
TD n°3 Indépendance

Exercice 1 Une urne contient b boules blanches et r boules rouges. On tire ces boules une à une, sans remise, jusqu'à épuisement. Pour k tel que $0 \leq k \leq b$, quelle est la probabilité pour qu'exactly k boules blanches soient tirées avant la première boule rouge ?

Exercice 2 Deux joueurs A et B jouent une suite de parties indépendantes. Lors de chacune d'elles, ils ont respectivement les probabilités p pour A et $q := 1 - p$ pour B de gagner. Le vainqueur final est celui des deux joueurs qui le premier obtient deux victoires de plus que son adversaire. Quelle est la probabilité pour que A soit vainqueur ?

Exercice 3 Soient X et Y deux variables aléatoires définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, ne pouvant prendre que deux valeurs distinctes. Montrer que X et Y sont indépendantes si et seulement si $E(XY) = E(X)E(Y)$.

Indication : Si X prend les valeurs x_1, x_2 et Y les valeurs y_1, y_2 , déduire de l'hypothèse d'indépendance que

$$E((X - x_i)(Y - y_i)) = E(X - x_i)E(Y - y_i) \quad \forall i = 1, 2$$

Exercice 4 Soit X une variable aléatoire réelle et soient f et g deux fonctions croissantes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On suppose que $E(f(X)^2) < \infty$ et $E(g(X)^2) < \infty$. Démontrer que

$$E(f(X)g(X)) \geq E(f(X))E(g(X))$$

Indication : Montrer que $(f(x) - f(y))(g(x) - g(y)) \geq 0$ pour tous x et y dans $\mathbb{R}$ et utiliser le théorème de Fubini après avoir introduit une variable aléatoire Y indépendante de X et de même loi.

En déduire que si $|X| < 1$ p.s (presque sûrement)

$$E\left(\frac{1}{1 - X^2}\right) \leq E\left(\frac{1}{1 - X}\right)E\left(\frac{1}{1 + X}\right)$$

Exercice 5 Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes, de même loi exponentielle de densité donnée par

$$d_\theta(x) := \theta e^{-\theta x} \mathbb{I}_{[0, \infty[}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

avec $\theta > 0$. Déterminer les densités des lois X^3 , $|X - Y|$, $\min(X, Y^3)$. Même question lorsque X et Y suivent la loi uniforme sur $[-1, 1]$.

Exercice 6 Soient n un entier non nul, $(X_i)_{i=1 \dots n}$ une famille de variables aléatoires indépendantes, et notons F_i la fonction de répartition de X_i pour tout i dans $\{1, \dots, n\}$. On définit les variables aléatoires m_n et M_n par :

$$m_n := \min_{1 \leq i \leq n} X_i \quad \text{et} \quad M_n := \max_{1 \leq i \leq n} X_i$$

Montrer que pour tout réel x

$$P([M_n \leq x]) = \prod_{1 \leq i \leq n} F_i(x)$$

, que

$$P([m_n \leq x]) = 1 - \prod_{1 \leq i \leq n} (1 - F_i(x))$$

et que

$$P([x_1 \leq m_n \leq M_n \leq x_2]) = \prod_{1 \leq i \leq n} (F_i(x_1) - F_i(x_2)) \quad \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}$$

Exercice 7 Soient n un entier non nul, $(X_i)_{i=1 \dots n}$ une famille de variables aléatoires indépendantes, de même loi exponentielle de paramètre 1. Montrer que

$$P([\exists i, j / X_i = X_j]) = 0$$

On pose $Z := \min_{1 \leq i \leq n} X_i$ et $N := \min\{i / X_i = Z\}$. Déterminer la loi de Z . Etablir que pour réel $t > 0$ et pour tout entier k dans $\{1, \dots, n\}$

$$P([N = k, Z > t]) = \frac{e^{-nt}}{n}$$

En déduire que Z et N sont des variables aléatoires indépendantes et préciser la loi de N .

Exercice 8 On appelle loi gamma de paramètre $p > 0$ et on note Γ_p la loi de densité γ_p donnée par

$$\gamma_p(x) := \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+} (\Gamma(p))^{-1} x^{p-1} e^{-x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

où $\Gamma(p)$ est une constante de normalisation (elle assure que l'intégrale de γ_p vaut 1).

1. Montrer que $\Gamma(p) = (p-1)\Gamma(p-1)$ et que pour p entier $\Gamma(p) = p!$.
2. Montrer que $\Gamma_p * \Gamma_q = \Gamma_{p+q}$ pour tous entiers p et q . En déduire la loi de $\lambda_1 + \dots + \lambda_n$ lorsque $(\lambda_i)_{i \in \{1 \dots n\}}$ est une famille de variables aléatoires mutuellement indépendantes de même loi exponentielle de paramètre 1.
3. Montrer que la fonction caractéristique φ^{Γ_p} de la loi Γ_p est donnée par

$$\varphi^{\Gamma_p} = (1 - it)^{-p} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

4. Soit maintenant $(X_i)_{i \geq 1}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes et de même loi exponentielle. Soit $S_n := X_1 + \dots + X_n$ leur somme (pour tout entier n). Pour tout réel t positif posons $N(t) := \text{card}\{i / S_i \leq t\}$. En évaluant $P([N(t) \geq k])$ pour tout entier k , montrer que $N(t)$ suit une loi de Poisson de paramètre t .

Exercice 9 Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires mutuellement indépendantes, de même loi de Bernoulli de paramètre p . Pour tout entier $n \geq 1$, on définit par récurrence la variable aléatoire T_n par

$$T_n := \inf\{k / k > T_{n-1}, X_k = 1\}$$

si cet infimum existe et $T_n = \infty$ sinon, et $T_0 = 0$. démontrer que les variables aléatoires $T_1, T_2 - T_1, \dots, T_n - T_{n-1}, \dots$ sont mutuellement indépendantes et de même loi. Calculer la loi de T_1 et sa fonction caractéristique. En déduire la loi de T_n .

Exercice 10 Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes et de même loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$. on pose

$$U = X \quad \text{et} \quad V = \max(X, Y)$$

1. Pour toute application f borelienne de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ déterminer l'espérance $E(f(U, V))$.
2. En déduire la loi de V .