}^{op}} B_*(U\mathfrak{g})$$
puis de remarquer que
$$M \otimes_{U\mathfrak{g}\otimes U\mathfrak{g}^{op}} CK_*(\mathfrak{g}) \cong C_*(\mathfrak{g}; M^{ad})$$

Nous voyons donc que n'importe quel morphisme de résolutions
$$B_*(U\mathfrak{g}) \to CK_*(\mathfrak{g})$$
induira nécessairement un quasi-inverse de F.

Afin de produire un tel morphisme de résolutions, il suffit de connaître une homotopie contractante $h : CK_*(\mathfrak{g}) \to CK_{*+1}(\mathfrak{g})$de la résolution de Koszul et de définir $G_* : B_*(U\mathfrak{g}) \to CK_*(\mathfrak{g})$ par récurrence sur le degré comme étant l'unique morphisme de $U\mathfrak{g}$-bimodules gradués vérifiant
$$G_n(1 \otimes x_1 \otimes \cdots x_n \otimes 1) = hG_{n-1}d^B(1 \otimes x_1 \otimes \cdots x_n \otimes 1) \quad , n \geqslant 1$$
pour tous x_1, ..., x_n dans $U\mathfrak{g}$ et $G_0 = \mathrm{Id}_{U\mathfrak{g}\otimes U\mathfrak{g}}$.

Dans le cas de Suslin-Wodzicki, l'homotopie est elle même définie par récurrence et utilise l'iso de PBW. Dans le cas de BGHHW, elle est explicite et repose du l'interprétation de la resolution de Koszul en termes de formes différentielles (Cf. Connes, "non commutative diff. geometry").

L'idée est donc de comprendre géométriquement la résolution de Koszul ou de Chevalley-Eilenberg pour en déduire une homotopie contractante (Pour démontrer l'acyclicité de $C_*(\mathfrak{g}; U\mathfrak{g})$, Cartan-Eilenberg se ramènent au cas abélien par filtration puis utilisent un résultat général sur les complexes de Koszul).

3 Le lemme de Poincaré algébrique

Rappelons que l'algèbre enveloppante admet une interprétation géométrique en termes de distributions ponctuelles : si $\mathfrak{g}$ est de dimension finie sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, en notant G un groupe de Lie dont l'espace tangent est $\mathfrak{g}$:
$$U\mathfrak{g} \cong C_e(G)^\vee$$
où $C_e(G)$ est l'espace des germes de fonctions en l'élément neutre e de G, muni de la topologie $\mathfrak{m}$-adique ($\mathfrak{m}$ est l'idéal maximal des germes s'annulant en e), et $\vee$ désigne le dual linéaire continu. Cet isomorphisme (d'algèbres de Hopf) est clairement défini sur les générateurs (il suffit de se rappeler ce qu'est un vecteur tangent en e) et

prolongé via la règle $xy(f) = (x \otimes y)(f \circ \mu)$ où μ désigne le produit de G, f est un germe, et x, y sont de longeur plus grande que 1 dans $U\mathfrak{g}$.

On note X_g le champ de vecteurs invariant à gauche engendré par un vecteur tangent $g \in \mathfrak{g} = T_eG$.

Si l'interprétation des cochaînes de Chevalley-Eilenberg à valeur dans $\mathbb{R}$ en termes de formes différentielles invariantes est bien connue, celle des chaînes en termes de courants ponctuels l'est moins :

Proposition 3.0.9. *Le morphisme d'espaces gradués $\psi : C_*(\mathfrak{g}; U\mathfrak{g}) \to \Omega_e^*(G)^\vee$ défini en degré n par*

$$\begin{array}{rcl} C_n(\mathfrak{g}; U\mathfrak{g}) & \to & \Omega_e^n(G)^\vee \\ x \otimes g_1 \wedge \cdots \wedge g_n & \mapsto & \big(\omega \mapsto x(\omega(X_{g_1}, \cdots, X_{g_n}))\big) \end{array}$$

où $\Omega_e^n(G)^\vee$ désigne le dual continu (pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique) de l'espace des germes de formes différentielles sur G en e, est un isomorphisme de complexe de chaînes (où $\Omega_e^n(G)^\vee$ est muni de la différentielle de de Rham dual $d_{DR}^\vee$).

Le lemme de Poincaré assure qu'à toute contraction $s : [0,1] \times U \to U$ d'un voisinage de e est associée une homotopie contractante $\tilde{s}$ du complexe $\Omega_e^*(G)$ via la formule

$$\tilde{s}(\omega) := \int_0^1 dt\, \iota_{\frac{\partial}{\partial t}} s^*\omega$$

où $\iota_{\frac{\partial}{\partial t}}$ désigne le produit intérieur par le champ de vecteur $\frac{\partial}{\partial t}$.

En choisissant U assez petit pour que le logarithme $\ln : U \to \ln(U) \subset \mathfrak{g}$ soit défini et tel que $\ln(U)$ soit convexe, il est possible de définir la **contraction canonique** $s_{can} : I \times U \to U$ par la formule

$$s_{can}(t, z) := \exp(t \ln z) \quad , t \in [0,1],\ z \in U$$

Afin de d'écrire algébriquement l'homotopie de la résolution de Chevalley-Eilenberg induite par $\tilde{s}_{can}$ via l'isomorphisme ψ, il nous faut introduire un ingrédient supplémentaire : l'idempotent eulérien.

Definition 3.0.10. [Loday, Reutenauer] ***L'idempotent eulérien*** *est le morphisme $\mathbb{K}$-linéaire $\mathrm{pr} : U\mathfrak{g} \to U\mathfrak{g}$ défini par*

$$\mathrm{pr} := \sum_{k \geqslant 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} (\mathrm{Id} - \eta\varepsilon)^{\star k} = \ln_\star(\eta\varepsilon + (\mathrm{Id} - \eta\varepsilon))$$

où $\eta : \mathbb{K} \to U\mathfrak{g}$ est l'unité de $U\mathfrak{g}$, $\varepsilon : U\mathfrak{g} \to \mathbb{K}$ son augmentation, et $\star$ désigne le produit de convolution des endomorphismes $\mathbb{K}$-linéaires de la bigèbre $U\mathfrak{g}$.

Remark 3.0.11. *L'idempotent eulérien est en fait à valeurs dans $\mathfrak{g} \subset U\mathfrak{g}$.*

Proposition 3.0.12. *L'homotopie contractante $s^{can} : C_*(\mathfrak{g}; U\mathfrak{g}) \to C_{*+1}(\mathfrak{g}; U\mathfrak{g})$ induite par $\tilde{s}_{can}$ via l'isomorphisme ψ vérifie*

$$s^{can}(x \otimes g_1 \wedge \cdots \wedge g_n) = \int_0^1 dt\, \phi_t(x^{(1)}) \otimes \mathrm{pr}(x^{(2)}) \wedge A_t(x^{(3)}, g_1) \wedge \cdots \wedge A_t(x^{(n+2)}, g_n) \qquad (1)$$

pour tous x dans $U\mathfrak{g}$ et g_1, ..., g_n dans $\mathfrak{g}$, avec, pour tout t dans $[-1, 1]$,

- $\phi_t = \sum_{k \geqslant 0} \frac{t^k}{k!} \mathrm{pr}^{\star k} = \exp_\star(t\mathrm{pr}) = "\mathrm{Id}^{\star t}"$
- $A_t(x, y) := \phi_{-t}(x^{(1)}) \phi_t(x^{(2)} y)$.

Ingrédients de la démonstration. Transcrire tout le calcul différentiel en termes algébriques. Un résultat fondamental utilisé dans la démonstration est le lemme suivant, qui donne une intepprétation géométrique de l'isomorphisme de PBW :

Lemma 3.0.13. [Torrossian, R.] *Les difféomorphismes locaux (non compatibles aux structures multiplicatives mais aux diagonales ensemblistes)*

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, bend left, "\ln"] & \mathfrak{g} \arrow[l, "\exp"] \end{tikzcd}$$

induisent au niveau des distributions ponctuelles le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} U\mathfrak{g} \arrow[rr, bend left, "PBW^{-1}"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}"'] & & S\mathfrak{g} \arrow[ll, "PBW"] \arrow[dl, "proj_{\mathfrak{g}}"] \\ & \mathfrak{g} & \end{tikzcd}$$

où $S\mathfrak{g}$ est la cogèbre symétrique sur $\mathfrak{g}$ vue comme distributions sur le groupe additif $(\mathfrak{g}, +)$, $\mathrm{proj}_{\mathfrak{g}}$ est induite par la différentiation en 0 des fonctions, PBW est l'isomorphisme de symétrisation de Poincaré-Birkhoff-Witt dont l'inverse est donné par

$$PBW^{-1} := \sum_{k \geqslant 0} \frac{1}{k!} \mathrm{pr}^{\star k}$$

où la convolution a lieu dans $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(U\mathfrak{g}, S\mathfrak{g})$.

Remarquons que la contraction ϕ_t n'est alors rien d'autre que l'endomorphisme induit par la contraction géométrique s_{can} au niveau des distributions. □

L'interprétation géométrique de la résolution de Chevalley-Eilenberg n'a plus de sens sur un anneau quelconque. Cependant, la formule définissant l'homotopie s^{can} en a dès que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{K}$.

Theorem 3.0.14. [R.] *Si l'anneau de base $\mathbb{K}$ contient $\mathbb{Q}$, la formule (1) définit une homotopie contractante de la résolution de Chevalley-Eilenberg de $\mathfrak{g}$.*

Corollary 3.0.15. *L'application linéaire graduée de degré $+1$ $h : CK_*(\mathfrak{g}) \to CK_*(\mathfrak{g})$ définie en degré n par*

$$h(x \otimes g_1 \wedge \cdots \wedge g_n \otimes y) := \int_0^1 dt\, \phi_t(x^{(1)}) \otimes \mathrm{pr}(x^{(2)}) \wedge A_t(x^{(3)}, g_1) \wedge \cdots \wedge A_t(x^{(n+2)}, g_n) \otimes \phi_{1-t}(x^{(n+3)}) y \quad (2)$$

est une homotopie contractante de la résolution de Koszul de $\mathfrak{g}$.

4 Construction du quasi-inverse G

Rappel : $G_* : B_*(U\mathfrak{g}) \to CK_*(\mathfrak{g})$ est défini par récurrence sur le degré comme étant l'unique morphisme de $U\mathfrak{g}$-bimodules gradués vérifiant

$$G_n(1 \otimes x_1 \otimes \cdots x_n \otimes 1) = hG_{n-1}d^B(1 \otimes x_1 \otimes \cdots x_n \otimes 1) \quad , n \geqslant 1 \quad (3)$$

pour tous x_1, ..., x_n dans $U\mathfrak{g}$ et $G_0 = \mathrm{Id}_{U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g}}$.

Question : **Comment se passer de la récurrence ?**

Idée : Dans le cadre de la cohomologie à valeurs **réelles** d'une algèbre de Lie de dimension finie/infinie, Van est/Neeb définissent une application d'intégration des 2-cochaînes de Chevalley-Eilenberg en 2-cochaînes de groupe localement lisses. L'ingrédient principal est une carte $\psi : U \to V \subset \mathfrak{g}$, où G est un groupe de Lie/Fréchet dont l'algèbre de Lie est $\mathfrak{g}$ et U est un ouvert de G contenant l'élément neutre e, centrée en e et vérifiant des conditions d'ordre 0 et 1. En posant

$$\sigma_{z_1, z_2}(t, s) = \psi^{-1}\Big(s\psi\big(z_1 \psi^{-1}(t\psi(z_2))\big) + t\psi\big(z_1 \psi^{-1}((1-s)\psi(z_2))\big) \Big)$$

il est alors possible d'associer à toute 2 cochaîne de Chevalley-Eilenberg $\omega : \Lambda^2 \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$, la cochaîne de groupe locale lisse

$$I(\omega) : (z_1, \cdots, z_n) \in U^{\times 2} \mapsto \int_{\Delta^2} \sigma^*_{z_1, \cdots, z_n} \omega^{eq}$$

dont la différentielle seconde au point (e, e) antisymétrisée redonne bien ω i.e. $D^2_{(e,e)} I(\omega)(g_1, 0)(0, g_2) - D^2_{(e,e)} I(\omega)(g_2, 0)(0, g_1) = \omega(g_1 \wedge g_2)$.

En prenant $\psi = s_{can}$, et remplaçant les simplexes par des cubes $\gamma_{z_1,\cdots,z_n}$ bien choisis, il est possible de généraliser cette construction à tout degré homologique pour définir un morphisme de complexe de cochaînes

$$\begin{array}{rcl} I_c : C^*(\mathfrak{g};\mathbb{R}) & \to & C^*_{loc}(G;\mathbb{R}) \\ \omega & \mapsto & \big((z_1,\cdots,z_n) \mapsto \int_{\square^n} \gamma^*_{z_1,\cdots,z_n}\omega^{eq} \end{array}$$

qui soit une section de l'application de différentiation/antisymétrisation des cochaines de groupe localement lisses.

Or, en considérant les germes de cochaînes de groupe, on obtient un isomorphisme

$$C^*_{loc,e}(G;\mathbb{R})^\vee \cong CH_*(U\mathfrak{g};\mathbb{R})$$

Il s'avère que $I_c^\vee$ et le morphisme induit en cohomologie à valeurs réelle par G_* coïncident :

Proposition 4.0.16. *Le diagramme de complexes de chaînes*

$$\begin{tikzcd} C^*_{loc,e}(G;\mathbb{R})^\vee \arrow[rr, leftrightarrow, "\cong"] & & CH_*(U\mathfrak{g};\mathbb{R}) \\ & C_*(\mathfrak{g};\mathbb{R}) \arrow[ul, "I_c^\vee"] \arrow[ur, "\mathrm{Id}_\mathbb{R}\otimes G_*"'] & \end{tikzcd}$$

est commutatif.

La formule compacte définissant $I_c^\vee$ se relève sans difficulté au niveau des résolutions et permet d'écrire G_* sans faire appel à une récurrence. De plus, même si elle n'a plus de sens sur un anneau arbitraire, cette formule reste valide dès que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{K}$.

Theorem 4.0.17. [R.] *Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$ contenant $\mathbb{Q}$, le morphisme de résolutions G_* : $B_*(U\mathfrak{g}) \to CK_*(U\mathfrak{g})$ défini par (3) vérifie :*

$$G_*(1\otimes x_1\otimes\cdots\otimes x_n\otimes 1) := \int_{[0,1]^n} dt_1\cdots dt_n \Gamma_n(x_1^{(1)},\cdots,x_n^{(1)})\otimes B_n^1(x_1^{(2)},\cdots,x_n^{(2)})\wedge\cdots\wedge B_n^n(x_1^{(n+1)},\cdots,x_n^{(n+1)})\otimes S\Gamma_n(x_1^{(n+2)},\cdots,x_n^{(n+2)})x_1^{(n+3)}\cdots x_n$$

pour tous x_1 ..., x_n dans $U\mathfrak{g}$, où $\Gamma_n : U\mathfrak{g}^{\otimes n} \to U\mathfrak{g}[t_1,\cdots,t_n]$ est ne n-cube défini par

$$\Gamma_n(y_1,\cdots,y_n) := \phi_{t_1}(y_1\phi_{t_2}(y_2\phi_{t_3}(\cdots y_{n-1}\phi_{t_n}(y_n)\cdots)))$$

et les opérateurs B_n^i, $1 \leqslant i \leqslant n$ sont définis par

$$B_n^i(y_1,\cdots,y_n) := S(\Gamma_n(y_1^{(1)},\cdots,y_n^{(1)}))\frac{\partial}{\partial t_i}\Gamma_n(y_1^{(2)},\cdots,y_n^{(2)})$$

pour tous y_1, ..., y_n dans $U\mathfrak{g}$.

5 Applications

La connaissance du quasi-isomorphisme G_* permet d'obtenir un relèvement (une "intégration formelle") des cocycles d'algèbre de Lie en cocycles de l'algèbre enveloppante. De plus, le lemme fondamental du calcul des foncteurs dérivés nous assure que la paire (F_*, G_*) est une équivalence d'homotopie. Mieux que cela, un calcul direct de la composée $F_* \circ G_*$ nous montre qu'elle est égale à l'application identité sur $C_*(\mathfrak{g}; M^{ad})$, en d'autres termes

$$\begin{tikzcd} CH_*(U\mathfrak{g};M) \arrow[r, shift right, "\mathrm{Id}_M\otimes F_*"'] & C_*(\mathfrak{g};M^{ad}) \arrow[l, shift right, "\mathrm{Id}_M\otimes G_*"'] \end{tikzcd}$$

est un rétract par déformation.

Bien que l'existence d'une homotopie $H : CH_*(U\mathfrak{g};M) \to CH_{*+1}(U\mathfrak{g};M)$ telle que

$$Hd^H + d^H H = \mathrm{Id} - F_* \circ G_*$$

soit assurée, il est utile pour d'éventuelles applications d'en déterminer une explicitement. Une fois de plus, il suffit de traiter le cas universel des résolutions, ce que fait la proposition suivante en degré 1.

Proposition 5.0.18. *Soient $H_0 : B_0(U\mathfrak{g}) \to B_0(U\mathfrak{g})$ et $H_1 : B_1(U\mathfrak{g}) \to B_2(U\mathfrak{g})$ les morphismes de $U\mathfrak{g}$-bimodules définis par*

$$H_0 := 0$$

et

$$H_1(1 \otimes x \otimes 1) := \int_0^1 dt\, 1 \otimes \phi_t(x^{(1)}) \otimes \mathrm{pr}(x^{(2)}) \otimes \phi_{1-t}(x^{(3)}) - 1 \otimes 1 \otimes 1 \otimes x$$

Alors

$$d^B H_1 + H_0 d^B = \mathrm{Id}_{B_1(U\mathfrak{g})}$$

Pour terminer, nous allons montrer comment utiliser G_* et H_* pour expliciter le théorème de rigidité des algèbres de Lie semi-simples. Soient

- $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie semi-simple sur $\mathbb{K} = \mathbb{C}$,
- $\mathbb{C}[[h]]$ la $\mathbb{C}$-algèbre des séries formelles à coefficients complexes en l'indéterminée h,
- $U\mathfrak{g}[[h]] := U\mathfrak{g} \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[[h]]$.

Definition 5.0.19. [V. Drinfel'd, C. Kassel,] *Une **algèbre enveloppante quantique** pour $\mathfrak{g}$ est la donnée d'une structure de quasi-bigèbre tressée sur le $\mathbb{C}[[h]]$-module $U\mathfrak{g}[[h]]$ qui coïncide à l'ordre 0 avec la structure d'algèbre de Hopf sur $U\mathfrak{g}$.*

La donnée d'une structure de quasi-bigèbre tressée implique celle d'un produit associatif $\mathbb{C}[[h]]$-linéaire $\mu_h : U\mathfrak{g}^{\otimes 2}[[h]] \to U\mathfrak{g}[[h]]$ entièrement déterminé par sa restriction à $U\mathfrak{g}^{\otimes 2}$, qui prend la forme d'une série formelle

$$\mu_h := \sum_{i \geqslant 0} h^i \mu_i$$

où chaque μ_i est une application linéaire de $U\mathfrak{g}^{\otimes 2}$ dans $U\mathfrak{g}$ et μ_0 est le produit usuel de $U\mathfrak{g}$.

Exemple de l'algèbre de Drinfeld-Jimbo [Kassel] : $A = (a_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ matrice de Cartan de $\mathfrak{g}$ et $D = \mathrm{diag}(d_1, \cdots, d_n)$ matrice des longueurs de racines.

Definition 5.0.20. ***L'algèbre de Drinfeld-Jimbo** associée à $\mathfrak{g}$ est le quotient, noté $U_h\mathfrak{g}$, de la $\mathbb{C}[[h]]$-algèbre libre engendrée par les générateurs X_i, Y_i, H_i, $1 \leqslant i \leqslant n$, par l'idéal engendré par les relations*

$$[H_i, H_j] = 0, \qquad [X_i, Y_j] = \delta_{ij} \frac{\sinh(hd_i H_i/2)}{\sinh(hd_i/2)},$$

$$[H_i, X_j] = a_{ij} X_j, \qquad [H_i, H_j] = -a_{ij} Y_j$$

et pour $i \neq j$

$$\sum_{k=0}^{1-a_{ij}} (-1)^k \left[\begin{array}{c} 1 - a_{ij} \\ k \end{array} \right]_{q_i} X_i^k X_j X_i^{1-a_{ij}-k} = 0,$$

et

$$\sum_{k=0}^{1-a_{ij}} (-1)^k \left[\begin{array}{c} 1 - a_{ij} \\ k \end{array} \right]_{q_i} Y_i^k Y_j Y_i^{1-a_{ij}-k} = 0,$$

où $q_i = e^{hd_i/2}$, $\left[\begin{array}{c} a \\ b \end{array} \right]_q := \frac{[a]_q!}{[b]_q![a-b]_q!}$, $[a]_q! = [a]_q[a-1]_q \cdots [1]_q$, $[a]_q = \frac{q^a - q^{-a}}{q - q^{-1}}$.

Proposition 5.0.21. *$U_h\mathfrak{g}$ peut-être munie d'une structure de quasi-bigèbre tressée qui en fait une algèbre enveloppante quantique de $\mathfrak{g}$.*

Le théorème de rigidité est le suivant :

Theorem 5.0.22. [Drinfel'd] *Toute algèbre enveloppante quantique est isomorphe, en tant qu'algèbre associative, à la déformation triviale $(U\mathfrak{g}[[h]], \mu_0)$.*

La démonstration du théorème précédent est non constructive et ne permet pas, à priori, d'expliciter un isomorphisme. Cependant, il est possible de la suivre pas à pas et d'utiliser notre morphisme G_* pour rendre explicites les étapes qui ne le sont pas :

1. Le produit déformé s'écrit sous la forme $\mu_h := \sum_{i\geqslant 0} h^i \mu_i$,
2. On pose $k = \inf\{i \geqslant 1 \ / \ \mu_i \neq 0\}$. μ_k est un 2-cocycle de Hochschild dans $CH^2(U\mathfrak{g}; U\mathfrak{g})$,
3. Comme $\mathfrak{g}$ est semi-simple $H^2(\mathfrak{g}; U\mathfrak{g}^{ad}) = 0$, et une contraction explicite peut être définie à l'aide de l'élément de Casimir de $\mathfrak{g}$. Ainsi, il existe $\beta : \mathfrak{g} \to U\mathfrak{g}$ explicite, telle que $d^{CE}\beta = F^2\mu_k$,
4. Or, par la proposition $G^2F^2\mu_k = \mu_k + d^H H^1\mu_k$ i.e. $\mu_k = d^H\alpha$ avec $\alpha := G^2\beta - H^1\mu_k$,
5. On utilise l'isomorphisme de $\mathbb{C}[[h]]$-modules $\mathrm{Id} + h^k\alpha$ pour récrire le produit déformé sous la forme $\mu'_h := \sum_{i\geqslant 0} h^i \mu'_i$. Par construction, $\mu'_1 = \mu'_2 = \cdots = \mu'_k = 0$.
6. En reprenant la procédure avec le nouveau produit on fabrique une famille d'isomorphismes dont la composée envoie le produit déformé sur le produit trivial.

Ainsi, G^* et H^1 devraient permettre d'expliciter un tel isomorphisme en temps fini à tout ordre fixé, dès lors que l'on connait explicitement le produit déformé comme c'est le cas dans la déformation de Drinfeld-Jimbo.

Remark 5.0.23. *Un isomorphisme explicite est déjà connu dans le cas où $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Dans "A guide to quantum groups", Chari et Pressley le définissent sur trois générateurs (à un scalaire près égaux aux H_1, X_1, Y_1) :*

$$\begin{array}{rcl} U_h\mathfrak{g} & \to & U\mathfrak{g}[[h]] \\ H & \mapsto & H \\ Y & \mapsto & Y \\ X & \mapsto & 2\left(\frac{\cosh h(H-1) - \cosh 2h\sqrt{\bar{\Omega}}}{((H-1)^2 - 4\bar{\Omega})\sinh^2 h}\right) X \end{array}$$

avec

$$\bar{\Omega} = \frac{1}{4}(H-1)^2 + XY \in U_h\mathfrak{g}$$