Groupe de travail : Lecture de l'article de Joan Millès
« André-Quillen cohomology of algebras over an operad »
Exposé n°1

Jules Givelet

18 septembre 2025

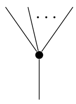
1 Opérades

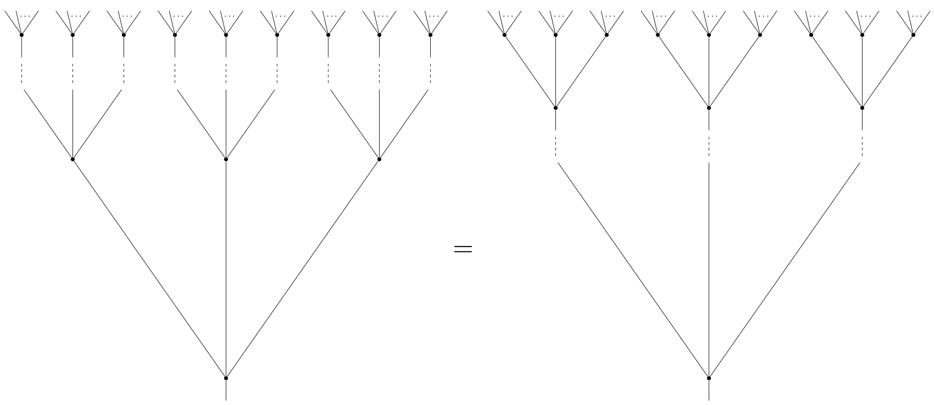
On peut comprendre la notion d'opérade d'au moins deux manières différentes.

Définition 1.1. Une *opérade* (symétrique) est un $\mathfrak{S}$-module $\mathcal{P}$ (suite de $\mathfrak{S}_n$-modules à droites $\mathcal{P}(n)$) muni d'une « structure d'algèbre associative unitaire » *i.e.* de morphismes de compositions

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(n) \otimes (\mathcal{P}(i_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{P}(i_n)) &\to \quad \mathcal{P}(i_1 + \cdots + i_n) \\ (\mu; \nu_1, \ldots, n_n) &\mapsto \quad \mu \circ (\nu_1, \ldots, \nu_n) \end{aligned}$$

assujetties à un axiome d'associativité, de symétrie et qui admet un élément neutre $\mathrm{id} \in \mathcal{P}(1)$.

On peut visualiser un éléments de $\mathcal{P}(n)$ comme une opération d'arité n ou plus géométriquement comment une corolle à n pétales :  . L'axiome d'associativité se dessine alors de la manière suivante :



De même, l'axiome de symétrie décrit l'arbre que l'on obtient lorsque l'on greffe des corolles dont on a permuté les feuilles et s'écrit explicitement grâce au morphisme « blocs de permutation »

$$\mathfrak{S}_{i_1} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{i_n} \hookrightarrow \mathfrak{S}_{i_1 + \cdots + i_n}$$

et au morphisme « permutation de blocs »

$$\mathfrak{S}_n \hookrightarrow \mathfrak{S}_{i_1 + \cdots + i_n}.$$

Remarque 1.2. Comme on souhaite étudier la cohomologie d'algèbres, on travaillera avec des $\mathfrak{S}$-modules gradués différentiels *i.e.* $\mathcal{P}(n) = \bigoplus_{g \in \mathbb{N}} \mathcal{P}_g(n)$; si $\mu \in \mathcal{P}_g(n)$ et $\nu_k \in \mathcal{P}_{g_k}(i_k)$, alors

$$\mu \circ (\nu_1, \ldots, \nu_n) \in \mathcal{P}_{g + g_1 + \cdots + g_n}(i_1 + \cdots + i_n);$$

on a $\mathrm{id} \in \mathcal{P}_0(1)$; et $\mathcal{P}$ est muni d'un morphisme appelé différentielle $d : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ de degré -1 tel que $d^2 = 0$.

Une opérade graduée différentielle est alors un $\mathfrak{S}$-module différentiel gradué $\mathcal{P}$ muni d'une structure d'opérade telle que

$$d_{\mathcal{P}}(\mu \circ (\nu_1, \ldots, \nu_n)) = d_{\mathcal{P}}(\mu) \circ (\nu_1, \ldots, \nu_n) + (-1)^{|\mu|} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{|\nu_1|+\cdots+|\nu_{i-1}|} \mu \circ (\nu_1, \ldots, d_{\mathcal{P}}(\nu_i), \ldots, \nu_n).$$

Exemple 1.3. L'espaces des opérations multilinéaires d'un espace vectoriel V est une opérade que l'on notera End_V. Explicitement, on a $\mathrm{End}_V(n) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V^{\otimes n}, V)$ et la loi de composition est donnée par la composition et le produit tensoriel d'applications linéaires.

Si V est un complexe de chaîne, alors l'opérade $\mathrm{End}_V = (\mathrm{Hom}_{g-\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}}(V^{\otimes n}, V))_{n\in\mathbb{N}}$ (on ne considère que des opérations μ qui translatent le degré homologique d'une constante $|\mu|$) est une opérade graduée différentielle lorsqu'on la muni de la dérivation

$$\partial\mu(a_1, \ldots, a_n) = d_V(\mu(a_1, \ldots, a_n)) - (-1)^{\mu} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{|a_1|+\cdots+|a_{i-1}|} \mu(a_1, \ldots, d_V(a_i), \ldots, a_n)$$

qui mesure l'obstruction d'une opération à être un morphisme d'espaces différentiels gradués.

Remarque 1.4. Attention, la symétrie dans la catégorie monoïdale symétrique des espaces gradués est donnée par la formule $\tau(x \otimes y) = (-1)^{|x||y|} y \otimes x$. Pour faciliter certaines écriture, on suit la convention de Koszul qui change aussi le signe du produit tensoriel de morphismes :

$$(f \otimes g)(x \otimes y) = (-1)^{|x||g|} f(x) \otimes g(y)$$

ce qui influe sur le produit de composition de End_V lorsque V est un espace gradué.

Une autre manière de comprendre ce qu'est une opérade est la notion de foncteur développable en séries entières.

Définition 1.5. Un endofoncteur $F \in \mathrm{End}(\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}})$ est *développable en séries entières* s'il existe une suite d'espaces vectoriels $(F(n))_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$F(V) \simeq \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} F(n) \otimes V^{\otimes n}.$$

Un *foncteur de Schur* est un endofoncteur $\mathcal{P} \in \mathrm{End}(\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}})$ tel qu'il existe une suite de $\mathfrak{S}_n$-modules $(\mathcal{P}(n))_{n\in\mathbb{N}}$ de sorte qu'on ait

$$\mathcal{P}(V) \simeq \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{P}(n) \otimes_{\mathfrak{S}_n} V^{\otimes n}$$

où $\mathfrak{S}_n$ agit à gauche sur $V^{\otimes n}$ par permutation des facteurs des tenseurs élémentaires.

Remarque 1.6. Autrement dit, un foncteur de Schur est l'endofoncteur coinvariant associé à un endofoncteur développable en séries entières ayant pour coefficients des $\mathfrak{S}_n$ modules :

$$\mathcal{P} \simeq F_{\mathfrak{S}}.$$

Après résolution d'un exercice d'analyse élémentaire, on observe que les foncteurs développables en séries entières sont stables par compositions et par produits (tensoriel) en posant

$$(F \otimes G)(n) := \bigoplus_{i+j=n} F(i) \otimes G(j)$$

$$(F \circ G)(n) := \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} F(k) \otimes \left(\bigoplus_{i_1+\cdots+i_k=n} G(i_1) \otimes \cdots \otimes G(i_k) \right).$$

Les foncteurs de Schur sont aussi stables par compositions et produits en posant

$$(\mathcal{P} \otimes \mathcal{Q})(n) := \bigoplus_{i+j=n} \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_i \times \mathfrak{S}_j}^{\mathfrak{S}_n} \mathcal{P}(i) \otimes \mathcal{Q}(j)$$

$$(\mathcal{P} \circ \mathcal{Q})(n) := \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{P}(k) \otimes_{\mathfrak{S}_k} \left(\bigoplus_{i_1+\cdots+i_k=n} \mathrm{Ind}_{\mathfrak{S}_{i_1} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{i_k}}^{\mathfrak{S}_n} \mathcal{Q}(i_1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{Q}(i_k) \right).$$

Ainsi, la catégorie des foncteurs de Schur est une sous-catégorie de la catégorie monoïdale symétrique $(\mathrm{End}(\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}), \circ, \mathrm{id}_{\mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}})$ et une opérade correspond à un foncteur de Schur muni d'une structure d'algèbre associative unitaire.

2 Algèbres

Les opérades donnent un cadre général pour étudier différents types d'algèbres avec un langage commun.

Définition 2.1. Une algèbre sur une opérade $\mathcal{P}$ est un espace vectoriel A muni d'un morphisme d'opérades

$$\mathcal{P} \to \mathrm{End}_A$$

Remarque 2.2. Par décurryfication, la donné d'une structure de $\mathcal{P}$-algèbre sur A est équivalente à la donnée d'une morphisme $\mathcal{P}(A) \to A$ compatible avec la composition et l'unité de $\mathcal{P}$.

Par exemple, une algèbre associative est un espace vectoriel A muni d'une opération $\mu \in \mathrm{End}_A(2)$ de telle sorte que multiplier n éléments $x_1, \dots, x_n$ ne dépend pas du parenthésage. Ainsi, cette opération binaire induit une unique opération $\mu^n \in \mathrm{End}_A(n)$ modulo permutations ce qui est équivalent au fait de se donner un morphisme

$$\mathbb{K}[\mathfrak{S}_n] \to \mathrm{End}_A(n).$$

On en déduit que la donnée d'une algèbre associative est équivalente à la donnée d'une algèbre sur l'opérade $\mathcal{A}ss = (0, \mathbb{K}[\mathfrak{S}_1], \mathbb{K}[\mathfrak{S}_2], \mathbb{K}[\mathfrak{S}_3], \dots)$.

Remarque 2.3. On peut encoder les algèbres unitaires grâce à l'opérade $u\mathcal{A}ss = (\mathbb{K}[\mathfrak{S}_n])_{n\in\mathbb{N}}$ mais les opérades admettant des unités ($\mathcal{P}(0) \neq 0$) amène à travailler avec des arbres avec des nœuds internes qui ne sont pas des feuilles ce qui agrandi infiniment (horizontalement) leur combinatoire. De même, on travaillera rarement avec des opérades telles que $\mathcal{P}(1) \neq \mathbb{K}$ puisque cela agrandi infiniment (verticalement) leur combinatoire.

On peut aussi encoder des axiomes de symétrie. Par exemple, une algèbre commutative est une algèbre associative telle que la multiplication de n ne dépend même pas de l'ordre d'arrangement des ces éléments. Ainsi, cette opération binaire induit par compositions une unique opération $\mu^n \in \mathrm{End}_A(n)$ qui est fixe sous l'action de $\mathfrak{S}_n$ ce qui se traduit en un morphisme partant de la représentation triviale

$$\mathbb{K} \to \mathrm{End}_A(n)$$

et une algèbre commutative est la même chose qu'une algèbre sur l'opérade $\mathcal{C}om = (0, \mathbb{K}, \mathbb{K}, \dots)$.

On peut définir l'opérade encodant un type d'algèbre donné de deux façons possibles. La première s'appuie sur la proposition suivante

Proposition 2.4. Soit $\mathcal{P}$ une opérade et V un espace vectoriel. L'espace $\mathcal{P}(V)$ est la $\mathcal{P}$-algèbre libre engendrée par V.

Démonstration. La structure de $\mathcal{P}$-algèbre de $\mathcal{P}(V)$ est donnée par le morphisme $\gamma \circ \mathrm{id}_V : \mathcal{P} \circ \mathcal{P} \circ V \to V$ où $\gamma : \mathcal{P} \circ \mathcal{P} \to \mathcal{P}$ est le morphisme structurel de l'opérade vue comme monade. ✿

Remarque 2.5. Le morphisme structurel $\mathcal{P}(A) \to A$ d'une $\mathcal{P}$-algèbre A n'est autre que l'unité de l'adjonction $\mathcal{P} : \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}} \rightleftharpoons \mathrm{Alg}(\mathcal{P}) : \mathrm{Oubli}$.

Ainsi, si on se donne une catégorie d'algèbre $\mathcal{A}$ muni d'une adjonction $F : \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}} \rightleftharpoons \mathcal{A} : G$, alors GF est naturellement munie d'une structure de monade et si GF est un foncteur de Schur, alors on peut définir $\mathcal{P}_{\mathcal{A}}(n)$ comme l'espace des expressions n-linéaires dans $GF(\mathbb{K}x_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{K}x_n)$.

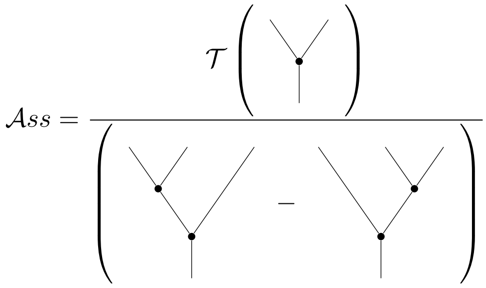
La seconde méthode s'appuie sur le résultat suivant.

Proposition 2.6. Il existe une adjonction libre-oubli entre les opérades et les $\mathfrak{S}$-modules :

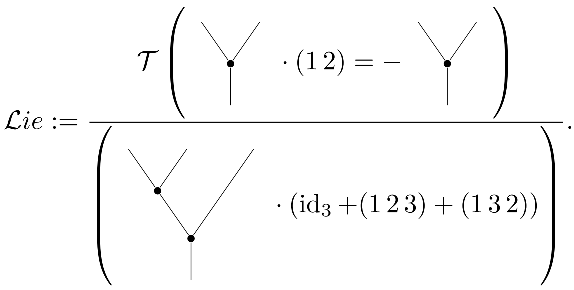
$$\mathcal{T} : \mathrm{Mod}(\mathfrak{S}) \rightleftharpoons \mathrm{Opé} : \mathrm{Oubli}.$$

Démonstration. On laisse à la lectrice le loisir de dessiner des arbres et de se convaincre du résultat. ✿

On peut alors présenter des opérades par générateurs et relations. Par exemple, on a



et on peut définir l'opérade $\mathcal{L}ie$ en caractéristique $\neq 2$ par



Comme on souhaite faire de la cohomologie il faut donner sens à la notion de $\mathcal{P}$-algèbre graduée différentielle.

Définition 2.7. Une $\mathcal{P}$-*algèbre graduée différentielle* et un complexe de chaîne $(A = \bigoplus_n A_n, d_A)$ munie d'un morphisme d'opérades $f : \mathcal{P} \to \mathrm{End}_{(A,d_A)}$ telle que pour tout $\mu \in \mathcal{P}(n)$, l'opération $\mu_A = f(\mu) : A^{\otimes n} \to A$ est un morphisme de complexes de chaînes *i.e.*

$$d(\mu_A(a_1, \dots, a_n)) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{|a_1|+\cdots+|a_{i-1}|} \mu_A(a_1, \dots, d(a_i), \dots, a_n).$$

Si $\mathcal{P}$ est elle-même graduée différentielle, alors une $(\mathcal{P}, d_{\mathcal{P}})$-*algèbre graduée différentielle* est un complexe de chaîne (A, d_A) muni d'un morphisme d'opérades différentielles graduées $f : (\mathcal{P}, d_{\mathcal{P}}) \to (\mathrm{End}_A, \partial)$ *i.e.*

$$(d_{\mathcal{P}}\mu)_A(a_1, \dots, a_n)) = d_A(\mu_A(a_1, \dots, a_n) - (-1)^{\mu} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{|a_1|+\cdots+|a_{i-1}|} \mu_A(a_1, \dots, d_A(a_i), \dots, a_n).$$

Remarque 2.8. Les définitions précédentes sont redondantes si on assimile une opérade à une opérade graduée différentielle concentrée en degré homologique 0.

Remarque 2.9. Un morphisme $d_A : A \to A$ de degré -1 vérifiant la condition précédente s'appelle une *dérivation* et une *différentielle* est une dérivation telle que $d^2 = 0$.

Exemple 2.10. Une algèbre de Lie graduée différentielle est donc un complexe de chaîne $(\mathfrak{g} = \bigoplus_n \mathfrak{g}_n, d)$ muni d'une opération binaire $[,]$ telle que

$$\begin{aligned}
&[x, y] = (-1)^{|x||y|}[y, x], \\
&(-1)^{|x||z|}[[x, y], z] + (-1)^{|y||z|}[[z, x], y] + (-1)^{|x||y|}[[y, z], x] = 0, \\
&d[x, y] = [dx, y] + (-1)^{|x|}[x, dy].
\end{aligned}$$

3 Modules

Pour étudier une $\mathcal{P}$-algèbre A, on la fait agir sur un espace vectoriel M. L'idée est la suivant : on souhaite que toute expression algébrique en n variables d'une $\mathcal{P}$-algèbre A

$$[a_1, \dots, a_n] \in A,$$

ait un sens lorsque l'on remplace l'un des a_i par un élément $m \in M$:

$$[a_1, \dots, m, \dots, a_n] \in M.$$

On pose donc $\mathrm{End}^A_{M,\varepsilon}$ le sous-$\mathfrak{S}$-module de $\mathrm{End}_{A\oplus M}$ dont les opérations en arité n sont celles à valeur dans M faisant intervenir $n-1$ variables de A et une seule de M, et $\mathrm{End}_A \ltimes \mathrm{End}^A_{M,\varepsilon}$ la sous-opérade de $\mathrm{End}_{A\oplus M}$ engendrée par End_A et $\mathrm{End}^A_{M,\varepsilon}$.

Définition 3.1. Un A-module est un espace vectoriel M muni d'un morphisme d'opérades

$$\mathcal{P} \to \mathrm{End}_A \ltimes \mathrm{End}^A_{M,\varepsilon}$$

tel que sa première coordonnée coïncide avec le morphisme structurel φ_A de A :

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{End}_A \ltimes \mathrm{End}^A_{M,\varepsilon} \arrow[dr, "\mathrm{pr}"] & \\ \mathcal{P} \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[rr, "\varphi_A"'] & & \mathrm{End}_A \end{tikzcd}$$

Remarque 3.2. En décurryfiant, cette donnée est équivalent à la donnée d'un morphisme

$$\mathcal{P}(A, M) := \bigoplus_n \mathcal{P}(n) \otimes_{\mathfrak{S}_n} \left(\bigoplus_{i=1}^{n} A^{\otimes(i-1)} \otimes M \otimes A^{\otimes(n-i)} \right) \to M$$

qui soit compatible avec la structure d'opérade de $\mathcal{P}$ et la structure de $\mathcal{P}$-algèbre de A.

Explicitement, cela revient à associer n actions de A sur M à toute opération $\mu \in \mathcal{P}(n)$:

$$\mu^i_M : A^{\otimes(i-1)} \otimes M \otimes A^{\otimes(n-i)} \to M.$$

Les symétries d'une opérade font alors coïncider certaines actions. Par exemple, dans $\mathcal{C}om$, la multiplication binaire induit deux actions de A sur M

$$\mu^2_M : A \otimes M \to M$$
$$\mu^1_M : M \otimes A \to M$$

mais le fait qu'on ait $\mu \cdot (1,2) = \mu$ impose $\mu^1_M(m, a) = \mu^2_M(a, m)$ si bien qu'un module sur une algèbre commutative est un module à gauche.

Remarque 3.3. Si A est graduée différentielle et $\mathcal{P}$ est concentré en degré homologique 0, alors on suppose en plus que M est un complexe de chaîne ; que les actions sont des morphismes de degré 0 ; et que d_M soit une dérivation :

$$\begin{aligned} d_M(\mu^i_M(a_1, \dots, m, \dots, a_n)) = & \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{|a_1|+\dots+|a_{j-1}|} \mu^i_M(a_1, \dots, d_A a_j, \dots, m, \dots, a_n) \\ & + (-1)^{|a_1|+\dots+|a_{i-1}|} (a_1, \dots, d_M m, \dots, a_n) \\ & + \sum_{j=i+1}^{n} (-1)^{|a_1|+\dots+|m|+\dots+|a_{j-1}|} \mu^i_M(a_1, \dots, m, \dots, d_A a_j, \dots, a_n) \end{aligned}$$

Si $\mathcal{P}$ n'est pas concentré en degré 0, alors l'obstruction pour d_M à être une dérivation doit être égale à $(d_{\mathcal{P}}\mu)^i_M$.

Proposition 3.4. Le foncteur d'oubli $\mathrm{Mod}_{\mathcal{P}}(A) \to \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}}$ admet un adjoint à gauche

$$V \mapsto A \otimes^{\mathcal{P}} V$$

Démonstration. De la même manière que $\mathcal{P}(V)$ est la $\mathcal{P}$-algèbre libre engendrée par V, le candidat naturel de A-module libre engendré par V est $\mathcal{P}(A, V)$. Cependant, le morphisme naturel

$$\mathcal{P}(A, \mathcal{P}(A, V)) \to \mathcal{P}(A, V)$$

n'est pas compatible avec les compositions respectives de $\mathcal{P}$ et A car ces compositions ne sont pas compatibles dans $\mathcal{P}(A, V)$ *i.e.* le diagramme suivant ne commute pas en général

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{P}(\mathcal{P}(A), V) \arrow[r] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{\mathcal{P}} \circ (\gamma_A, \mathrm{id}_V)"'] & \mathcal{P} \circ \mathcal{P}(A, V) \arrow[d, "\gamma_{\mathcal{P}} \circ (\mathrm{id}_A, \mathrm{id}_V)"] \\
 & \mathcal{P}(A, V)
\end{tikzcd}$$

Il faut donc poser $A \otimes^{\mathcal{P}} V$ comme quotient de $\mathcal{P}(A, V)$:

$$A \otimes^{\mathcal{P}} V = \mathrm{coKer}\left(\begin{tikzcd} \mathcal{P}(\mathcal{P}(A), V) \arrow[r, shift left, "\gamma_{\mathcal{P}}"] \arrow[r, shift right, "\gamma_A"'] & \mathcal{P}(A, V) \end{tikzcd} \right)$$

✿

Exemples 3.5.

— $A \otimes^{\mathcal{C}om} V = (\mathbb{K} \oplus A) \otimes V$
— $A \otimes^{\mathcal{A}ss} V = (\mathbb{K} \oplus A) \otimes V \otimes (\mathbb{K} \oplus A)$
— $\mathfrak{g} \otimes^{\mathcal{L}ie} V = U\mathfrak{g} \otimes V$
— De manière générale, on a $A \otimes^{\mathcal{P}} V = (A \otimes^{\mathcal{P}} \mathbb{K}) \otimes V$. On peut le démontrer à la main en écrivant explicitement $\mathcal{P}(A, V)$ ou alors le voir comme conséquence formelle de la proposition 3.8

Le module $A \otimes^{\mathcal{P}} \mathbb{K}$ est naturellement muni d'une structure d'algèbre associative unitaire. En effet, par adjonction, on a un isomorphisme linéaire

$$\mathrm{End}_A(A \otimes^{\mathcal{P}} \mathbb{K}) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}, A \otimes^{\mathcal{P}} \mathbb{K}) \simeq A \otimes^{\mathcal{P}} \mathbb{K}.$$

Définition 3.6. L'*algèbre enveloppante* d'une $\mathcal{P}$-algèbre A est $A \otimes^{\mathcal{P}} \mathbb{K}$ muni de la structure d'algèbre unitaire induite par celle de $\mathrm{End}_A(A \otimes^{\mathcal{P}} \mathbb{K})^{\mathrm{op}}$:

$$U_{\mathcal{P}} A = A \otimes^{\mathcal{P}} \mathbb{K} \simeq \mathrm{End}_A(A \otimes^{\mathcal{P}} \mathbb{K})^{\mathrm{op}}.$$

Remarque 3.7. L'apparition du $\bullet^{\mathrm{op}}$ vient du fait qu'on écrit la composition de fonctions à l'envers.

Explicitement, on a

$$\begin{aligned}
(\mu^i; a_1, \ldots, 1, \ldots, a_n) \cdot (\nu^j; b_1, \ldots, 1, \ldots, b_m) =& \mu^i_{A \otimes^{\mathcal{P}} \mathbb{K}}(a_1, \ldots, (\nu^j; b_1, \ldots, b_m), \ldots, a_n) \\
=& ((\mu \circ_{(i)} \nu)^{i-1+j}; a_1, \ldots, b_1, \ldots, 1, \ldots, b_m, \ldots, a_n).
\end{aligned}$$

Théorème 3.8. La catégorie $\mathrm{Mod}_{\mathcal{P}}(A)$ est isomorphe à la catégorie des modules à gauche sur $U_{\mathcal{P}}A$. De plus, cet isomorphisme préserve les sous-espace vectoriels sous-jacents *i.e.* le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Mod}_{\mathcal{P}}(A) \arrow[rr, "H", "\sim"'] \arrow[dr, shift left] & & \mathrm{LMod}(U_{\mathcal{P}}A) \arrow[dl, shift right] \\
 & \mathrm{Vect}_{\mathbb{K}} \arrow[ul, shift left, "A \otimes^{\mathcal{P}} -", "\top"'] \arrow[ur, shift right, "U_{\mathcal{P}}A \otimes -"', "\top"] &
\end{tikzcd}$$

Démonstration. Le foncteur H se découvre naturellement à la lumière de l'isomorphisme linéaire

$$\mathrm{Hom}_A(A \otimes^{\mathcal{P}} \mathbb{K}, M) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}, M) \simeq M$$

pour tout A-module M. En effet, l'anneau $\mathrm{End}_A(A \otimes^{\mathcal{P}} \mathbb{K})$ agit à droite sur $\mathrm{Hom}_A(A \otimes^{\mathcal{P}} \mathbb{K}, M)$ par précomposition et donc $U_{\mathcal{P}}A$ agit à gauche sur M. Ainsi, le foncteur $\mathrm{Hom}_A(A \otimes^{\mathcal{P}} \mathbb{K}, -)$ induit un foncteur

$$H : \mathrm{Mod}_{\mathcal{P}}(A) \to \mathrm{LMod}(U_{\mathcal{P}}A)$$

commutant avec les foncteurs d'oubli.

Dans l'autre sens, si M est un $U_{\mathcal{P}}A$ module à gauche, alors la structure de A-module sur $U_{\mathcal{P}}A$ induit une structure de A-module sur M :

$$\mu^i_M(a_1, \ldots, x, \ldots, a_n) := \mu^i_{U_{\mathcal{P}}A}(a_1, \ldots, 1, \ldots, a_n) \cdot x.$$

Les deux foncteurs construits sont inverses l'un de l'autre et le fait que H commute avec les foncteurs d'oubli implique qu'il commute avec les foncteurs libre à isomorphisme près. ✿

Remarque 3.9. Ce théorème caractérise l'algèbre enveloppante *i.e.* si R est une algèbre associative unitaire telle qu'il existe une équivalence de catégories $\mathbb{K}$-linéaire $\mathrm{Mod}_{\mathcal{P}}(A) \to \mathrm{LMod}(R)$ commutant avec les foncteur d'oubli à isomorphisme près, alors $R \simeq U_{\mathcal{P}}(A)$.

Cet isomorphisme permet, grâce à la fonctorialité de $U_{\mathcal{P}}$, de transporter les constructions habituels (extension/restriction des scalaires) de $\mathrm{LMod}(U_{\mathcal{P}}A)$ dans $\mathrm{Mod}_{\mathcal{P}}(A)$ et cela se laisse écrire explicitement dans $\mathrm{Mod}_{\mathcal{P}}(A)$ sans grande peine.