Université de Nantes Année 2010-2011
L3 Math-Eco

TD n°2 bis Convergence dominée et intégrales à paramètre

Exercice 1 Dans chacun des cas suivants étudier la convergence simple des suites de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivantes, l'intégrabilitité de chaque f_n sur I, puis la limite de $\int_I f_n(x)dx$ lorsque n tend vers $+\infty$.

1. $f_n(x) := x^n(1+3x^2+8\sin(nx))$, $I :=]0,1]$;
2. $f_n(x) := \frac{1}{(1+x^2)\sqrt[n]{1+x^n}}$, $I :=]0,+\infty[$;
3. $f_n := e^{-(x-n)^2}$, $I :=]0,+\infty[$.

Exercice 2 Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définies sur $]0,+\infty[$ par

$$f_n(x) := \frac{\sin(x^n)}{x^n}\frac{1}{1+x^2}, \quad \forall x \in]0,+\infty[$$

1. Montrer que pour tout réel t, $|\sin(t)| \leqslant |t|$.
2. L'intégrale $\int_0^{+\infty} f_n(x)dx$ est-elle convergente ? Calculer la limite simple éventuelle de (f_n).
3. Calculer
$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)dx$$

Exercice 3 Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue telle que $f(0) = 0$. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(t^n)dt = 0$$

Exercice 4

1. Soit $\theta \geqslant 0$. Calculer $\sup_{x\in[0,1]} x^n(1-x)^\theta$.
2. Soit $\alpha \geqslant 0$ et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite de fonctions définie par $f_n(x) := n^\alpha x^n(1-x)^\theta$ pour tout x dans $[0,1]$ et n dans $\mathbb{N}$. Montrer que si $\alpha < 2$, la suite $(\int_0^1 f_n(x)dx)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite que l'on précisera. Retrouver le même résultat en calculant l'intégrale
$$\int_0^1 n^\alpha x^n(1-x)$$
Que se passe-t-il si $\alpha = 2$ et si $\alpha > 2$?

Exercice 5
1. Montrer que la foncion f définie sur $\mathbb{R}$ par
$$f(x) := \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\cos(xt)dt \qquad \forall x \in \mathbb{R}$$
est continue puis $\mathcal{C}^1$.
2. Prouver que f satisfait l'équation différentielle $2f'(x) + xf(x) = 0$ pour tout réel x. En déduire l'expression de f.