

# La cohomologie d'André-Quillen est un Ext

(Friedrich Wagemann, exposé de GDT du 12 mars 2026)

Il s'agit d'exposer la démo du Theorem 6.1.4 dans [3]. Pour cela, on retourne d'abord dans la Section 3.4.2 du papier.

## 1 Résolutions quasi-libres

Soit  $\mathcal{P}$  une opérade et  $A$  une  $\mathcal{P}$ -algèbre,  $\mathcal{C}$  une coopérade et  $C$  une  $\mathcal{C}$ -cogèbre avec une filtration  $F_p C$  telle que  $F_{-1} C = \{0\}$ , et  $\alpha : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{P}$  un morphisme tordant (opéradique). On considère le complexe

$$\mathcal{P} \circ_{\alpha} C = (\mathcal{P}(C), d_{\alpha} := d_{\mathcal{P} \circ C} - \delta_{\alpha}^l)$$

donné par  $\mathcal{P}(C)$  avec la différentielle induite  $d_{\mathcal{P} \circ C}$  moins la différentielle  $\delta_{\alpha}^l$  obtenue en utilisant le coproduit  $\Delta$ ,  $\alpha$ , puis le produit  $\gamma$ . Une *résolution quasi-libre* de  $A$  est un tel complexe  $\mathcal{P} \circ_{\alpha} C$  tel qu'il existe un quasiisomorphisme  $\mathcal{P} \circ_{\alpha} C \xrightarrow{\sim} A$  et  $\delta_{\alpha}^l|_{F_p(C)} \subset \mathcal{P}(F_{p-1}C)$ . Elle s'appelle quasi-libre, car la  $\mathcal{P}$ -algèbre sous-jacente est libre. On avait vu dans l'exposé sur la structure de catégorie de modèles sur la catégorie des  $\mathcal{P}$ -algèbres qu'une telle algèbre est cofibrante (et un objet cofibrant arbitraire est rétracte d'une telle).

Les résolutions que nous avons vues sont de ce type, avec par exemple  $C = \mathcal{C}(A) = B\mathcal{P}(A)$  (la résolution cobar-bar) ou  $C = \mathcal{C}(A) = \mathcal{P}(A)$  (pour une opérade  $\mathcal{P}$  de Koszul). Quand  $A$  est positivement graduée, ces résolutions vérifient la condition  $\delta_{\alpha}^l|_{F_p(C)} \subset \mathcal{P}(F_{p-1}C)$ .

**Theorem 1.1 (Theorem 3.4.2)** *Soit  $\mathcal{P}(C)$  une résolution quasi-libre de la  $\mathcal{P}$ -algèbre  $A$ . Alors le complexe cotangent a la forme:*

$$\mathbb{L}_{\mathcal{P}(C)/A} \cong A \otimes^{\mathcal{P}} C.$$

**Démonstration:** Le complexe cotangent  $\mathbb{L}_{R/A}$  est défini comme les différentielles de Kähler d'une résolution cofibrante  $R$  de  $A$ . En tant que  $R$ , on peut prendre ici  $\mathcal{P}(C)$ :

$$\begin{aligned} A \otimes_R^{\mathcal{P}} \Omega_{\mathcal{P}} R &= A \otimes_{\mathcal{P}(C)}^{\mathcal{P}} \Omega_{\mathcal{P}}(\mathcal{P}(C)) \\ &\cong A \otimes_{\mathcal{P}(C)}^{\mathcal{P}} (\mathcal{P}(C) \otimes^{\mathcal{P}} C) \\ &\cong A \otimes^{\mathcal{P}} C. \end{aligned}$$

Dans la deuxième ligne, on utilise que la  $\mathcal{P}$ -algèbre  $\mathcal{P}(C)$  est libre, donc les différentielles de Kähler sont le  $A$ -module libre au-dessus de  $C$ . Ensuite, on utilise que  $-\otimes_{\mathcal{P}(C)}^{\mathcal{P}}$  et  $\mathcal{P}(C) \otimes^{\mathcal{P}} -$  se simplifient. Cela peut se voir en exprimant le  $A$ -module libre sur  $V$  par le produit tensoriel (au sens classique) avec l'enveloppante  $U_{\mathcal{P}}(A) = A \otimes^{\mathcal{P}} \mathbb{K}$  et en simplifiant comme dans un produit tensoriel classique, ou en recourant à la propriété d'être adjoints à gauche des foncteurs  $A \otimes_{\mathcal{P}(C)}^{\mathcal{P}} -$  et  $A \otimes^{\mathcal{P}} -$ . En effet, ces adjonctions donnent lieu à des isomorphismes

$$\begin{aligned}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}_A^{\mathcal{P}}}(A \otimes_{\mathcal{P}(C)}^{\mathcal{P}} (\mathcal{P}(C) \otimes^{\mathcal{P}} C), M) &\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}_{\mathcal{P}(C)}^{\mathcal{P}}}(\mathcal{P}(C) \otimes^{\mathcal{P}} C, f^* M) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{g\mathrm{Mod}_{\mathbb{K}}}(C, U(f^* M)) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{g\mathrm{Mod}_{\mathbb{K}}}(C, U(M)) \\
&\cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}_A^{\mathcal{P}}}(A \otimes^{\mathcal{P}} C, M).
\end{aligned}$$

Ici, on a noté  $f^*M$  pour un  $A$ -module  $M$  le  $\mathcal{P}(C)$ -module correspondant (via le morphisme  $\mathcal{P}(C) \rightarrow A$ ). On a surtout utilisé que les oublis  $U(f^*M)$  et  $U(M)$  sont égaux en tant que  $\mathbb{K}$ -modules gradués.

Puisque ceci est vrai pour tous  $M$  de façon naturelle, le Lemme de Yoneda permet de conclure

$$A \otimes_{\mathcal{P}(C)}^{\mathcal{P}} (\mathcal{P}(C) \otimes^{\mathcal{P}} C) \cong A \otimes^{\mathcal{P}} C.$$

□

## 2 Cohomologie d'André-Quillen en tant que Ext

Dans la suite,  $A$  sera toujours une  $\mathcal{P}$ -algèbre positivement graduée (pour que les résolutions standard que l'on avait considérées soient des résolutions quasi-libres et donc cofibrantes). Soit  $R$  une résolution cofibrante de l'algèbre  $A$ . Le morphisme  $R \rightarrow A$  induit un morphisme

$$\mathbb{L}_{R/A} = A \otimes_R^{\mathcal{P}} \Omega_{\mathcal{P}}(R) \rightarrow A \otimes_A^{\mathcal{P}} \Omega_{\mathcal{P}}(A) \cong \Omega_{\mathcal{P}}(A).$$

Si le foncteur composé (!)  $A \otimes_{\mathcal{P}}^{\mathcal{P}} \Omega_{\mathcal{P}}(-)$  envoie des résolutions cofibrantes sur des résolutions cofibrantes, alors la cohomologie d'André-Quillen est le Ext suivant:

$$H^{\bullet}(A, M) \cong \mathrm{Ext}_{A \otimes^{\mathcal{P}} \mathbb{K}}^{\bullet}(\Omega_{\mathcal{P}}(A), M).$$

Le but de cet exposé est de montrer la réciproque. Pour cela, construisons d'abord le morphisme de comparaison. Soit  $X_{\bullet} \xrightarrow{\sim} \Omega_{\mathcal{P}}(A)$  une résolution cofibrante dans la catégorie des  $A$ -modules  $\mathcal{M}_A^{\mathcal{P}}$ , et considérons une résolution quasi-libre (en tant qu'algèbre)  $R = \mathcal{P} \circ \mathcal{C}(A)$  de  $A$ . Le complexe cotangent  $\mathbb{L}_{R/A} \cong A \otimes^{\mathcal{P}} \mathcal{C}(A)$  est le  $A$ -module libre sur  $\mathcal{C}(A)$ , donc cette réalisation du complexe cotangent est un objet cofibrant dans  $\mathcal{M}_A^{\mathcal{P}}$ . Dans la structure de catégorie de modèles de  $\mathcal{M}_A^{\mathcal{P}}$ , on a

$$\begin{array}{ccc}
0 & \longrightarrow & X_{\bullet} \\
\downarrow & & \downarrow \\
A \otimes^{\mathcal{P}} \mathcal{C}(A) & \longrightarrow & \Omega_{\mathcal{P}}(A)
\end{array}$$

Le morphisme vertical de gauche est une cofibration, car  $A \otimes^{\mathcal{P}} \mathcal{C}(A)$  est un objet cofibrant, et le morphisme vertical de droite est une fibration acyclique

en tant que résolution cofibrante de  $\Omega_{\mathcal{P}}(A)$ . Il existe donc un relèvement  $A \otimes^{\mathcal{P}} \mathcal{C}(A) \rightarrow X_{\bullet}$  qui induit le morphisme de comparaison

$$H_{\mathcal{P}}^{\bullet}(A, M) \leftarrow H^{\bullet}(\mathrm{Hom}_{A \otimes^{\mathcal{P}} \mathbb{K}}(X_{\bullet}, M) \cong \mathrm{Ext}_{A \otimes^{\mathcal{P}} \mathbb{K}}^{\bullet}(\Omega_{\mathcal{P}}(A), M).$$

Quand ce morphisme est un isomorphisme (pour tout  $\bullet$  et tout  $M$ ), la cohomologie d'André-Quillen est un Ext. Pour la réciproque, on utilise deux lemmes:

**Lemma 2.1** *Soit  $\varphi : V \rightarrow W$  un morphisme de dg espaces vectoriels. Si son dual  $\varphi^* : V^* \leftarrow W^*$  est un isomorphisme, alors  $\varphi : V \rightarrow W$  est un isomorphisme.*

**Démonstration:** Soit  $x \in V$ ,  $x \neq 0$ . On choisit un supplémentaire  $H$  de  $\mathbb{K}x$  dans  $V$ :  $V = H \oplus \mathbb{K}x$ . Puisque  $\varphi^*$  est surjective, il existe  $g \in W^*$  tel que  $x^* = \varphi^*(g) = g \circ \varphi$  pour l'indicatrice  $x^*$  de  $x$  (i.e.  $x^*(x) = 1$  et  $x^*|_H = 0$ ). On a donc

$$1 = x^*(x) = g \circ \varphi(x),$$

donc  $\varphi(x) \neq 0$ , i.e.  $\varphi$  est injective.

Supposons que  $\varphi$  n'est pas surjective, alors l'image de  $\varphi$  est contenue dans un hyperplan  $H$  de  $W$ . Soit  $W = H \oplus \mathbb{K}y$ . L'indicatrice  $y^*$  est dans  $W^*$  et  $y^* \neq 0$ , donc, par injectivité de  $\varphi^*$ , on a  $\varphi^*(y^*) = y^* \circ \varphi \neq 0$ . Mais alors il existe  $x \in V$  tel que  $y^* \circ \varphi(x) \neq 0$ . Puisque  $y^*|_H = 0$  et  $\mathrm{im}(\varphi) \subset H$ , ceci est une contradiction. Donc  $\varphi$  est surjective.  $\square$

**Lemma 2.2** *Soit  $S$  une dg algèbre associative unitaire sur  $\mathbb{K}$ , et  $\varphi : M \rightarrow N$  un morphisme de dg  $S$ -modules (à gauche). Si  $\varphi^* : \mathrm{Hom}_S(M, M') \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_S(N, M')$  est un quasi-isomorphisme pour tout dg  $S$ -module  $M'$ , alors  $\varphi : M \xrightarrow{\sim} N$  est un quasi-isomorphisme.*

**Démonstration:** Le dual  $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(S, \mathbb{K})$  devient un  $S$ -module à gauche (en fait, un  $S$ -bimodule !) via

$$(s \cdot f)(x) := f(x \cdot s)$$

pour tous  $s, x \in S$  et tout  $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(S, \mathbb{K})$ . On a une adjonction (en fait, c'est l'adjonction Hom-Tens)

$$\mathrm{Hom}_S(M, \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(S, \mathbb{K})) \cong \mathrm{Hom}_K(M \otimes_S S, \mathbb{K}) \cong \mathrm{Hom}_K(M, \mathbb{K}).$$

Ceci est un isomorphisme de dg  $\mathbb{K}$ -modules. On peut le promouvoir en iso de  $S$ -modules à droite, mais cela n'importe pas dans la suite. L'isomorphisme d'hypothèse (pour  $M' = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(S, \mathbb{K})$ ) induit donc des isomorphismes de dg espaces vectoriels

$$\mathrm{Hom}_K(M, \mathbb{K}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_K(N, \mathbb{K}).$$

Puisque la différentielle sur  $\mathbb{K}$  est nulle, on en déduit

$$\mathrm{Hom}_K(H^{\bullet}(M), \mathbb{K}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_K(H^{\bullet}(N), \mathbb{K}).$$

Ceux-ci sont induits par un morphisme  $\varphi : M \rightarrow N$  qui devient donc par le Lemme 2.1 un quasi-isomorphisme.  $\square$

**Theorem 2.3 (Theorem 6.1.4)** Soit  $\mathcal{P}$  une dg opérade,  $A$  une  $\mathcal{P}$ -algèbre (positivement graduée), et  $R$  une résolution cofibrante de  $A$ . Il est équivalent:

(P0) La cohomologie d'André-Quillen de  $A$  est un Ext sur l'enveloppante  $A \otimes^{\mathcal{P}} \mathbb{K}$ , i.e.

$$H_{\mathcal{P}}^{\bullet}(A, M) \cong \text{Ext}_{A \otimes^{\mathcal{P}} \mathbb{K}}^{\bullet}(\Omega_{\mathcal{P}}(A), M)$$

pour tout  $A$ -module  $M$ .

(P1) Le complexe cotangent est quasi-isomorphe au module des différentielles de Kähler, i.e.

$$\mathbb{L}_{R/A} \xrightarrow{\sim} \Omega_{\mathcal{P}}(A).$$

**Démonstration:** On avait vu que (P1) implique (P0). Réciproquement, supposons que  $H_{\mathcal{P}}^{\bullet}(-, M)$  soit un Ext sur l'enveloppante. On applique le Lemme 2.2 à l'enveloppante  $S = A \otimes^{\mathcal{P}} \mathbb{K}$ ,  $M = A \otimes^{\mathcal{P}} \mathcal{C}(A)$ ,  $N = X_{\bullet}$  une résolution cofibrante de  $\Omega_{\mathcal{P}}(A)$ . (Le  $A$ -module  $M'$  du lemme devient le nouveau  $M$ .) Ainsi, par le lemme, on a que (P0) implique (P1).  $\square$

### 3 Remarques

Le Lemme 2.2 intervient aussi en tant que Lemme 3.6 dans le papier [1]. Là, il s'écrit:

**Lemma 3.1 (Lemma 3.6)** Soit  $q : X \rightarrow Y$  un morphisme de dg  $A$ -modules. Supposons que pour tout  $A$ -module  $M$ , on ait un quasi-isomorphisme

$$q^* : \text{Hom}_A(Y, M) \xrightarrow{\sim} \text{Hom}_A(X, M).$$

Alors  $q : X \rightarrow Y$  est un quasi-isomorphisme.

Campos-Tamaroff attribuent la démo suivante très courte à Bernard Keller (que j'ai rallongée pour mieux comprendre).

**Démonstration** Soit  $J$  un générateur injectif de la catégorie des  $A$ -modules (ou, ce qui revient au même, des  $A \otimes^{\mathcal{P}} \mathbb{K}$ -modules). Cela veut dire par définition que pour tous morphismes  $f, g \in \text{Hom}_A(U, V)$  tels que  $f \neq g$ , il existe un morphisme  $h \in \text{Hom}_A(V, J)$  tel que  $h \circ f \neq h \circ g$ , i.e. les morphismes vers  $J$  séparent les morphismes. En plus, on suppose que  $J$  est injectif dans la catégorie des  $A$ -modules.

L'existence d'un cogénérateur injectif dans la catégorie des  $A$ -modules provient de l'existence d'un tel cogénérateur dans la catégorie des foncteurs  $F$  de la catégorie des  $A$ -modules vers celle des groupes abéliens, voir Cor. 2, p. 235 dans [4]. C'est dans ce genre de catégorie de foncteurs que l'on plonge une catégorie abélienne quelconque afin de montrer qu'elle se plonge dans une catégorie de modules (Théorème de Freyd-Mitchell) et afin de déduire que les catégories abéliennes possèdent les bonnes propriétés d'une catégorie de modules sur un anneau. Ce sont des théorèmes compliqués qui nécessitent beaucoup de préparation.

Étant donné un cogénérateur injectif  $J$ , le  $p$ -ème groupe de cohomologie de  $\mathrm{Hom}_A(X, J)$  devient

$$F_p(X) := \mathrm{Hom}_A(H_p(X), J),$$

où  $H_p(X)$  est un  $A$ -module trivial. Ceci provient du fait que  $J$  est injectif, puisque ceci entraîne que  $\mathrm{Hom}_A(-, J)$  est exact.

Ensuite, le fait que  $J$  est un cogénérateur donne que le foncteur  $\mathrm{Hom}_A(-, J)$  est fidèle. En effet, la propriété définissante de  $J$  se traduit en l'injectivité de la flèche

$$\mathrm{Hom}_A(X, Y) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ens}}(\mathrm{Hom}_A(Y, J), \mathrm{Hom}_A(X, J)).$$

En effet, si  $f \neq g$  dans l'espace de départ, alors  $f_* \neq g_*$  dans l'espace d'arrivée, et ceci est vrai, car il existe un  $h$  tel que  $f_*(h) \neq g_*(h)$ . Mais un foncteur fidèle  $F$  a la propriété que si  $F(f)$  est un monomorphisme (resp. épimorphisme), alors  $f$  est un monomorphisme (resp. épimorphisme), voir Prop. 1.2.12 dans [2]. Ainsi l'isomorphisme  $\mathrm{Hom}_A(H_p(Y), J) \cong \mathrm{Hom}_A(H_p(X), J)$  implique que  $q$  induit un isomorphisme  $H_p(X) \cong H_p(Y)$ , et cela pour tous les  $p$ . Donc  $q$  est un quasi-isomorphisme.  $\square$

## References

- [1] Ricardo Campos, Pedro Tamaroff, *Differential forms on smooth operadic algebras* [arXiv:2010.08815](https://arxiv.org/abs/2010.08815)
- [2] Masaki Kashiwara, Pierre Shapira, *Categories and Sheaves* Grundlehren der Mathematik **332**, Springer 2006
- [3] Joan Millès, *André-Quillen cohomology of algebras over an operad* *Advances in Math.* **226** (2011) 5120–5164.
- [4] Bodo Pareigis, *Categories and Functors* Academic Press New York, London 1970