NOTES – GDT DÉFORMATION DE STRUCTURES ALGÉBRIQUES

JOHAN LERAY AND SALIM RIVIÈRE

Résumé. Notes prises "à la volée" pendant les exposés du groupe de travail sur les déformations des structures algébriques, suivant les articles de Ginot et Yalin [GY16] et [GY19]. Il y a donc un certain nombre d'erreurs, d'imprecisions, de manque par rapport aux exposés : désolé pour cela. Les doutes et commentaires du rédacteur sont mis en rose.

Table des matières

Exposé 1 – 15 nov. 2019 – Catégories de modèles I – Friedrich Wagemann

Références. Cet exposé est basé sur les notes de cours et ouvrages suivants :

- LNM 43 D. Quillen *Homotopical algebra* [Qui06] (la réffrence historique) ;
- Hovey : *Model categories* [Hov99] ;
- Hirschham : *Model categories and their localization* [Hir09] ;
- Notes de cours de Grégory Ginot, disponible sur la page suivante
  `https://www.math.univ-paris13.fr/%7Eginot/Homotopie/`
- remarque : On pourra également consulter les notes du cours de N. Idrissi dispensé cette année dans le cadre du M2 de P7
  `https://idrissi.eu/fr/cours/1920-homotopie/`

Date: 14 février 2020.
Merci à Friedrich Wagemann et Salim Rivière pour l'organisation de ce groupe de travail. Enfin, merci aux différents orateurs.

Remarque additionnelle. Le but de cette théorie est d'avoir une définition et un cadre de travail "acceptable" de la localisation d'une catégorie. Étant donné une catégorie C et une classe de morphismes Weak (qui peut être vue comme une sous-catégorie de C), on cherche à avoir l'existence et à décrire la catégorie $\mathsf{C}[\mathsf{Weak}^{-1}]$ où l'on a formellement inversé la classe de morphismes Weak.

1.1. **Première définitions.** On fixe C une catégorie.

Définition 1.1 (Retract). Soient $f\colon X \to Y$ et $g\colon X' \to Y'$ deux morphismes de C. Le morphisme f est un *retract* de g s'il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d, "f"] \arrow[rr, bend left, "\mathrm{id}_X"] & X' \arrow[r] \arrow[d, "g"] & X \arrow[d, "f"] \\
Y \arrow[r] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}_Y"'] & Y' \arrow[r] & Y
\end{tikzcd}.$$

Définition 1.2. Une catégorie C est dite *complète* (resp *cocomplète*) si elle possède toutes les petites limites (resp. colimites)

Définition 1.3 (Structure de modèle). Une *structure de modèle* sur une catégorie M est la donnée de trois classes de morphismes

— Weak la classe des équivalences faibles, dont un élément sera noté $\xrightarrow{\sim}$;

— Fib la classe des fibrations dont un élément sera noté $\twoheadrightarrow$;

— Cof la classe des cofibrations dont un élément sera noté $\rightarrowtail$;

telle que le quadruplet $(\mathsf{M}, \mathsf{Weak}, \mathsf{Fib}, \mathsf{Cof})$ satisfait les cinq axiomes suivants

MC1: la catégorie M est complete et cocomplete ;

MC2 – Axiome 2-sur-3: la classe Weak a la propriété 2-sur-3 c'est-á-dire si on a deux flèches composables f et g alors, si deux des trois flèches f, g et fg sont dans Weak, alors la troisieme également ;

MC3 – Axiome de retraction: Si g est une équivalence faible (resp fibration, cofibration) et f est un retract de g alors f est une équivalence faible (resp. fibration, cofibration) ;

MC4 – Axiome de relèvement: étant donné un carré commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & \bullet \arrow[d, "p"] \\
\bullet \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "\exists\varphi"] & \bullet
\end{tikzcd}$$

si i est une cofibration triviale et p est une fibration (resp. i est une cofibration et p est une fibration triviale) alors il existe un relèvement φ ;

MC5 – Axiome de factorisation: pour tout morphisme f de la catégorie M, il existe deux factorisations fonctorielles

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, tail, "\sim", "i"'] & & \bullet \\
& \bullet \arrow[ur, two heads, "p"'] &
\end{tikzcd}
\quad \text{et} \quad
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, tail, "i"'] & & \bullet \\
& \bullet \arrow[ur, two heads, "\sim", "p"'] &
\end{tikzcd}$$

Définition 1.4 (Fibration acyclique, cofibration acyclique). Une fibration (resp. cofibration) est dite *acyclique* (ou *triviale*) si c'est également une équivalence faible. On les notera respectivement par $\overset{\sim}{\twoheadrightarrow}$ et $\overset{\sim}{\rightarrowtail}$.

Exemple 1.5 (Intuition topologique 1). La catégorie est espaces topologiques Top est une catégorie de modèles pour la structure suivante :

- la classe Weak est formée des équivalences d'homotopie faibles, i.e. le morphismes induisant des isomorphismes entre tous les groupes d'homotopie ;
- la classe Fib est formée des *fibrations de Serre* i.e. pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{tikzcd} I^n \times \{0\} \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "p"] \\ I^n \times I \arrow[r] \arrow[ur, dotted, "\exists"] & Y \end{tikzcd}$$

  où I est l'intervalle $[0,1]$;
- la classe Cof est formée des rétracts d'inclusions celluaires généralisées.

Exemple 1.6 (Intuition topologique 2). La catégorie est espaces topologiques Top est une catégorie de modèles pour la structure suivante :

- la classe Weak est formée des équivalences d'homotopie faibles, i.e. le morphismes induisant des isomorphismes entre tous les groupes d'homotopie ;
- la classe Fib est formée des *fibrations de Hurewicz* i.e. pour tout espace topologique Z, on a

$$\begin{tikzcd} Z \times \{0\} \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "p"] \\ Z \times I \arrow[r] \arrow[ur, dotted, "\exists"] & Y \end{tikzcd}$$

- la classe Cof est défini par relèvement par rapport aux fibrations acycliques

Exemple 1.7 (Intuition algébrique). Soit R un anneau. La catégorie Ch_R des complexes de chaines $\mathbb{Z}$-gradués est munie de la structure de modèle suivante

- la classe Weak est formée des quasi-isomorphismes ;
- la classe Fib est formée des morphismes de complexes surjectifs en tout degré ;
- la classe Cof est définie par relèvement par rapport aux fibrations acycliques.

Cette structure est appelé la *structure projective.*

1.2. **Rétracts et relèvement.**

Cadre: toutes les flèches sont dans C, le diagramme solide

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & \bullet \arrow[d, "p"] \\ \bullet \arrow[r] \arrow[ur, dotted] & \bullet \end{tikzcd}$$

est donné. Si la flèche en pointillé existe, on dit que

— i possède la propriété de relèvement à gauche (PRG) pour p

— p possède la propriété de relèvement à droite (PRD) pour i

Proposition 1.8 (L'argument du rétract). *Soit* M *une catégorie de modèles et soit* $g\colon X \to Y$ *un morphisme.*

(1) Si l'on peut factoriser $g = p \circ i$ *où* p *a la PRD pour* g*, alors* g *est un rétract de* i*.*

(2) De même, si $g = p \circ i$ *où* i *a la PRG pour* g*, alors* g *est un rétract de* p

Démonstration. Par propriété de relèvement, on a

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "i"] \arrow[d] & Z \arrow[d, "p"] \\
Y \arrow[r, equal] \arrow[ur, dotted, "q"] & Y
\end{tikzcd}$$

ce qui induit le diagramme

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, equal] \arrow[d, "g"] & X \arrow[r, equal] \arrow[d, "i"] & X \arrow[d, "g"] \\
Y \arrow[r, "q"] & Z \arrow[r, "p"] & Y
\end{tikzcd}$$

□

Proposition 1.9 (cf. [Hir09, Prop. 7.2.3]). *Soit* M *une catégorie de modèle.*

(1) i *est une cofibration si et seulement si* i *a la PRG pour les fibrations triviales.*

(2) i *est une cofibration triviale si et seulement si* i *a la PRG pour les fibrations.*

(3) p *est une fibration si et seulement si* p *a la PRD pour les cofibrations triviales.*

(4) i *est une fibration triviale si et seulement si* p *a la PRD pour les cofibrations triviales.*

Démonstration. (1) Le sens $\Rightarrow$ par l'axiome MC4. Pour le sens $\Leftarrow$: Par MC5, on factorise $i = p \circ j$ avec p fibration triviale et j cofibration. Par la proposition precedente, i est un retract de j et par l'axiome MC3 i est une cofibration.

□

Proposition 1.10 (cf. [Hir09, Prop. 7.2.4]). *Les classes de fibrations et de cofibrations sont fermées sous compositions.*

Démonstration. Se déduit de la proposition précédente : on considère la composée de deux fibrations triviales $X \twoheadrightarrow X' \twoheadrightarrow Y$. Pour tout diagramme solide commutatif de la forme suivante

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[dd, tail, "\sim"'] & X \arrow[d, two heads] \\
 & X' \arrow[d, two heads] \\
B \arrow[r] \arrow[uur, dotted, "\tilde{q}"] \arrow[ur, dotted, "q"] & Y
\end{tikzcd}$$

avec $A \overset{\sim}{\rightarrowtail} B$ une cofibration triviale, il existe q puis $\tilde{q}$ par propriété de relèvement. □

Proposition 1.11 (cf. [Hir09, Prop. 7.2.5]). *Soit* $(\mathsf{M}, \mathsf{Weak}, \mathsf{Fib}, \mathsf{Cof})$ *une catégorie de modèle.*

(1) La classe Cof *des cofibrations est fermée sous coproduits.*

(2) La classe $\mathsf{Cof} \cap \mathsf{Weak}$ *des cofibrations acycliques est fermée sous coproduits.*

(3) La classe Fib *des fibrations est fermée sous produits.*

(4) La classe $\mathsf{Fib} \cap \mathsf{Weak}$ *des fibrations acycliques est fermée sous produits.*

Démonstration. Laissé en exercice : on pourra s'aider de la remarque suivante. □

Remarque additionnelle. On peut montrer que les classes Cof et $\mathsf{Cof} \cap \mathsf{Weak}$ sont stables par poussé en avant, c'est-à-dire que pour $f : X \to Y$ une cofibration (resp. une cofibration acyclique), et $u : X \to U$ un morphisme quelconque, alors le morphisme g défini par le poussé en avant suivant :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, tail, "f"'] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & U \arrow[d, "g"] \\ Y \arrow[r] & V \end{tikzcd}$$

est une cofibration (resp. une cofibration acyclique). En effet, considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "u"] \arrow[d, tail, "f"] & U \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\exists h_1"] & E \arrow[d, two heads, "p"', "\sim"] \\ Y \arrow[r] \arrow[urr, dotted] & V \arrow[r] \arrow[ur, dotted, "\exists h_2"] & B \end{tikzcd}$$

alors il existe h_1 par propriété de reèvement, puis, par propriété universelle du pushout, il existe h_2, d'où l'affirmation.

Proposition 1.12 (cf. [Hir09, Prop. 7.2.6]). *Soit* M *une catégorie de modèle. Un morphisme de* M *est une équivalence faible si et seulement si il se factorise en une cofibration triviale suivi d'une fibration triviale.*

Démonstration. Soit g une équivalence faible. On utilise l'axiome de factorisation MC5 et l'axiome 2-sur-3 pour montrer que g se factorise en une cofibration triviale suivi d'une fibration triviale. L'autre sens découle directement de l'axiome 2-sur-3. □

Proposition 1.13. *Soit* $(\mathsf{M}, \mathsf{Weak}, \mathsf{Fib}, \mathsf{Cof})$ *une catégorie de modèle. Deux des trois classes* Weak, Fib *et* Cof *déterminent la troisième.*

Démonstration. Il reste à montrer que les classes Fib et Cof déterminent la classe Weak. On sait par la proposition 1.12 que les fibrations triviales et les cofibrations triviales déterminent Weak. Or, par la proposition 1.9, Fib déterminent la classe des cofibrations triviales par la PR ? et Cof détermine la classe des fibrations triviales. □

Définition 1.14. Un objet X d'une catégorie de modèle M est dit

— *fibrant* si $X \to *$ est une fibration où $*$ est l'objet terminal ;

— *cofibrant* si $0 \to X$ est une cofibration où 0 est l'objet initial.

Les factorisations fonctorielles impliquent l'existence de de

$$0 \longrightarrow L(X) \longrightarrow X$$

où $L(X)$ est cofibrant. On dit que $L(X)$ est un *remplacement cofibrant* de X. Dualement, on a la notion de *remplacement fibrant*

$$X \longrightarrow R(X) \longrightarrow *$$

Exemple 1.15. Pour la structure de modèle projective (cf. exemple 1.7) sur Ch_R, tous les objets sont fibrants.

Exposé 2 – 22 nov. 2019 – Catégories de modèles II – Friedrich Wagemann

Remarque 2.1. Quels sont les "bons" foncteurs entre catégories de modèles ? Ce sont les adjonction.

Définition 2.2. Soient C et D deux catégories de modèles. Un foncteur $L\colon \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ est *foncteur de Quillen à gauche* si L est un adjoint à gauche et préserve les cofibrations et les cofibrations triviales. Un foncteur $R\colon \mathsf{D} \to \mathsf{C}$ est *foncteur de Quillen à droite* si R est un adjoint à droite et préserve les fibrations et les fibrations triviales. Une adjonction LR est une *adjonction de Quillen* si L est Quillen à gauche.

Proposition 2.3 (Critère de "Quillenité"). *Si pour tout X cofibrant dans C et pour tout Y fibrant dans D et si pour tout $f\colon LX \to Y$ est une équivalence faible dans D ssi le morphisme induit $X \to RY$ est une équivalence faible dans C, alors l'adjonction LR est de Quillen.*

2.1. **L'argument du petit objet**.

Remarque 2.4. Ici, on triche un peu, pour simplifier les problemes ensemblistes (ou non ensemblistes)

Définition 2.5. Un objet A dans C est dit $\mathbb{N}$-*petit* si pour tout foncteur $F\colon \mathbb{N} \to \mathsf{C}$, l'application canonique

$$\operatorname{colim}_{\mathbb{N}} \operatorname{Hom}_{\mathsf{C}}(A, F(n)) \longrightarrow \operatorname{Hom}_{\mathsf{C}}(A, \operatorname{colim}_{\mathbb{N}} F(n))$$

est un isomorphisme. Un objet est dit *compact* (ou *fini*) si la même application canonique est un isomorphisme pour toutes les colimites filtrées.

Exemple 2.6. Tout R-module (pour R un anneau commutatif) est petit. Les R-modules finis sont ceux avec une présentation finie.

On note

$$S^J(f) := \left\{ \begin{array}{c} \begin{tikzcd} A_i \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_i"] & X \arrow[d, "f"] \\ B_i \arrow[r] & Y \end{tikzcd} \end{array} |\alpha_i \in J \right\}$$

Soit d un élément de $S^J(f)$ i.e. un diagramme de la forme

$$\begin{tikzcd} A_{i,d} \arrow[r, "\phi_d"] \arrow[d, "\alpha_{i,d}"'] & X \arrow[d, "f"] \\ B_{i,d} \arrow[r, "\gamma_d"'] & Y \end{tikzcd}$$

A partir de $S^J(f)$, on fait le pushout suivant

$$\begin{tikzcd}
\coprod_{d\in S^J(f)} A_{i,d} \arrow[r, "\coprod \phi_d"] \arrow[d, "\coprod \alpha_{i,d}"'] & X \arrow[d] \arrow[ddr, bend left, "f"] & \\
\coprod_{d\in S^J(f)} B_{i,d} \arrow[r] \arrow[drr, bend right, "\coprod \gamma_d"'] & R^1(f,J) \arrow[dr, dotted, "\exists! f_1"] \arrow[ul, phantom, "\ulcorner"] & \\
& & Y
\end{tikzcd}$$

On itère la construction en posant $R^2(f,J)\colon R^1(f_1,J)$ et en notant $f_2\colon R^2(f,J) = R^1(f_1,J) \to Y$ la flèche canonique. Par récurrence, on obtient

$$R^n(f,J) = R^1(f_{n-1},J), f_n\colon R^n(f,j) \to Y \text{ canonique.}$$

On a aussi les flèches canoniques $X \to R^1(f,J)$, $R^1(f,J) \to R^2(f,J)$, … et un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r] \arrow[d, "f"] & R^1(f,J) \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & R^n(f,J) \arrow[r] & \cdots \\
Y \arrow[r, equal] & Y \arrow[r, equal] & \cdots \arrow[r, equal] & Y \arrow[r, equal] & \cdots
\end{tikzcd}$$

On pose

$$R^\infty(f,J) \coloneqq \operatorname{colim}_n R^n(J,f) \text{ et } f_\infty\colon R^\infty(f,J) \to Y.$$

Ceci donne la factorisation $X \to R^\infty(J,f) \to Y$.

Proposition 2.7 (Argument du petit objet (Quillen)). *Supposont que pour tout $j\colon A_i \to B_i \in J$, l'objet A_i est $\mathbb{N}$-petit. Alors $f_\infty\colon R^\infty(f,J) \to Y$ a la PRD pour les élément de J.*

Démonstration. Tous les A_i sont $\mathbb{N}$-petits donc toute flèche $p\colon A_i \to R^\infty(f,J)$ se factorise par un $R^n(f,J)$. Ainsi, tout diagramme

$$\begin{tikzcd}
A_i \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_i"] & R^\infty(f,J) \arrow[d, "f_\infty"] \\
B_i \arrow[r] & Y
\end{tikzcd}$$

se factorise

$$\begin{tikzcd}
A_i \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_i"] & R^n(f,J) \arrow[r] \arrow[d, "f_n"] & R^{n+1}(f,J) \arrow[r] \arrow[d, "f_{n+1}"] & R^\infty(f,J) \arrow[d, "f_\infty"] \\
B_i \arrow[r] \arrow[urr, dotted, "\exists \tilde{q}"'] & Y \arrow[r, equal] & Y \arrow[r, equal] & Y
\end{tikzcd}$$

Affirmation : il existe $\tilde{q}$. Cela se déduit de la définition de $R^{n+1}(f,J)$. Le diagramme

$$\begin{tikzcd}
A_i \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_i"] & R^n(f,J) \arrow[d, "f_n"] \\
B_i \arrow[r, "q"] & Y
\end{tikzcd}$$

est dans $S^J(f_n)$. Par ailleur, pour tout élément de $S^J(g)$, on a un morphisme $B_i \to R^1(g, J)$ par définition du pushout. Donc, ici, on a un morphisme $B_i \to R^1(f_n, J) = R^{n+1}(f, J)$. Ceci nous fournit un relèvement $B_i \to R^\infty(f, J)$. □

2.2. **Conséquences.**

Définition 2.8. Soit I une classe de morphismes d'une catégorie C quelconque.

(1) Un morphisme est dit *I-injectif* s'il vérifie la PRD pour tout morphisme de I.
(2) Un morphisme est dit *I-projectif* s'il vérifie la PRG pour tout morphisme de I.
(3) Un morphisme est dit *I-cofibrant* s'il vérifie la PRG par rapport aux morphismes I-injectifs.
(4) Un morphisme est dit *I-fibrant* s'il vérifie la PRD par rapport aux morphismes I-projectifs.

Remarque 2.9. Soit $(\mathsf{M}, \mathsf{Weak}, \mathsf{Fib}, \mathsf{Cof})$ une catégorie de mod'ele.

— Si on prend $I = \mathsf{Cof}$, alors les I-injectfs sont les fibrations triviales et les I-cofibrations sont les cofibrations.
— Si on prend $I = \mathsf{Fib}$, alors les I-projectifs sont les cofibrations triviales et les I-fibrations sont les fibrations.

Lemme 2.10. *(F, U, ϕ) une adjonction, $I \subset \mathrm{Mor}(\mathsf{C})$ et $J \subset \mathrm{Mor}(\mathsf{D})$. On a*

(1) $U(FI - \mathrm{inj}) \subseteq I - \mathrm{inj}$
(2) $F(I - \mathrm{cof}) \subseteq FI - \mathrm{cof}$
(3) $F(UJ - \mathrm{proj}) \subseteq J - \mathrm{proj}$
(4) $U(J - \mathrm{fib}) \subseteq UJ - \mathrm{ifb}$

Définition 2.11. Soit $I \subset \mathrm{Mor}(\mathsf{C})$. Un *complexe I-cellulaires relatif* est un morphisme $f\colon X \to Y$ où Y est colimite $\mathrm{colim}_s X_s$ et X_{s+1} est obtenu par pushout

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_i"] & R^n(f, J) \arrow[d, "f_n"] \\ B_i \arrow[r, "q"] & Y \end{tikzcd}$$

trou

Définition 2.12. Une catégorie de modèles est dites *cofibramement engendrée* s'il existe des classes de morphismes I et J dans C telles que

(1) les domaines des morphismes de I sont petits pour I-cell ;
(2) les domaines des morphismes de J sont petits pour J-cell ;
(3) la classe des fibrations est J-inj ;
(4) la classe des fibrations triviales est I-inj ;

On dit que I est l'ensemble des cofibrations génératrices et J est l'ensemble des cofibrations triviales génératrices.

Théorème 2.13. *Soit* C *une catégorie avec petites limites et petites colimites,* W *une sous-catégorie de* C*,* I *et* J *deux classes de morphismes de* C*. Alors il existe une structure de modèle cofibramment engendrée sur* C *avec*

(1) Weak *a la propriété 2-sur-3;*

(2) Les domaines de I *sont petits pour* $I-\mathrm{cell}$*;*

(3) Les domaines de J *sont petits pour* $J-\mathrm{cell}$*;*

(4) $J-\mathrm{cell} \subseteq X \cap (I-\mathrm{cof})$

(5) $J-\mathrm{cell} \subseteq X \cap (I-\mathrm{cof})$

Exposé 3 – 29 nov. 2019 – Opérades I : définitions – Johan Leray

But de ces exposés. Le but de ces exposé est d'expliquer comment on peut espérer étudier la catégorie des complexes de chaînes munis d'une certaine structure algébrique à quasi-isomorphismes près. On montrera comment la catégorie des algèbres sur une opérade est munie d'une structure de modèle ayant pour équivalence faible les quasi-isomorphismes des complexes de chaînes sous-jacents.

Notations. On note $\mathbb{S}_n$, le groupe des permutations de n éléments. La catégorie sous jacente à tout cet exposé est la catégorie Ch des complexes de chaînes $\mathbb{Z}$-gradué sur un anneau R au début et qui deviendra un corps k par la suite.

Références. Pour cet exposé, on s'appuiera très largement sur

- un des ouvrages de réfénce sur les opérades algébriques : *Algebraic Operads* de J.L. Loday et B. Vallette [LV12], notamment le chapitre 5 ;
- on pourra également regarder les premiers chapitres du premier tome de *Homotopy of operads and Grothendieck-Teichmuller groups* de B. Fresse.

On présente ici les objets algébriques et combinatoires qui encodent une grande classe de structure algébriques avec plusieurs entrées et une sortie.

3.1. **Cadre catégorique**.

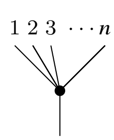
Définition 3.1 ($\mathbb{S}$-module). Un $\mathbb{S}$-*module* M est une famille indexée par $\mathbb{N}$, de complexes de chaînes $M(n)$, tel que chaque $M(n)$ est un $\mathbb{S}_n$-module (à droite) ; l'index de cette collection est appelée *l'arité*. Un morphisme $\phi\colon M \to N$ de $\mathbb{S}$-modules est une collection de morphisme $\phi(n)\colon M(n) \to N(n)$ de $\mathbb{S}_n$-modules. On note par $\mathbb{S}$-mod, la catégorie des $\mathbb{S}$-modules.

Remarque 3.2. On a l'équivalence de catégories

$$\mathbb{S}\text{-}\mathsf{mod} \simeq \mathrm{Func}(\mathsf{Bij}^{\mathrm{op}}, \mathsf{Ch})$$

entre la catégorie des $\mathbb{S}$-modules et la catégorie des foncteurs contravariants de la catégorie Bij des ensembles finis munis des bijections vers la catégorie des complexes de chaînes.

Remarque 3.3 (Une interprétation arboricole). Soit M un $\mathbb{S}$-module et soit n un entier. On pourra se représenter un élément de $M(n)$ comme un arbre dirigé du haut vers le bas (ou plutôt une somme formelle de tels arbres) à n feuilles labelées par les entiers $\{1, 2, \ldots, n\}$:



,

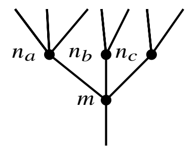
et où l'action de $\mathbb{S}_n$ correspond à la permutation des labels. Chacun de ces arbres dirigés peut être interpréter comme une opération algébrique à n entrées une sortie.
Pour le cas $n = 0$, on pourra représenter un élément comme un arbre sans branche


.

Définition 3.4 (Produit $\circ$). Pour tout $\mathbb{S}$-module M et N, le *produit de composition de M et N* est le $\mathbb{S}$-module $M \circ N$ défini, pour $n \in \mathbb{N}$, par

$$(M \circ N)(n) := \bigoplus_{k} M(k) \otimes_{\mathbb{S}_k} \left(\bigoplus_{\sum i_j = n} \mathrm{Ind}_{\mathbb{S}_{i_1} \times \ldots \times \mathbb{S}_{i_k}}^{\mathbb{S}_n} \left(N(i_1) \otimes \ldots \otimes N(i_k) \right) \right)$$

Remarque 3.5 (Une interprétation arboricole). Un élément de $M \circ N$ peut être représenté comme un arbre à deux niveaux, où le sommet du premier niveau est indexé par un élément de M et où les sommets du second niveau sont indexés par des éléments de N :



avec m dans M et n_a, n_b et n_c dans N.

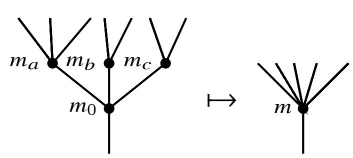
3.2. **Définition(s) et premiers exemples**.

Définition 3.6 (Opérade). On appelle *opérade (algébrique symétrique)* un monoïde dans la catégorie ($\mathbb{S}$-mod, $\circ$, $\mathscr{I}$), i.e. une opérade $(\mathscr{O}, \mu, \varepsilon)$ est un $\mathbb{S}$-module $\mathscr{O}$ muni de morphismes de $\mathbb{S}$-modules $\mu \colon \mathscr{O} \circ \mathscr{O} \to \mathscr{O}$ et $\varepsilon \colon \mathscr{I} \to \mathscr{O}$ tels que les diagrammes

$$\begin{tikzcd}
\mathscr{O} \circ \mathscr{O} \circ \mathscr{O} \arrow[r, "\mathscr{O} \circ \mu"] \arrow[d, "\mu \circ \mathscr{O}"'] & \mathscr{O} \circ \mathscr{O} \arrow[d, "\mu"] \\
\mathscr{O} \circ \mathscr{O} \arrow[r, "\mu"] & \mathscr{O}
\end{tikzcd}
\quad \text{et} \quad
\begin{tikzcd}
 & \mathscr{O} \arrow[dl, "\varepsilon \circ \mathscr{O}"'] \arrow[d, equal] \arrow[dr, "\mathscr{O} \circ \varepsilon"] & \\
\mathscr{O} \circ \mathscr{O} \arrow[r, "\mu"'] & \mathscr{O} & \mathscr{O} \circ \mathscr{O} \arrow[l, "\mu"]
\end{tikzcd}$$

commutent. On note par Op, la catégorie des opérades.

Remarque 3.7 (Interprétation arboricole). Une opérade est donc muni d'une application qui permet de greffer deux niveaux d'arbres



.

Remarque 3.8 (Une généralisation des algèbres associatives). La notion d'opérade est une généralisation de la notion d'algèbre associative. Considérons A une algèbre associative, alors le $\mathbb{S}$-module $\mathscr{A}$ défini par $\mathscr{A}(1) = A$ et $\mathscr{A}(n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N} \backslash \{1\}$ possède une structure d'opérade induite par le produit et l'unité de A. À l'inverse, étant donné une opérade $\mathscr{O}$, le complexe de chaînes $\mathscr{O}(1)$ est une k-algèbre associative unitaire.

Proposition 3.9 (Compositions partielles (cf. [LV12, Sect. 5.3.4.])). *Une structure d'opérade sur un $\mathbb{S}$-module $\mathscr{O}$ est équivalente à la donnée d'applications*

$$- \circ_i - \colon \mathscr{O}(m) \otimes \mathscr{O}(n) \longrightarrow \mathscr{O}(m + n - 1)$$

pour $i \in [\![1, m]\!]$, avec des propriétés d'associativité et des compatibilités avec les actions des groupes symétriques.

Exemple 3.10 (Opérade End_V). Soit V un complexe de chaînes. Le $\mathbb{S}$-module des endomorphismes de V, noté End_V, est défini, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :

$$\mathrm{End}_V(n) := \mathrm{Hom}_{\mathsf{Ch}}(V^{\otimes n}, V) \ .$$

La composition des morphismes nous fournit une structure d'opérade sur End_V, que l'on appelera donc *opérade des endomorphismes de* V.

Exemple 3.11 (Les opérades Com et uCom). Considérons les $\mathbb{S}$-modules Com et uCom définis, pour $n \in \mathbb{N}$, par

$$\mathrm{uCom}(n) := k \ \text{ et } \ \mathrm{Com}(n) := \begin{cases} k & \text{si } n \neq 0 \ , \\ 0 & \text{si } n = 0 \ . \end{cases}$$

On les munit des compositions partielles toutes données par l'identité $k \otimes k \to k$: on a définit les opérades Com des algèbres commutatives non-unitaires et uCom des algèbres commutatives unitaires.

Remarque additionnelle. Comment généraliser la notion d'opérade dans un cadre plus large ? Un $\mathbb{S}$-*module de* C est un foncteur contravariant de la catégorie Bij des ensembles finis munis des bijections dans la catégorie monoïdale symétrique $(\mathsf{C}, \otimes, I)$. On peut dans ce cadre, définir le produit $\circ$ et ainsi parler d'opérade symétrique dans C. Par exemple, on peut considérer la notion d'*opérade topologique*, en prenant $(\mathsf{C}, \otimes, I) = (\mathsf{Top}, \amalg, *)$.

3.3. **Opérade libre**.

Proposition 3.12 (Opérade libre $\mathscr{T}$). *Soit V un $\mathbb{S}$-module. L'*opérade libre sur V *est définie, pour $n \in \mathbb{N}$, par*

$$\mathscr{T}(V)(N) := \bigoplus_{T \in \mathcal{T}(n)} V_T$$

où $\mathcal{T}(n)$ est l'ensemble des arbres à n-feuilles et V_T est défini par

dessin

Elle satisfait la propriété universelle suivante : pour tout morphisme $\phi \colon V \to \mathcal{O}$ de $\mathbb{S}$-modules où $\mathcal{O}$ est une opérade, alors il existe un unique morphisme d'opérades $\tilde{\phi}$ tel que le diagramme

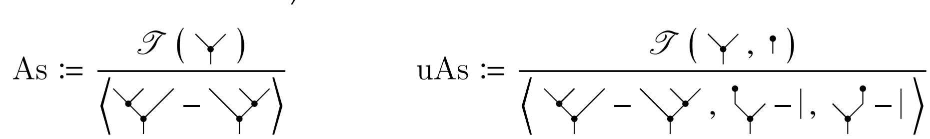
$$\begin{tikzcd} V \arrow[r] \arrow[dr] & \mathscr{T}(V) \arrow[d, dotted, "\exists\tilde{\phi}"] \\ & \mathcal{O} \end{tikzcd}$$

commute. Cette propriété universelle correspond à l'adjonction

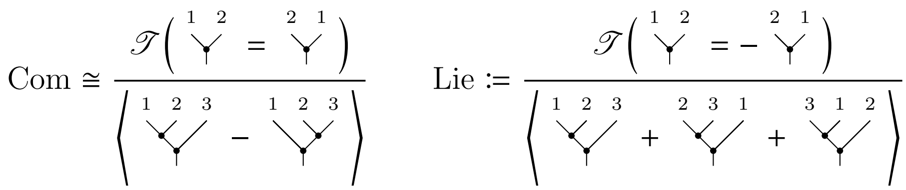
$$\begin{tikzcd} \mathbb{S}\text{-mod} \arrow[r, shift left, "\mathcal{T}"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathsf{Op} \arrow[l, shift left, "U"] \end{tikzcd} \ .$$

On peut alors définir des opérades par générateurs et relations.

Exemple 3.13 (Les opérades As et uAs).



Exemple 3.14 (Les opérades Com et Lie).



Exposé 4 – 06 déc. 2019 – Opérades II : algèbres sur une opérade – Johan Leray

Références. Pour cet exposé, on s'appuiera très largement sur

— un des ouvrages de réfénce sur les opérades algébriques : *Algebraic Operads* de J.L. Loday et B. Vallette [LV12] ;

— V. Hinich *Homological algebra of homotopy algebras* ;

— B. Vallette *Homotopy theory of homotopy algebras* ;

— on pourra également regarder les premiers chapitres du premier tome de *Homotopy of operads and Grothendieck-Teichmuller groups* de B. Fresse.

4.1. **Rappels.**

4.2. **Algèbre sur une opérade.**

Définition 4.1 (Algèbre sur une opérade). Soit X un complexe de chaînes et soit $\mathscr{O}$ une opérade. Une *structure de $\mathscr{O}$-algèbre sur X* est la donnée d'un morphisme d'opérade

$$\mathscr{O} \longrightarrow \mathrm{End}_X \ .$$

Exemple 4.2 (As-algèbre = algèbre associative non-unitaire). Une structure de As-algèbre sur un complexe de chaînes X est la donnée d'un morphisme

$$\begin{aligned} \mathrm{As} := \frac{\mathscr{T}(\curlyvee)}{\left\langle \curlyvee\!\!\!\curlyvee - \curlyvee\!\!\!\curlyvee \right\rangle} &\longrightarrow \mathrm{End}_X \\ \curlyvee \quad &\longmapsto (\mu\colon X \otimes X \to X) \end{aligned}$$

tel que $\mu(\mu \otimes X) = \mu(X \otimes \mu)$, donc μ est un produit associatif (non-unitaire) sur X.

Définition 4.3 (Foncteur de Schur). Soit $\mathscr{O}$ une opérade. Le *foncteur de Schur* associé à $\mathscr{O}$ est l'endofoncteur

$$\begin{aligned} \mathscr{O}(-)\colon \mathsf{Ch} &\longrightarrow \mathsf{Ch} \\ X &\longmapsto \bigoplus_{n \in \mathbb{N}^*} \mathscr{O}(n) \otimes_{\mathbb{S}_n} X^{\otimes n} \end{aligned} \ .$$

Remarque 4.4. Pour toute opérade $\mathscr{O}$ et pour tout complexe de chaînes X, on a l'isomorphisme de complexes de chaînes

$$\mathscr{O}(X) \cong \mathscr{O} \circ X$$

où, dans le terme de droite, X est vu comme un $\mathbb{S}$-module concentré en arité 0. On a ainsi l'isomorphisme de complexe de chaînes

$$\mathscr{O}(\mathscr{O}(X)) \cong \mathscr{O} \circ \mathscr{O}(X) \ ,$$

directement induit par l'isomorphisme précédent et l'associativité du produit monoïdal $\circ$.
Cela explique notamment la notation $\circ$ pour le produit opéradique, qui correspond à la composition de foncteur de Schur.

Proposition 4.5. *Une structure de $\mathcal{O}$-algèbre sur un complexe de chaînes X est équivalente à un morphisme $\mu_X : \mathcal{O}(X) \to X$ de complexes de chaînes satisfaisant les diagrammes commutatifs suivants :*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O} \circ \mathcal{O}(X) \arrow[r, phantom, "\cong"] \arrow[d, "\mu_{\mathcal{O}}"] & \mathcal{O}(\mathcal{O}(X)) \arrow[r, "\mathcal{O}(\mu_X)"] & \mathcal{O}(X) \arrow[d, "\mu_X"] \\ \mathcal{O}(X) \arrow[rr, "\mu_X"] & & X \end{tikzcd} \quad \textit{et} \quad \begin{tikzcd} \mathcal{I}(X) \arrow[r, "\eta(X)"] \arrow[dr, equal] & \mathcal{O}(X) \arrow[d, "\mu_X"] \\ & X \end{tikzcd} .$$

Démonstration. Soit $(X, \alpha : \mathcal{O} \to \mathrm{End}_X)$ une $\mathcal{O}$-algèbre. On associe à α le morphisme $\mathcal{O}(X) \to X$ suivant

$$\begin{tikzcd} \bigoplus_n \mathcal{O}(n) \otimes_{\mathbb{S}_n} X^{\otimes n} \arrow[r, dotted] \arrow[d, "\oplus_n \alpha(n) \otimes X^{\otimes n}"'] & X \\ \bigoplus_n \mathrm{End}_X(n) \otimes_{\mathbb{S}_n} X^{\otimes n} \arrow[ur, "\mathrm{ev}"'] & \end{tikzcd} .$$

Inversement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, un morphisme $\mathcal{O}(n) \otimes_{\mathbb{S}_n} X^{\otimes n} \to X$ de complexes de chaînes correspond à un morphisme $\mathbb{S}_n$-équivariant

$$\mathcal{O}(n) \longrightarrow \mathrm{Hom}(X^{\otimes n}, X) .$$

□

Proposition 4.6 (cf. [LV12, Chap. 5]). *Soit $(\mathcal{O}, \mu_{\mathcal{O}})$ une opérade et soit X un complexe de chaînes. Le complexe de chaînes $\mathcal{O}(V)$ est la $\mathcal{O}$-algèbre libre, c'est-á-dire que pour tout morphisme de complexes de chaînes $\phi : X \to A$ où A est une $\mathcal{O}$-algèbre, alors il existe un unique morphisme de $\mathcal{O}$-algèbre $\tilde{\phi}$ tel que le diagramme*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook] \arrow[dr, "\phi"'] & \mathcal{O}(X) \arrow[d, dotted, "\exists \tilde{\phi}"] \\ & A \end{tikzcd}$$

commute.

Proposition 4.7 (A passer en premiére lecture). *Soit $\phi : \mathcal{O} \to \mathcal{P}$ un morphisme d'opérade. On a l'adjonction*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}\text{-alg} \arrow[r, shift left, "\phi^*"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{P}\text{-alg} \arrow[l, shift left, "\phi_*"] \end{tikzcd}$$

où

— *ϕ_* est le foncteur* image directe *défini par un oubli d'une part de la structure : pour une $\mathcal{P}$-algèbre (A, μ), $\phi_*(A)$ possède le même complexe de chaînes, muni du morphisme de structure*

$$\mathcal{O}(n) \otimes A^{\otimes n} \xrightarrow{\phi(n) \otimes A^{\otimes n}} \mathcal{P}(n) \otimes A^{\otimes n} \xrightarrow{\mu} A$$

— *ϕ^* est le foncteur* image inverse *défini par le coegalisateur suivant*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{P} \circ \mathcal{O} \circ A \arrow[r, shift left, "\mu_{\mathcal{P}}(\mathcal{P} \circ \phi)"] \arrow[r, shift right, "\mathcal{P} \circ \mu_A"'] & \mathcal{P} \circ A \arrow[r] & \phi^*(A) \end{tikzcd} .$$

4.3. **Structure de modèle.** Ici, on suit Hinich, Vallette, Le Grignou

4.3.1. *Les théorèmes.* Comme on l'a vu dans les exposés précédents, la liste d'axiome pour etre une catégorie de modèle est longue : il est donc difficile de montrer trois classes de morphismes Weak, Fib et Cof d'une catégorie M forment une structure de modèle.
Une technique pour construire des structures de modèles sur une catégorie C est de *transférer* la structure déjà existante sur une catégorie M via une adjonction. Par exemple, on peut vouloir étudier la catégorie des algèbres associatives à quasi-isomorphisme près, i.e. la catégorie $\mathrm{As}\text{-}\mathsf{alg}[\mathrm{qu}-\mathrm{iso}^{-1}]$, donc construire une structure de modèle sur $\mathrm{As}\text{-}\mathsf{alg}$ où les équivalences faibles sont les morphismes d'algèbres f tels que $U(f)$ est un quasi-isomorphisme et $U\colon \mathrm{As}\text{-}\mathsf{alg} \to \mathsf{Ch}$ est le foncteur oubli.

Théorème 4.8 (Théorèmes de transfert de structure de modèle). *ref : Hess, Kedziorek, Rielh, Shipley – A necessary and sufficient condition for induced model structures – Cor 3.3.4, Thm 2.2.1 On considère les adjonctions suivantes :*

$$\begin{tikzcd} \mathsf{K} \arrow[r, shift left, "V"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathsf{M} \arrow[l, shift left, "L"] \arrow[r, shift left, "F"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathsf{C} \arrow[l, shift left, "U"] \end{tikzcd}$$

où les catégories C et K sont présentables *(i.e. elles ont de bonnes colimites et sont engendrées par un ensemble d'objets κ-compact par colimites κ-filtrées) et où M est une catégorie de modèle* combinatoire *(présentable et munie d'une structure de modèle cofibramment engendrée).*

Transfert à droite: *Supposons que*

(1) pour tout X dans C, il existe $\eta_X\colon X \to RX$ tel que $U(\eta_X)$ est fibrant dans M ;

(2) pour tout morphisme $f\colon X \to Y$ de C, il existe un morphisme $Rf\colon RX \to RY$ tel que $\eta_Y \circ Rf = f \circ \eta_X$;

(3) pour tout X dans C, il existe un factorisation

$$RX \xrightarrow{\quad j \quad} \mathrm{Path}(RX) \xrightarrow{\quad p \quad} RX \times RX$$

de la diagonale telle que $U(j)$ est une équivalence faible et $U(p)$ est une fibration.

Alors, les classes de morphismes $U-\mathsf{Weak}$ et $U-\mathsf{Fib}$ de la catégorie C, définies par f est dans $U-\mathsf{Weak}$ (resp. $U-\mathsf{Fib}$) si $U(f)$ est une équivalence faible (resp. fibration) de M, munissent la catégorie C d'une structure de modèle.

Transfert à gauche: *A passer en premiére lecture Supposons que*

(1) pour tout X dans K, il existe $\varepsilon_X\colon QX \to X$ tel que $V(\varepsilon_X)$ est cofibrant dans M ;

(2) pour tout morphisme $f\colon X \to Y$ de K, il existe un morphisme $Qf\colon QX \to QY$ tel que $\varepsilon_Y \circ f = Qf \circ \varepsilon_X$;

(3) pour tout X dans K, il existe un factorisation

$$QX \amalg QX \xrightarrow{\quad j \quad} \mathrm{Cyl}(QX) \xrightarrow{\quad p \quad} QX$$

de la codiagonale telle que $V(j)$ est une cofibration et $V(p)$ est une équivalence faible.

Alors, les classes de morphismes $V-\mathsf{Weak}$ et $V-\mathsf{Cof}$ de la catégorie K, définies par f est dans $V-\mathsf{Weak}$ (resp. $V-\mathsf{Cof}$) si $V(f)$ est une équivalence faible (resp. cofibration) de M, munissent la catégorie K d'une structure de modèle.

Remarque 4.9. Le théorème de transfert à droite est connu depuis longtemps, sous différentes formulations (Hinich,Merkulov-Vallette). Le théorème de transfert à gauche est beaucoup plus récent (Hess).

Remarque 4.10. Il existe un certain nombre de théorèmes pour montrer qu'une catégorie est présentable, mais cela peut être une propriété difficile à vérifier.

Remarque 4.11. Supposons que tous les objets de la catégorie M soient fibrants (resp. cofibrants), alors il ne reste que l'assertion de factorisation à vérifier pour faire le transfert à droite (resp. à gauche).

Remarque 4.12 (Rappel sur la structure de modèle projective sur Ch). On rappelle que la structure de modèle projective sur Ch est donnée par les deux classes suivantes

— les équivalences faibles sont les quasi-isomorphismes ;

— les fibrations sont les surjections degré par degré .

Notons que tous les complexes de chaînes sont fibrants, car pour tout complexe $V \to 0$ est une surjection. Enfin, cette structure est *cofibrement engendrée* par les classes de morphismes suivants

$$I := \{S^{d-1} \hookrightarrow D^d\} \text{ et } J := \{0 \hookrightarrow D^d\} ,$$

où, pour tout $d \in \mathbb{Z}$, on a

$$S^d := \quad \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \underset{d}{R} \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

$$\text{et } D^d := \quad \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \underset{d-1}{R} = \underset{d}{R} \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \quad .$$

Via l'adjonction

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Ch} \arrow[r, shift left, "\mathscr{O}(-)"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathscr{O}\text{-}\mathsf{alg} \arrow[l, shift left, "U"] \end{tikzcd}$$

et le théorème de transfert à droite, on obtient le théorème suivant.

Théorème 4.13 (Structure de modèle projective sur $\mathscr{O}$-alg). *La catégorie des $\mathscr{O}$-algèbres est munie de la structure de modèle où*

— *les équivalences faibles sont les quasi-isomorphismes ;*

— *les fibrations sont les morphismes surjectifs degré par degré.*

Démonstration. Voir Hinich Thm 4.1.1 ou Hess... Prop 6.2.1 Soit $i : A \to B$ un morphisme de $\mathscr{O}$-algèbres. On considère

$$A \xrightarrow{\sim} A \amalg (\mathscr{O}(B \oplus s^{-1}B), \partial) \xrightarrow{i+q} B$$

avec $\partial(b)s^{-1}b$ et où $q(b) = b$ et $q(s^-1b) = db$. La premiere fleche est clairement un quasi-iso et la seconde est un morphisme surjectif. On applique cela à $B = A \times A$. □

4.3.2. *Structure de modèle sur* Op. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a l'adjonction

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Ch} \arrow[r, shift left, "k[\mathbb{S}_n]\otimes-"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & k[\mathbb{S}_n]\text{-}\mathsf{mod} \arrow[l, shift left, "U"] \end{tikzcd}$$

On peut montrer que, par transfert à droite, la catégorie $k[\mathbb{S}_n]$-mod munie pour équivalence faible des quasi-isomorphismes de complexes de chaînes et pour fibrations des surjections degré par degré, est une catégorie de modèle. Comme le produit de catégories de modèle est muni d'une structure de modèle canonique (cf. Hovey), on a le résultat suivant.

Proposition 4.14 (Structure de modèle projective sur $\mathbb{S}$-mod). *La catégorie des $\mathbb{S}$-modules est munie d'une structure de modèle pour laquelle*

- *les équivalence faible sont les morphismes $f\colon M \to N$ tels que pour toute arité $n \in \mathbb{N}$, le morphisme $f(n)\colon M(n) \to N(n)$ est un quasi-isomorphisme de complexes de chaînes;*
- *les fibrations les morphismes $f\colon M \to N$ tels que pour toute arité $n \in \mathbb{N}$, le morphisme $f(n)\colon M(n) \to N(n)$ est une surjection degré par degré.*

De plus, cette structure est cofibramment engendré par les classes de morphismes suivants

$$I_n := \{S_n^{d-1} \hookrightarrow D_n^d\} \text{ et } J_n := \{0 \hookrightarrow D_n^d\}\ ,$$

où, pour tout $d \in \mathbb{Z}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$S_n^d := \quad \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \underset{d}{R[Sy_n]} \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots$$

$$\text{et } D_n^d := \quad \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \underset{d-1}{R[\mathbb{S}_n]} = \underset{d}{R[\mathbb{S}_n]} \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots \quad .$$

Rappelons que l'on a l'adjonction

$$\begin{tikzcd} \mathbb{S}\text{-mod} \arrow[r, shift left, "\mathscr{T}"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathsf{Op} \arrow[l, shift left, "U"] \end{tikzcd} \ ;$$

celle-ci induit, par transfert à droite, le théorème suivant.

Théorème 4.15 (Structure de modèle sur Op (cf. Hinich,Fresse)). *La catégorie des opérades est munie d'une structure de modèle pour laquelle les équivalences faibles (resp. fibrations) sont les morphismes d'opérades f tel que $U(f)$ est une équivalence faible (resp. fibration) de Sy-modules.*

4.3.3. *Remplacement cofibrant dans* Op. Ici, on suppose les opérades réduites, i.e. $\mathscr{O}(0) = 0$.

Définition 4.16.

- Soit $\mathscr{O}$ une opérade augmentée (i.e. avec un morphisme d'opérade $\mathscr{O} \to \mathscr{I}$), on définit *la construction bar sur* $\mathscr{O}$, notée $\mathrm{B}(\mathscr{O})$, par

$$\mathrm{B}(\mathscr{O}) := (\mathscr{T}^c(s\overline{\mathscr{O}}), d_{\mathscr{O}} + d_2)$$

où s est un de degré 1, $\overline{\mathscr{O}}$ est l'idéal de l'augmentation et d_2 est définie comme l'unique codérivation induite par l'application de degré -1 suivante

$$d_2\colon \mathscr{T}^c(s\overline{\mathscr{O}}) \longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow \mathscr{T}^c(s\overline{\mathscr{O}})^{(2)} \xrightarrow{\mu_{\mathscr{O}}} s\overline{\mathscr{O}} \quad .$$

- Soit C une coopérade coaugmentée conilpotente, on définit *la construction cobar de* C, notée $\Omega\mathsf{C}$, par

$$\Omega(\mathscr{O}) := (\mathscr{T}(s^{-1}\overline{\mathsf{C}}), d_{\mathsf{C}} + d_2)$$

où $\overline{\mathsf{C}}$ est le conoyau de la counité et d_2 est définie comme l'unique dérivation induite par l'application de degré -1 suivante

$$d_2\colon s^{-1}\overline{\mathsf{C}} \xrightarrow{\Delta_{(1)}} (s^{-1}\overline{\mathsf{C}}) \circ_{(1)} (s^{-1}\overline{\mathsf{C}}) \cong \mathscr{T}(s^{-1}\overline{\mathsf{C}})^{(2)} \hookrightarrow \mathscr{T}(s^{-1}\overline{\mathsf{C}}) \ .$$

Proposition 4.17 (Adjonction bar-cobar). *On a l'adjonction suivante*

$$\begin{tikzcd} \mathsf{Op}^{\mathrm{aug}} \arrow[r, shift right, "\mathrm{B}"'] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathsf{Coop}^{\mathrm{coaug,conil}} \arrow[l, shift right, "\Omega"'] \end{tikzcd} \ .$$

De plus, pour toute opérade augmentée $\mathcal{O}$, le morphisme

$$\Omega\mathrm{B}\mathcal{O} \xrightarrow{\ \sim\ } \mathcal{O}$$

est une résolution cofibrante de $\mathcal{O}$

Remarque 4.18 (Dualité de Koszul). Dans le cas où $\mathcal{O}$ est une *opérade quadratique*, il existe une propriété homologique (on dit alors que $\mathcal{O}$ est de Koszul) telle que si elle est vérifiée, alors on a la donnée explicite de la résolution cofibrante *minimale* de $\mathcal{O}$. C'est la *dualité de Koszul.* Si $\mathcal{O}$ est définie par générateurs et relations, cette propriété homologique peut être vérifier en exhibant *une base de Gröbner* ou *une base PBW* de $\mathcal{O}$. On peut également montrer qu'une opérade est de Koszul par réecriture.

Exemple 4.19 (Opérade As_∞).

$$\mathrm{As}_\infty := \Big(\mathscr{T}(\, m_2\,,\ m_3\,,\ \ldots\ m_n\,,\ \ldots\,)\,,\partial\Big)$$

avec $|m_n| = n-2$, et où la différentiel ∂ est définie par

$$\partial(m_n) = -\sum_{p+q=n+1} (-1)^{\varepsilon} m_p \circ_k m_q \ .$$

Par exemple, on a

$$\partial(m_3) = -m_2 \circ_1 m_2 + m_2 \circ_2 m_2 \ ;$$

le terme m_3 controle donc l'associativité du terme m_2.

4.4. **$\mathcal{O}$-algèbre à homotopie près.**

Définition 4.20 ($\mathcal{O}$-algèbre à homotopie près). Soit V un complexe de chaînes et soit $\mathcal{O}$ une opérade. Une *structure de $\mathcal{O}$-algèbre à homotopie près sur V* est la donnée d'un morphisme d'opérade

$$\mathcal{O}_\infty \longrightarrow \mathrm{End}_V \ ,$$

avec $\mathcal{O}_\infty \overset{\sim}{\twoheadrightarrow} \mathcal{O}$, un remplacement cofibrant de $\mathcal{O}$.

On justifie la terminologie par les résultats suivants.

Théorème 4.21 (Hinich thm 4.6.4 et 4.7.4). *Soit $\phi\colon \mathcal{O} \to \mathcal{P}$ un morphisme d'opérades. Alors l'adjonction*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}\text{-}\mathsf{alg} \arrow[r, shift left, "\phi^*"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathcal{P}\text{-}\mathsf{alg} \arrow[l, shift left, "\phi_*"] \end{tikzcd}$$

est une adjonction de Quillen ; de plus, si ϕ est un quasi-isomorphisme, alors cette adjonction est une équivalence de Quillen.

Définition 4.22 (∞-morphismes, ∞-quasi-isomorphisme)**.** todo

Théorème 4.23 (Vallette)**.** *Soit $\mathcal{O}$ une opérade et soit $\mathcal{O}_\infty := \Omega\mathsf{C}$ une résolution cofibrante de $\mathcal{O}$. On a*

$$\mathrm{ho}(\mathcal{O}\text{-}\mathsf{alg}) \cong \mathrm{ho}(\infty\text{-}\mathcal{O}_\infty\text{-}\mathsf{alg})$$

où $\mathrm{ho}(\infty\text{-}\mathcal{O}_\infty\text{-}\mathsf{alg})$ et beaucoup plus facile à décrire car pour tout ∞-quasi-isomorphisme $f\colon X \longrightarrow Y$ de $\mathcal{O}_\infty$-algèbre, il existe un ∞-quasi-isomorphisme $g\colon Y \longrightarrow X$ qui est son inverse en homologie.

Exposé 5 – 13 déc. 2019 – Séance d'exercices : Opérades – Salim Rivière

— Soit $\mathscr{P}$ l'opérade dont les espaces d'opérations sont donnés, pour tout entier n, par $\mathscr{P}(n) = \mathbb{K}$ (muni de l'action triviale de Σ_n). Quelles sont les $\mathscr{P}$-algèbres ?

— Expliciter les espaces d'opérations $\mathscr{L}ie(n)$ (pour $n \in \{1, 2, 3\}$) de l'opérade $\mathscr{L}ie$ dont les algèbres sont les algèbres de Lie. Déterminer la dimension de $\mathscr{L}ie(n)$ pour tout n.

— Déterminer les espaces d'opérations de l'opérade des algèbres magmatique (espaces vectoriels munis d'un produit binaire sans symétrie ni relation).

— Soit $\mathbb{O}$ une opérade et $\mathbb{O}(-) : V \mapsto \mathbb{O}(V)$ le foncteur de Schur associé. Montrer que $\mathbb{O}(-)$ est à valeur dans la catégories des $\mathbb{O}$-algèbres et justifier la terminologie "$\mathbb{O}$-algèbre libre".

— Montrer que la flèche p du diagramme de $\mathbb{O}$-algèbres

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "j"] \arrow[dr, tail, "i"'] & & B \\ & A \coprod \mathbb{O}(B \oplus B[1]) \arrow[ur, two heads, "p"'] & \end{tikzcd}$$

est une fibration acyclique.

Exposé 6 – 20 déc. 2019 – Séance d'exercices : Catégories de modèles – Salim Rivière

Soit M une catégorie de modèles.

— Démontrer que l'existence d'objets cylindres permet de définir une notion d'homotopie $\sim$ entre les morphismes.

— Montrer que le sous-quotient $\mathsf{M}_{\mathrm{cof-fib}}/\sim$ est une localisation de M.

— Dans le cas où M est abélienne, comparer cette construction à celle de la catégorie dérivée.

— Soit X un espace topologique pointé. Expliciter le produit fibré homtopique

$$\mathrm{pt} \times^h_X \mathrm{pt}$$

dans la catégorie de modèles Top_* des espaces topologiques pointés.

— Soit $\mathbb{K} \oplus \mathbb{K}[n]$ l'extension de carré nul de $\mathbb{K}$ par $\mathbb{K}[n]$. Montrer que le carré

$$\begin{tikzcd} \mathbb{K} \oplus \mathbb{K}[n] \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{K} \arrow[d] \\ \mathbb{K} \arrow[r] & \mathbb{K} \oplus \mathbb{K}[n+1] \end{tikzcd}$$

est homotopiquement cartésien dans la catégorie des algèbres artiniennes différentielles graduées.

Exposé 7 – 17 jan. 2020 – Infini-catégories I – Salim Rivière

Références. Les références utilisées pour préparer cet exposé sont

— Lurie, Cisinski, Joyal, Rezk.

Une catégorie est modelée pour travailler avec la notion d'isomorphisme et de composition stricte, comment assouplir ces notions de manière cohérente ?

7.1. **Ensemble simpliciaux, nerf.**

Δ est la catégorie des ensembles finis totalement ordonnés $[n] := \{0, 1, \cdots, n\}$ avec morphismes les applications croissantes. Les morphismes sont engendrés par les injections croissantes $\partial_i : [n-1] \to [n]$ (faces) et les surjections croissantes $s_j : [n] \to [n-1]$ (dégénerescences) assujetties au relations cosimpliciales usuelles.
Un *ensemble simplicial* est un foncteur de Δ dans Set (i.e. un préfaisceau sur Δ). La catéogrie des ensembles simpliciaux sera notée Set_Δ. L'image de $[n]$ par un ensemble simplicial X est notée X_n, ses éléments sont le n simplexes de X (qui est lui-même souvent noté $X_\bullet$). X est déterminé de manière unique par la collection des X_n et la donnée d'applications d_i, s_j satisfaisant les relations simpliciales usuelles.

Exemples. Les simplexes standards définis Δ^n à via le plongement de Yoneda : $\Delta^n := \mathrm{Hom}_{\mathsf{Set}_\Delta}(-; [n])$.

Un n-simplexe $\sigma \in X_n$ d'un ensemble simplicial $X_\bullet$ est identifié (via le lemme de Yoneda) à un morphisme $\sigma : \Delta^n \to X_\bullet$.
Une ensemble simplicial s'étend de manière unique en un foncteur $J \mapsto X(J)$ défini sur la catégorie de tous les ensembles totalement ordonnés.
La catégorie Δ se plonge dans celle des petites catégories, notée Cat, en voyant un ensemble totalement ordonné $[n]$ comme une catégorie $\iota[n]$ dont les objets sont les entiers 0, 1, ..., n telle que

$$\mathrm{Hom}_{\iota[n]}(i, j) = \begin{cases} \{*\} & \text{si } i > j \\ \emptyset & \text{si } i \leq j \end{cases}$$

Définition 7.1. Le *nerf* d'une catégorie C est l'ensemble simplicial $N_\bullet \mathsf{C}$ dont les n simplexes sont définis par

$$N_n \mathsf{C} := \mathrm{Hom}_{\mathsf{Cat}}(\iota[n]; \mathsf{C})$$

Remarque 7.2. Le foncteur nerf N est la précomposition du plongement de Yoneda $\mathsf{Cat} \to \mathsf{Set}_{\mathsf{Cat}}$ par l'inclusion $\iota : \Delta \subset \mathsf{Cat}$. Cisinski remarque que le foncteur nerf est donc l'adjoint à droite de l'extension de Kan à gauche du plongement de Yoneda $\Delta^\bullet : \Delta \to \mathsf{Set}_\Delta$ le long de $\iota : \Delta \subset \mathsf{Cat}$. En effet, en notant $E : \mathsf{Set}_\Delta \to \mathsf{Cat}$ cette extension :

$$\begin{tikzcd} \Delta \arrow[r] \arrow[d] & \mathsf{Cat} \\ \mathsf{Set}_\Delta \arrow[ur, dotted, "E"] & \end{tikzcd}$$

il s'ensuit que pour que N soit l'adjoint de E, il faut que

$$N_n \mathsf{C} = \mathrm{Hom}_{\mathsf{Set}_\Delta}(\Delta^n, N\mathsf{C}) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{Cat}}(E\Delta^n, \mathsf{C}) = \mathrm{Hom}_{\mathsf{Cat}}(\iota[n], \mathsf{C})$$

Question : Comment reconnaître le nerf d'une petite catégorie ?

Le *cornet* Λ^n_k $(0 \leq k \leq n)$ est le sous-ensemble simplicial de Δ^n défini par

$$\Lambda^n_k := \bigcup_{k \in J \subsetneq [n]} \Delta^J$$

et I^n désigne *l'épine* (“spine”=colonne vertebrale) définie par

$$I^n := \bigcup_i \Delta^{\{i,i+1\}} \subset \Delta^n$$

Enfin, nous aurons parfois besoin du *bord* $\partial\Delta^n$ de Δ^n défini par

$$\partial\Delta^n = \bigcup_i \Delta^{[n]\setminus\{i\}}$$

Les définitions trois objets I^n, Λ^n_k et $\partial\Delta^n$ se généralisent aisément pour définir des sous-ensembles simpliciaux I^J, Λ^J_k et $\partial\Delta^J$ de Δ^J pour tout $J \subset [n]$.

Remarque 7.3. $I^n \subset \Lambda^n_k$ lorsque $0 < k < n$.

Théorème 7.4. *Soit X un ensemble simplicial. Les conditions suivantes sont équivalentes*

(i) pour tout $n \geq 2$ et tout $0 < k < n$, l'application de restriction

$$X_n = \mathrm{Hom}(\Delta^n; X_\bullet) \to \mathrm{Hom}(\Lambda^n_k; X_\bullet)$$

soit bijective

(ii) pour tout $n \geq 2$, l'application de restriction

$$X_n = \mathrm{Hom}(\Delta^n; X_\bullet) \to \mathrm{Hom}(I^n; X_\bullet) = X_1 \times_{X_0} \times \cdots \times_{X_0} X_1$$

est bijective

(iii) X est isomorphe au nerf d'une catégorie.

7.2. **Infini catégories.**

7.2.1. *Définition, catégorie homotopique.*

Définition 7.5 (Infini-catégorie). Une *∞-catégorie* est un complexe de Kan faible, c'est à dire un ensemble simplicial X tel que pour tout $n \geq 2$ et tout $0 < k < n$,l'application de restriction

$$X_n = \mathrm{Hom}(\Delta^n; X_\bullet) \to \mathrm{Hom}(\Lambda^n_k; X_\bullet)$$

soit surjective. Un *morphisme de ∞-catégories* est un morphisme d'ensembles simpliciaux.

Remarque 7.6. Joyal les appelle *quasi-catégories.*

Exemples. Le foncteur nerf N est à valeur dans la sous-catégorie des ∞ catégories. Le foncteur Sing aussi.

Un 1-simplexe f d'une infini catégorie X sera noté $f : x_0 \to x_1$ et appelé *morphisme* de but $x_1 := \partial_0 f$ et de source $x_0 := \partial_1 f$. Une triangle $t : \partial\Delta^2 \to X$ *commute* lorsqu'il est la restriction d'un 2-simplexe $c : \Delta^2 \to X$ et dans ce cas, $h := \partial_1 c$ est *une composition* de $f := \partial_2 c$ et $g := \partial_0 c$. Enfin, deux morphismes f et g de x dans y sont *homotopes* si g est une composition de f et 1_x.

Proposition 7.7. *Être homotopes est une relation d'équivalence sur l'ensemble* $\mathrm{Hom}_X(x, y)$ *des morphismes de* x *dans* y.

Définition 7.8 (Catégorie homotopique d'une ∞-catégorie). La *catégorie homotopique* $\mathrm{ho}(X)$ associée à une ∞-catégorie X est la catégorie ayant pour objets ceux de X et pour ensembles de morphismes les quotients des ensembles de morphismes $\mathrm{Hom}_X(x, y)$ par la relation d'homotopie.

Remarque 7.9. $\mathrm{Hom}_{\mathrm{ho}(X)}(x, y) = \pi_0(\mathrm{Map}_X(x, y))$? ? ?

Le foncteur nerf N admet un adjoint à gauche $\tau\colon \mathsf{Set}_\Delta \to \mathsf{Cat}$.

Proposition 7.10. *Soit X une infini catégorie. Il existe un unique morphisme d'ensembles simpliciaux* $X \to \mathrm{Nerf}(\mathrm{ho}(X))$ *qui est l'identité sur les objets et envoie les morphismes sur leur classe d'homotopie. Ce morphisme induit un isomorphisme de catégories*

$$\tau(X) \cong \mathrm{ho}(X)$$

Remarque 7.11. La proposition précédente se reformule en disant que $\mathrm{ho}(X)$ est une catégorie fondamentale pour X (enfin je crois).

Définition 7.12 (Morphisme inversible). Un morphisme $f\colon x \to y$ dans une ∞-catégorie X est *inversible* si son image dans $\mathrm{ho}(X)$ l'est. Un ∞-groupoïde est une ∞-catégorie dont tous les morphismes sont inversibles.

Théorème 7.13. *Les ∞-groupoïdes sont exactement les complexes de Kan.*

Exposé 8 – 24 jan. 2020 – Infini-catégories II – Salim Rivière

8.1. **Tranches et joints.**

Définition 8.1 (Diagramme – Limite). Soit $\mathscr{C}$ une catégorie. Un *diagramme* est un foncteur $F\colon \mathscr{D} \to \mathsf{C}$ depuis une petite catégorie $\mathscr{D}$. Le *diagramme constant* associé à un objet C est noté $\mathrm{cst}(C) : \mathscr{D} \to \mathsf{C}$. Une *limite* de F est un objet $\lim \mathscr{F}$ muni d'une transformation naturelle $\mathrm{cst}(\lim F) \to F$ telle que l'application

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(C; \lim F) \to \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}^{\mathscr{D}}}(\mathrm{cst}(C); F)$$

soit bijective pour tout objet C de C.

Remarque 8.2. Lorsqu'elle existe, la limite est unique à isomorphisme près. L'existence fonctorielle de limites correspond à celle d'un adjoint à droite de cst.

Une façon de reformuler la définition de limite d'un diagramme $F : \mathscr{D} \to \mathsf{C}$ est de considérer la catégorie $\mathsf{C}_{/F}$ dont les objets sont les cônes au dessus de $F(\mathscr{D})$ et les morphismes sont les morphismes de cônes. Une limite est alors un objet final dans $\mathsf{C}_{/F}$. Dans le cas d'un diagramme constant $\mathrm{cst}(C)$, la catégorie des cônes porte le nom de *tranche* au dessus de C et est notée $\mathsf{C}_{/C}$ et elle admet pour objet final le morphisme identité de C ($\lim C = C$). Afin de définir un analogue de la notion de limite dans une ∞-catégorie X, commençons par essayer de deviner ce qui devrait jouer le rôle de ∞-catégorie tranche $X_{/x}$. Il semble raisonnable d'autoriser comme 1-morphismes les triangles commutatifs

$$\begin{tikzcd} y \arrow[rr] \arrow[dr] & & z \arrow[dl] \\ & x & \end{tikzcd}$$

mais il faudrait aussi donner un sens aux morphismes supérieurs et pouvoir généraliser cette constuction à des diagrammes plus généraux. Pour ce faire, donnons une troisième formulation de la définition de catégorie tranche $\mathsf{C}_{/F}$ dans le cadre classique.

Définition 8.3 (Joint de deux catégories). Le *joint* de deux (petites) catégories C et C' est la catégorie $\mathsf{C} \star \mathsf{C}'$ ayant pour objets ceux de C et de C' et telle que

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{C}\star\mathsf{C}'}(A,B) = \begin{cases} \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}}(A;B) & \text{si } A \text{ et } B \text{ sont des objets de } \mathsf{C} \\ \mathrm{Hom}_{\mathsf{C}'}(A;B) & \text{si } A \text{ et } B \text{ sont des objets de } \mathsf{C}' \\ \{*\} & \text{si } A \text{ est un objet de } \mathsf{C} \text{ et } B \text{ un objet de } \mathsf{C}' \\ \emptyset & \text{sinon.} \end{cases}$$

Proposition 8.4. *La catégorie tranche $\mathsf{C}_{/F}$ est caractérisée par le fait que pour toute catégorie C', il existe une bijction naturelle*

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Cat}}(\mathsf{C}'; \mathsf{C}_{/F}) \simeq \mathrm{Hom}_x(\mathsf{C}' \star \mathscr{D}; \mathsf{C}) \ .$$

Définition 8.5 (Joints de deux ensembles simpliciaux). Le *joint* de deux ensembles simpliciaux X et Y dont l'ensemble des n-simplexes est défini par

$$(X \star Y)_n := X_n \coprod Y_n \coprod \coprod_{i+j=n-1} X_i \times Y_j$$

et la k-ième face d^k coïncide avec (le coproduit de) celles de X et Y sur $X_n \coprod Y_n$ et est donnée sur chaque terme $X_i \times Y_j$ par

$$d^k(x,y) := \begin{cases} x & \text{si } i = n-1 \text{ et } k = 2 \\ y & \text{si } j = n-1 \text{ et } k = 0 \\ (d^k x, y) & \text{si } k \leq i \\ (x, d^{k-i-1} y) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Proposition 8.6 (Lurie). *Soient $p : S \to X$ un diagramme. Il existe un ensemble simplicial $X_{/p}$ tel pour tout Y, il existe une bijection naturelle*

$$\mathrm{Hom}(Y; X_{/p}) \simeq \mathrm{Hom}_p(Y \star S; X)$$

Si de plus X est est une ∞-categorie, alors $X_{/p}$ aussi.

Définition 8.7 (Catégorie tranche). $X_{/p}$ est *la ∞-catégorie tranche* au dessus de p.

8.2. **Foncteurs, objets finaux et limites homotopiques.** Si A et B sont deux ensembles simpliciaux, $\underline{\mathrm{Hom}}(A; B)$ est leur hom interne.

Proposition 8.8. *Si X et Y sont des ∞-catégories, alors $\underline{\mathrm{Hom}}(X; Y)$ est aussi une ∞-catégorie.*

Démonstration. On verra la preuve en exercice. □

Définition 8.9. Un foncteur $u : X \to Y$ est un objet du hom interne. C'est une *équivalence* s'il existe un foncteur $v : Y \to X$ et des morphismes de foncteurs *inversibles* (i.e. un 1-simplexe du hom interne) $uv \to 1$ et $vu \to 1$ (que signifie uv ?).

Définition 8.10. Si x et ζ sont deux objets d'une ∞-catégorie X, $\mathrm{Hom}_X(x, \zeta)$ est la limite

$$\mathrm{Hom}_X(x, \zeta)$$

L'objet ζ *final* si pour tout x, $\mathrm{Hom}_X(x, \zeta)$ est équivalent à Δ^0.

Proposition 8.11 (Joyal). $\mathrm{Hom}_X(x_1, x_2)$ *est toujours un infini groupoïde.*

Remarque 8.12. Cela implique que deux objets finaux sont isomorphes et que l'isomorphisme les reliant est unique à homotopie près !!!

Définition 8.13. Une limite d'un diagramme $p : S \to X$ est un objet final de $X_{/p}$.

Exposé 9 – 31 jan. 2020 – Séance d'exercices : Infini-catégories – Salim Rivière

Références. sections 2.2 et 2.3 de Lurie, *Higher Topos Theory*.

Soient X et K deux ensembles simpliciaux. Le but de cette séance est de nous convaincre que $\underline{\mathrm{Hom}}(K;X)$ est une ∞-catégorie dès que X en est une.

(1) Rappeler la définition de $\underline{\mathrm{Hom}}(K;X)$, de $\underline{\mathrm{Hom}}_X(x;y)$ pour x et y deux objets de X.

(2) Une ***fibration intérieure*** est un morphisme d'ensembles simpliciaux satisfaisant la proprieté de relèvement à droite (PRD) pour toutes les inclusions de cornets intérieurs. Sous quelles opérations la classe des fibrations intérieures est-elle close ?

(3) Un morphisme d'ensembles simpliciaux est ***anodin intérieur*** s'il satisfait la PRG pour toutes les fibrations intérieures. Montrer que la classe des morphismes anodins intérieurs est stable par poussé en avant.

(4) Montrer que les classes engendrées par

   (a) les inclusions de cornets intérieurs

   (b) les inclusions de gouttières
$$\Delta^m \times \Lambda^2_1 \coprod_{\partial\Delta^m \times \Lambda^2_1} \partial\Delta^m \times \Delta^2 \subset \Delta^m \times \Delta^2$$

   (c) les inclusions de gouttières généralisées
$$S' \times \Lambda^2_1 \coprod_{S\Lambda^2_1} S \times \Delta^2 \subset S' \times \Delta^2$$
   pour $S \subset S'$.

   sont les mêmes.

(5) Expliciter la condition à vérifier pour que $\underline{\mathrm{Hom}}(K;X)$ soit une infini catégorie. Conclure.

(6) En déduire que $\underline{\mathrm{Hom}}_X(x;y)$ est une infini catégorie. Expliciter la condition de relèvement des inclusions de cornets extremaux Λ^2_0.

Exposé 10 – 07 fév. 2020 – Localisation de ∞-catégories – Salim Rivière

Références. (1) Cisinsky (Bourbaki, Livre)

But: Essayer de comprendre ces références.

On se donne K un ensemble simplicial et W un sous-ensemble simplicial de K.

Définition 10.1. Une *localisation* de (K, W) est un foncteur $\gamma\colon K \to W^{-1}K$ tel que

— $W^{-1}K$ est une ∞-catégorie ;

— γ envoir les morphismes de W sur les inversibles de $W^{-1}K$

— Pour toute ∞-catégorie D, la précomposition par γ induit la bijection

$$\underline{\mathrm{Hom}}(W^{-1}K, D) \xrightarrow{\cong} \underline{\mathrm{Hom}}_W(K, D)$$

où

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathrm{Hom}}_W(K,D) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & \underline{\mathrm{Hom}}(K,D) \arrow[d] \\
\underline{\mathrm{Hom}}(W,D^{\mathrm{core}}) \arrow[r] & \underline{\mathrm{Hom}}(W,D)
\end{tikzcd}$$

Théorème 10.2. *Tout (K, D) admet une localisation (essentiellement unique).*

Esquisse de preuve. Il est possible de construire

$$W \xrightarrow{\simeq} W' = \mathrm{Ex}^D(W) \tag{1}$$

avec W' de Kan (∞-groupoïde). On recolle W' à K en forcant le poussé en avant

$$\begin{tikzcd}
W \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & K \arrow[d] & \\
W' \arrow[r] & K' \arrow[dr, "\simeq"] & \\
& & W^{-1}K
\end{tikzcd}$$

On applique le foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}$:

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathrm{Hom}}(K',D) \arrow[r, "\cong"] \arrow[d] & \underline{\mathrm{Hom}}_{W'}(K',D) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\ulcorner"] & \underline{\mathrm{Hom}}_W(K,D) \arrow[d] \\
\underline{\mathrm{Hom}}(W',D) \arrow[r, "\cong"] & \underline{\mathrm{Hom}}_{W'}(W',D) \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & \underline{\mathrm{Hom}}_W(W,D) \arrow[d, "\simeq"] \\
& \hbar(W',D) \arrow[r, "\simeq"] & \hbar(W,D)
\end{tikzcd}$$

où $\hbar(W, D)$ est défini comme un adjoint ???. L'application de $\hbar$ à (1) est encore une équivalence faible, ce qui permet de conclure que

$$\underline{\mathrm{Hom}}_{W'}(K', D) \xrightarrow{\simeq} \underline{\mathrm{Hom}}_W(K, D) .$$

□

Remarque 10.3. Soit C une catégorie et W une sous-catégorie de C. a finir

10.1. **Construction de Kan** Ex^∞. On note

— $S([n])$ la catégorie des ensembles partiellement ordonnés des sous-ensembles de $[n]$

— $S_d(\Delta^n) := NS([n])$

dessin de triangles

La construction S_d est prolongé à Set_Δ par colimite : un ensemble simplicial X s'écrit comme colimite de Δ^n sur un diagramme $\mathscr{D}$ on défini $S_d(X) := \mathrm{colim}_{\mathscr{D}} S_d(\Delta^n)$. Notons Ex, l'adjoint à droite de S_d qui vérifie nécessairement

$$\mathrm{Hom}(S_d(\Delta^n), X) = \mathrm{Hom}(\Delta^n, \mathrm{Ex}(X)) =: \mathrm{Ex}(X)_n \ .$$

Exemple 10.4. Soit X un ensemble simplicial et $Y = \bullet \xrightarrow{f} \bullet \xrightarrow{g} \bullet$

— $\mathrm{Ex}(X)_0 = X_0$

— $\mathrm{Ex}(X)_1 = \mathrm{Hom}(\bullet \to \bullet \leftarrow \bullet, X)$, et

$$\mathrm{Ex}(Y)_1 = \begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, shift left, "f"] & \bullet \arrow[l, shift left, "f^{-1}"] \arrow[r, shift left, "g"] & \bullet \arrow[l, shift left, "g^{-1}"] \end{tikzcd}$$

— $\mathrm{Ex}(X)_2 = \mathrm{Hom}(\mathit{trianglesubdivise}, X)$ "implique" $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}$

L'application

$$NS([n]) \longrightarrow N([n])$$

nous fournit un morphisme d'ensemble simpliciaux ??

Remarque 10.5.

Lemme 10.6. *La paire* (S_d, Ex) *est une adjonction de Quillen.*

On pose $\mathrm{Ex}^n(X) = \mathrm{Ex}(\mathrm{Ex}^{n-1}(X))$. On aune flèche $X \to \mathrm{Ex}^\infty(X) := \lim_n \mathrm{Ex}^n(X)$

Proposition 10.7. $\mathrm{Ex}^\infty(X)$ *est de Kan.*

Exposé 11 – 14 fév. 2020 – Problème de modules formels – Friedrich Wagemann

Références. (1) Le cours de Sinan Yalin
(2) Toën – Exposé Bourbaki [Toë16]
(3) Hartchorne– Deformation Theory [Har09]

Motivation: Depuis a fin du 19eme, on sait que les modules de courbes sont finis, i.e/ si on fixe un genre g, et qu'on regarde les courbes lisses de genre g à isomorphisme près, il n'y a qu'un nombre fini de courbes.

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Sch}}(S, \mathcal{M}) \Leftrightarrow \{\text{familles de courbes} X \to S\} \Big/_{\simeq}$$

où $\mathcal{M}$ est l'espace de modules universel.

On aimerait savoir si le foncteur

$$\mathcal{F} \colon \mathsf{Sch} \longrightarrow \{\text{famille de courbes sur } S\}/\simeq$$

est représentable.

Problème: un espace de module universel n'existe que rarement. Un facon de remédier à ce problème

— est d'alléger les conditions en n'exigeant plus l'unicité du morphisme ??? : donne des espaces emphversels, miniversels;

— est de ne pas regarder le problème global mais regarder le problème autour d'un point (dans un *voisinage formel*) : on regarde la valeur du foncteur des points du schéma sur des anneaux artiniens de la forme $\mathcal{F}(k[t]/(t^n)$ et étudier la limite

$$\lim \mathcal{F}(k[t]/(t^n))$$

(objets pro-représentable). On peut citer le travail de Schlessinger en 68 qui donne des conditions néccessaires et suffisantes pour la proreprésentabilité d'un foncteur défini sur les algèbres artiniennes.

11.1. **Problème de modules formels "classiques"**. On prend k un corps de caractéristique 0, On note locArt_k, la catégorie des algèbres artiniennes locales sur k.
On appelle $k[t]/(t^n)$, le n-voisinage infinitesimal et rappelons que $k[[t]]$ est la limite des $k[t]/(t^n)$.

Définition 11.1. Un *foncteur de déformation* (classique) est un foncteur

$$F \colon \mathsf{locArt}_k \longrightarrow \mathsf{Set}$$

qui satisfait les conditions suivantes :

(1) $F(k) = \{*\}$ heuristique : l'idée est que l'on ne déforme qu'un seul objet à la fois;
(2) *Condition de Schlessinger :* Pour tout

$$\begin{tikzcd} B \times_A C \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner"] & C \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[r] & A \end{tikzcd}$$

avec f surjective, alors l'application

$$F(B \times_A C) \xrightarrow{(*)} F(B) \times_{F(A)} F(C)$$

est surjective ; de plus, si $A = k$, le morphisme $(*)$ est une bijection.

(3) *Condition de recollement* ?? Soit $U = \bigcup_{i \in I} U_i$:

$$\begin{tikzcd} \amalg_{i,j} U_i \cap U_j \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \amalg U_i \arrow[r] & U \end{tikzcd}$$

(U est le coégalisateur), alors

$$\begin{tikzcd} F(\amalg_{i,j} U_i \cap U_j) & F(\amalg U_i) \arrow[l, shift left] \arrow[l, shift right] & F(U) \arrow[l] \end{tikzcd}$$

Lemme 11.2. *Soit F un foncteur de déformation, alors $F(k[\varepsilon])$ est un k-espace vectoriel.*

Démonstration. voir les notes du cours de Sinan □

Exemple 11.3. Soit A une algèbre associative et R une k-algèbre artinienne locale augmentée. Une *R-déformation* de A est un R-module libre B avec un produit R-linéaire associatif tel que $\alpha \colon k \otimes_R B \xrightarrow{\cong} A$. Deux R-déformations B et B' de A sont équivalentes s'il existe $\phi \colon B \to B'$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} k \otimes_R B \arrow[rr, "k \otimes \phi"] \arrow[dr, "\alpha", "\cong"'] & & k \otimes_R B' \arrow[dl, "\cong"', "\alpha'"] \\ & A & \end{tikzcd} .$$

Cela fournit le foncter de déformation suivant

$$\begin{aligned} \mathrm{Def}_A \colon \mathsf{locArt}_k &\longrightarrow \mathsf{Set} \\ R &\longmapsto \{R\text{-déformations de } A\}/_{\cong} \end{aligned}$$

On a un lien fort avec la cohomologie de Hochschild de l'algèbre A : on a

$$\mathrm{Def}_A(k[\varepsilon]) \coloneqq \mathrm{T}_{\mathrm{Def}_A} = \mathrm{HH}^2(A)$$

où les obstructions vivent dans le $\mathrm{HH}^3(A)$. Plus généralement, les problèmes de déformations sont liés à "de la cohomologie", en fait à des algèbres de Lie dg. Dans cet exemple, c'est l'algèbre $\mathrm{CH}^\bullet(A, A)[1]$, muni de son crochet de Gerstenhaber, qui joue ce rôle.

Définition 11.4. Soit L une algèbre de Lie dg. L'*espace de Maurer–Cartan* associé à L est

$$\mathrm{MC}(L) = \{x \in L^1 \mid dx + \frac{1}{2}[x, x] = 0\}$$

Pour L nilpotente, alors L^0 est une algèbre de Lie nilpotente et $\exp(L^0)$, qu'on appelle *groupe de jauge*, agit sur l'espace de Maurer–Cartan par

$$e^x \star - = e^{[x,-]} - \frac{e^{[x,-]} - \mathrm{id}}{[x, -]}(d(-)) .$$

Proposition 11.5. *Soit L une algèbre de Lie dg et soit R une algèbre artinienne d'idéal maximal m . Alors $L \otimes m$ est une algèbre de Lie nilpotente et* $\exp(L^1 \otimes m)$ *agit sur* $\mathrm{MC}(L \otimes m)$*, naturellement en* (R, m).

Proposition 11.6. *Le foncteur*

$$\begin{aligned} \mathscr{MC}_L \colon \mathsf{locArt}_k &\longrightarrow \mathsf{Set} \\ (R, m) &\longmapsto \mathrm{MC}(L \otimes m)/\exp(L^0 \otimes m) \end{aligned}$$

est un foncteur de déformation.

Démonstration. voir le cours de Yalin □

Proposition 11.7. *On a* $\mathrm{T}_{\mathscr{MC}_L} \cong \mathrm{H}^1 L$.

Démonstration. L'idée est que l'équation de Maurer–Cartan infinitésimal se restreint à $dx = 0$. □

Théorème 11.8. *On a*

$$\mathrm{Def}_A \cong \mathscr{MC}_{\mathrm{CH}^\bullet(A,A)[1]}$$

11.2. **Le théorème de Lurie–Pridham.**

Slogan: La correspondance entre problème de modules formels (PMF) et algèbre de Lie dg devient une équivalence quand on passe au cadre dérivé.

On travaile dans le cadre ∞-catégorique.

On remplace les algèbres artiniennes aux algèbres artiniennes dg.

Définition 11.9. Une algèbre dg asso comm augmentée est dite *artinienne* si elle satisfait

(1) $\pi_i(A) := \mathrm{H}^{-i}(A) = 0$ pour tout $i < 0$ et $i >> 0$;

(2) $\pi_0(A)$ est artinienne au sens classique (non-dg) ;

(3) pour tout i, $\pi_i(A)$ est un k-espace vectoriel de dimension finie.

On note la catégorie associée par dgArt_k^*.

On appelle *carré distingué* dans dgArt, un carré

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ C \arrow[r] & A \end{tikzcd}$$

tel que

(1) il est homotopiquement cartésien dans la catégorie dga ;

(2) les morphismes $\pi_0(B) \to \pi_0(A)$ et $\pi_0(C) \to \pi_0(A)$ sont surjectifs.

Définition 11.10 (Problème de modules formels). Un foncteur $F \colon \mathsf{dgArt}^* \to \mathsf{Set}_\Delta$ est un *PMF* si

(1) F envoie les quiso sur les équivalences ;

(2) $F(k) \simeq \{*\}$;

(3) F envoie les carrés distingués dsur les carrés homotopiquement cartésiens.

On veut construire une équivalence

$$X(-)\colon \mathrm{ho}(\mathsf{dgLie}) \rightleftarrows \mathsf{PMF} \colon \ell(-)$$

Lemme 11.11. *On a*

$$\widehat{\mathrm{C}}^{\bullet}(\mathrm{Lie}(V)) \simeq k \oplus V^{\vee}[-1]\ .$$

où $\widehat{\mathrm{C}}^{\bullet}$ *est le complexe de Chevalley-Eilenberg.*

Le foncteur $\widehat{\mathrm{C}}^{\bullet}\colon \mathsf{dgLie} \to \mathsf{dgArt}$ se restreint à dgLie^0, la sous-catégorie pleine des dgLie cofibrantes et quasi-isomorphes à un $\mathrm{Lie}(V)$ oú V est un complexe concentré en degré $\geqslant 2$. Par Yoneda, on a le foncteur

$$\begin{aligned} h(-)\colon \mathsf{dgLie}^{cof} &\longrightarrow \mathrm{Func}((\mathsf{dgLie}^0)^{\mathrm{op}}, \mathsf{Set}_\Delta) \\ L &\longmapsto (L' \mapsto \underline{\mathrm{Hom}}^{\Delta}(L', L)) \end{aligned}$$

Proposition 11.12. *Le focteur h induit un foncteur pleinement fildèle au niveau des catégories homotopiques.*

Théorème 11.13 (Lurie). *(1) Le foncteur*

$$\begin{aligned} (\widehat{\mathrm{C}}^{*})^{-1}\colon \mathrm{Func}(\mathsf{dgArt}^{*}, \mathsf{Set}_\Delta) &\longrightarrow \mathrm{Func}((\mathsf{dgLie}^0)^{\mathrm{op}}, \mathsf{Set}_\Delta) \\ F &\longmapsto F \circ \widehat{\mathrm{C}}^{*} \end{aligned}$$

envoie PMF *dans l'image essentielle du foncteur* $\mathrm{ho}(h)$. *permet de définir le foncteur ℓ*

(2) On en déduit

$$\begin{aligned} \ell(-)\colon \mathsf{PMF} &\longrightarrow \mathrm{ho}(\mathsf{dgLie}) \\ F &\longmapsto h^{-1} \circ (F \circ \widehat{\mathrm{C}}^{*}) \end{aligned}$$

et ce foncteur est une équivalence de catégories.

Références

[GY16] G. Ginot and S. Yalin. Deformation theory of bialgebras, higher Hochschild cohomology and formality. *ArXiv e-prints*, June 2016.

[GY19] Gregory Ginot and Sinan Yalin. Derived deformation theory of algebraic structures. 2019.

[Har09] Robin Hartshorne. *Deformation theory*, volume 257. Springer Science & Business Media, 2009.

[Hir09] Philip S Hirschhorn. *Model categories and their localizations*. Number 99. American Mathematical Soc., 2009.

[Hov99] Mark Hovey. *Model categories*, volume 63 of *Mathematical Surveys and Monographs*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.

[LV12] Jean-Louis Loday and Bruno Vallette. *Algebraic operads*, volume 346 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer, Heidelberg, 2012.

[Qui06] Daniel G Quillen. *Homotopical algebra*, volume 43. Springer, 2006.

[Toë16] B Toën. Problèmes de modules formels. exposé 1111. *Astérisque. Séminaire Bourbaki*, 2015 :390, 2016.

Email address: leray@math.univ-paris13.fr

LAGA, CNRS, UMR 7539, Université Paris 13, Sorbonne Paris Cité, Université Paris 8, 99 Avenue JB Clément, 93430 Villetaneuse.

Email address: salim.riviere@univ-nantes.fr

Faculté des Sciences et des Techniques, 2 Chemin de la Houssinière, 44000 Nantes.