Université de Nantes Année 2010-2011
L3 Math-Eco

TD n°2
Mesures et Intégration

Dans tous les exercices $(\Omega, \mathcal{A})$ est un ensemble mesurable.

Exercice 1 Soit ω une élément de Ω.

1. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rcl} \delta_\omega : \mathcal{A} & \to & \mathbb{R} \\ A & \mapsto & \delta_\omega(A) := \mathbb{I}_A(\omega) \end{array}$$

est une mesure sur $(\Omega, \mathcal{A})$, appelée masse de Dirac en ω.

2. Supposons que Ω est dénombrable. Montrer que l'application $\delta := \sum_{\omega \in \Omega} \delta_\omega$ est une mesure sur $(\Omega, \mathcal{A})$, appelée mesure de comptage.

Exercice 2 Soit μ une mesure sur $(\Omega, \mathcal{A})$. On rappelle qu'une partie N de Ω est dite négligeable (pour la mesure μ) lorsqu'il existe une partie mesurable A dans $\mathcal{A}$ telle que $N \subset A$ et $\mu(A) = 0$. Soit $\mathcal{N}$ l'ensemble des parties négligeables et posons

$$\mathcal{B} := \{A \cup N \ , \ A \in \mathcal{A} \text{ et } N \in \mathcal{N}\}$$

Montrer que $\mathcal{B}$ est une tribu sur Ω (appelée tribu completée de $\mathcal{A}$).

Exercice 3

1. Soit $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ définie par

$$\mu(A) := \sum_{n \in A} \frac{1}{(n+1)^2}$$

pour toute partie A de $\mathbb{N}$. Montrer que μ est une mesure sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$.

2. Soit $\nu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ l'application définie par

$$\nu(A) := \begin{cases} \displaystyle\sum_{n \in A} \frac{1}{n+1} & \text{si } A \text{ est finie} \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

pour tout A dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Montrer que ν est additive mais pas σ-additive.

Exercice 4 On munit $\mathbb{R}$ de sa tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et de la mesure

$$\mu := \sum_{n \in \mathbb{N}} n \delta_n$$

où δ_a est la masse de Dirac en a. Pour p dans $\mathbb{N}^*$, on note

$$A_p := [p, p + 1 + \frac{1}{p^2}] \quad \text{et} \quad C_p := [p, +\infty[.$$

1. Calculer $\mu(A_p)$ et $\mu(C_p)$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.
2. Soit $C := \bigcap_{k\geqslant 1} C_k$. Vérifier que $\mu(C) \neq \lim_{k\to+\infty} \mu(C_k)$. Commenter.
3. Determiner la mesure image de μ par l'application

$$\begin{array}{rcl} X : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ \omega & \mapsto & \omega^2 \end{array}$$

Exercice 5 Supposons que $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré et soient A et B deux éléments de $\mathcal{A}$. Examiner le lemme de Fatou appliqué à la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ si $f_{2p} = \mathbb{I}_A$ et $f_{2p+1} = \mathbb{I}_B$ pour tout entier p.

Exercice 6 Supposons que $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace mesuré. Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable positive. Pour tout A dans $\mathcal{A}$ on pose

$$a(A) := \inf\{f(x),\ x \in A\}$$

et pour toute famille finie $C := \{A_1,\ A_2,\ ,\cdots,\ A_n\}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux disjoints on pose

$$s(C) := \sum_{i=1}^{n} a(A_i)\mu(A_i)$$

Montrer que

$$\int_\Omega f\, d\mu = \sup\{s(C),\ C \subset \mathcal{A} \text{ et } C \text{ finie}\}$$

Exercice 7 Soit $(a_{n,p})_{(n,p)\in\mathbb{N}^2}$ une double suite de nombres réels telle que

– Pour tout entier p la limite $a_p := \lim_{n\to+\infty} a_{n,p}$ existe.

– Pour tous entiers n et p, $|a_{n,p}| \leqslant b_p$ où $(b_p)_{p\in\mathbb{N}}$ est une suite sommable de réels positifs.

Montrer que pour tout entier n la série $\sum_{p\geqslant 0} a_{n,p}$ est convergente et que

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{p\geqslant 0} a_{n,p} = \sum_{p\geqslant 0} a_p$$

Exercice 8 Pour u dans $]0,1[$ et x dans $\mathbb{R}$, on pose $f(u,x) := \frac{e^{ux}}{e^x+1}$.

1. Montrer que pour tout entier n et pour tout u fixé la fonction $x \mapsto x^n f(u,x)$ est intégrable et que la fonction g définie par

$$g(u) := \int_\mathbb{R} f(u,x)\, dx$$

pour tout $u \in]0,1[$ est indéfiniment dérivable.

2. Montrer que pour tout réel $t > 0$

$$\int_{-\infty}^{-t} f(u,x)\, dx + \int_{t}^{+\infty} f(u,x)\, dx = \frac{e^{-ut}}{u} + \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n ((\frac{e^{-(u+n)t}}{u} + n) + (\frac{e^{(u-n)t}}{u} - n))$$

et en déduire que pour tout u dans $]0,1[$:

$$g(u) = \frac{1}{u} + 2u \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{u^2 - n^2}$$