

Groupe de travail : Lecture de l'article de Joan Millès  
« André-Quillen cohomology of algebras over an operad »  
Exposé n°12 : Modules fonctoriels des différentielles et du complexe  
cotangent

Jules Givelet

18 mars 2026

Précédemment, nous avons vu que, pour une  $\mathcal{P}$ -algèbre  $A$ , le morphisme

$$\mathrm{Ext}_{U_{\mathcal{P}}(A)}^{\bullet}(\Omega_{\mathcal{P}}(A), M) \rightarrow H_{\mathcal{P}}^{\bullet}(A, M)$$

(obtenu par des choix de résolutions cofibrantes  $R \rightarrow A$  et  $X \rightarrow \Omega_{\mathcal{P}}(A)$ ) est un isomorphisme pour tout  $M$  si et seulement si le morphisme

$$L_{R/A} = A \otimes_R^{\mathcal{P}} \Omega_{\mathcal{P}}(R) \rightarrow A \otimes_A \Omega_{\mathcal{P}}(A) = \Omega_{\mathcal{P}}(A)$$

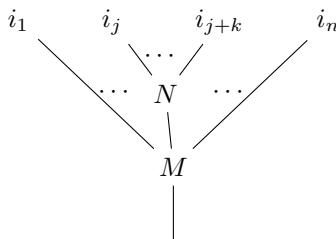
entre le complexe cotangent et le module des différentielles de Kähler est un quasi-isomorphisme (autrement dit, on peut remplacer  $X$  par  $L_{R/A}$ ).

On souhaite maintenant détecter opéradiquement quand est-ce que cela se produit pour toute  $\mathcal{P}$ -algèbre  $A$ . L'idée est d'introduire des  $\mathfrak{S}$ -modules  $L_{\mathcal{P}}$  et  $\Omega_{\mathcal{P}}$  sur lesquels  $\mathcal{P}$  agit et de telle sorte que

$$\begin{cases} L_{\mathcal{P}} \circ_{\mathcal{P}} A = L_{R/A} \\ \Omega_{\mathcal{P}} \circ_{\mathcal{P}} A = \Omega_{\mathcal{P}}(A). \end{cases}$$

## 1 Bimodule infinitésimal

Pour « rappels » un  $\mathfrak{S}$ -module (à droite)  $M$  est une collection d'espaces vectoriels  $(M(0), M(1), M(2), \dots)$  de telle sorte que  $M(n)$  soit un  $\mathfrak{S}_n$ -module à droite. La composition partielle de deux  $\mathfrak{S}$ -modules  $M$  et  $N$ , notée  $M \circ_{(1)} N$  est, en arité  $n$ , l'espace des combinaisons linéaires d'arbres étiquetés de la forme



(où  $i \in \mathfrak{S}_n$ ) quotienté par les relations de compatibilité entre les permutations des étiquettes des feuilles et les actions des groupes symétriques sur  $M$  et  $N$ . Par la suite, nous ne préciserons plus les étiquettes des feuilles.

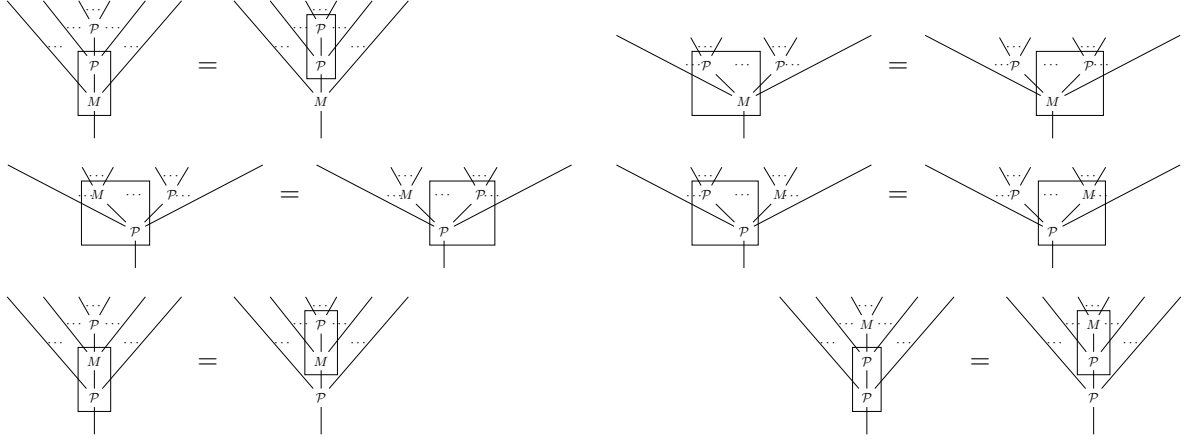
On reprend ici la définition de Ducoulombier, Fress et Turchin dans [1].

**■ Définition 1.1.** Un *bimodule infinitésimal* sur  $\mathcal{P}$  est un  $\mathfrak{S}$ -module  $M$  muni de morphismes  $\mathfrak{S}$ -équivariants

$\mathcal{P} \circ_{(1)} M \rightarrow M$  et  $M \circ_{(1)} \mathcal{P} \rightarrow M$  tels que, pour tout  $\mu \in M$ , on ait

$$\mu \circ_i \text{id} = \mu, \text{id} \circ \mu = \mu$$

et tels qu'on ait les compatibilités suivantes avec la composition de  $\mathcal{P}$  :



**Remarque 1.2.** Se donner une action infinitésimale à droite de  $\mathcal{P}$  sur  $M$  est équivalent au fait de se donner une action (non infinitésimale) à droite. En effet, dans un sens on définit

$$\mu \circ (\nu_1, \dots, \nu_n) := (\dots (\mu \circ_1 \nu_1) \circ_1 \dots) \circ_1 \nu_n$$

pour tout  $\mu \in M$  et  $\nu_i \in \mathcal{P}$  et dans l'autre

$$\mu \circ_i \nu := \mu \circ (\text{id}, \dots, \nu, \dots, \text{id}).$$

Si  $M$  est un  $\mathcal{P}$ -module (infinitésimal) à droite et  $A$  est une  $\mathcal{P}$ -algèbre (donc un  $\mathcal{P}$ -module à gauche en particulier), on peut définir  $M \circ_{\mathcal{P}} A$  comme le quotient de  $M \circ A$  identifiant l'action (infinitésimale) de  $\mathcal{P}$  sur  $M$  et l'action de  $\mathcal{P}$  sur  $A$ . C'est alors un  $\mathfrak{S}$ -module concentré en arité 0 car  $A$  l'est.

**Proposition 1.3.** Lorsque  $M$  est un  $\mathcal{P}$ -bimodule infinitésimal,  $M \circ_{\mathcal{P}} A$  obtient automatiquement une structure de  $A$ -module.

*Démonstration.* L'action infinitésimale à gauche de  $\mathcal{P}$  sur  $M$  fournit le morphisme structurel suivant

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{P} \circ (A \oplus (M \circ A)) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{P} \circ ((I \oplus M) \circ A) & \xrightarrow{\sim} & (\mathcal{P} \circ (I \oplus M)) \circ A \\
 \uparrow & & & & \uparrow \\
 \mathcal{P}(A, M \circ A) & \longrightarrow & & & (\mathcal{P} \circ_{(1)} M) \circ A \\
 \downarrow & & & & \downarrow \gamma_{M \circ A} \\
 \mathcal{P}(A, M \circ_{\mathcal{P}} A) & \longrightarrow & & & M \circ A \\
 & & & & \downarrow \\
 & & & & M \circ_{\mathcal{P}} A
 \end{array}$$

dont on peut vérifier les axiomes d'associativité usuels. Explicitement, pour  $\mu \in \mathcal{P}$  et  $\nu \in M$ , on a

$$\mu_{M \circ_{\mathcal{P}} A}^i(a_1, \dots, [\nu(a_i, \dots, a_{i+k})], \dots, a_n) := [(\mu \circ_i \nu)(a_1, \dots, a_n)].$$



On dira que l'on *réalise fonctoriellement* une construction  $\mathcal{M}$  associant à toute  $\mathcal{P}$ -algèbre  $A$  un  $A$ -module  $\mathcal{M}(A)$  lorsqu'il existe un  $\mathcal{P}$ -bimodule infinitésimal  $M$  tel que  $M \circ_{\mathcal{P}} A \simeq \mathcal{M}(A)$  pour toute  $\mathcal{P}$ -algèbre  $A$  puisque  $M \circ_{\mathcal{P}} -$  est alors un endofoncteur de la catégorie des  $\mathcal{P}$ -modules à gauche dont la restriction aux modules concentrés en arité 0 (les  $\mathcal{P}$ -algèbres) coïncide avec  $\mathcal{M}(-)$ .



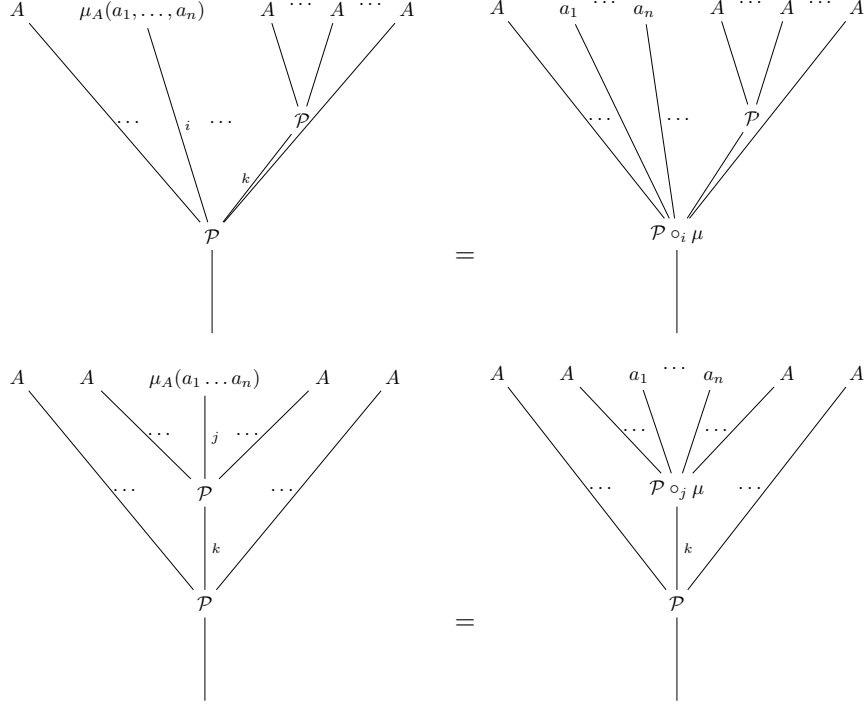
**Proposition 2.1.** Pour toute  $\mathcal{P}$ -algèbre  $A$ , on a un isomorphisme de  $A$ -modules

$$(\mathcal{P} \circ_{(1)} \mathcal{P}) \circ_{\mathcal{P}} A \simeq A \otimes^{\mathcal{P}} A.$$

*Démonstration.* La suite de morphismes surjectifs

$$(\mathcal{P} \circ_{(1)} \mathcal{P}) \circ A \simeq \mathcal{P}(A, \mathcal{P}(A)) \twoheadrightarrow \mathcal{P}(A, A) \twoheadrightarrow A \otimes^{\mathcal{P}} A$$

se factorise par la projection  $(\mathcal{P} \circ_{(1)} \mathcal{P}) \circ A \twoheadrightarrow (\mathcal{P} \circ_{(1)} \mathcal{P}) \circ_{\mathcal{P}} A$ . En effet, le noyau de cette projection est engendré par les relations de la forme



qui sont envoyées vers les relations de la formes

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^k(A, \dots, \mu_A(a_1, \dots, a_n), \dots, \mathcal{P}_A(A, \dots, A), \dots, A) &= (\mathcal{P} \circ_i \mu)^{k+n-1}(A, \dots, \mathcal{P}_A(A, \dots, A), \dots, A) \\ \mathcal{P}^k(A, \dots, \mathcal{P}_A(A, \dots, \mu_A(a_1, \dots, a_n), \dots, A), \dots, A) &= \mathcal{P}^k(A, \dots, (\mathcal{P} \circ_j \mu)_A(a_1, \dots, a_n), \dots, A) \end{aligned}$$

qui sont vérifiées dans  $A \otimes^{\mathcal{P}} A$ . On obtient donc un morphisme surjectif

$$(\mathcal{P} \circ_{(1)} \mathcal{P}) \circ_{\mathcal{P}} A \twoheadrightarrow A \otimes^{\mathcal{P}} A.$$

Dans l'autre sens, l'injection naturelle  $A \rightarrow (\mathcal{P} \circ_{(1)} \mathcal{P}) \circ_{\mathcal{P}} A$  envoyant  $a$  sur  $(\text{id} \circ_1 \text{id})(a)$  induit par propriété universelle un morphisme de  $A$ -modules

$$A \otimes^{\mathcal{P}} A \rightarrow (\mathcal{P} \circ_{(1)} \mathcal{P}) \circ_{\mathcal{P}} A.$$

Explicitement, il envoie  $\mu^i(a_1, \dots, a_n)$  sur  $(\mu \circ_i \text{id}) \circ (a_1, \dots, a_n)$  et c'est une rétraction du premier car

$$(\mu \circ_i \nu) \circ (a_1, \dots, a_n) = (\mu \circ_i \text{id}) \circ (a_1, \dots, \nu_A(a_i, \dots, a_{i+m}), \dots, a_n)$$

dans  $(\mathcal{P} \circ_{(1)} \mathcal{P}) \circ_{\mathcal{P}} A$ . ♣

Pour réaliser le module des différentielles, on considère le quotient  $\Omega_{\mathcal{P}}$  de  $\mathcal{P} \circ_{(1)} \mathcal{P}$  par les relations de la forme

$$\begin{aligned} & \begin{array}{c} \dots \\ \dots \mu \circ (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \dots \\ \mathcal{P} \\ | \\ k \end{array} \\ &= \sum_{i=1}^n \begin{array}{c} \dots \\ \dots \alpha_i \dots \\ \mathcal{P} \circ_k (\mu \circ (\alpha_1, \dots, \hat{\alpha}_i, \dots, \alpha_n)) \\ | \end{array} \end{aligned} \quad (2)$$

**Proposition 2.2.** On a un isomorphisme de  $A$ -modules

$$\Omega_{\mathcal{P} \circ_{\mathcal{P}}} A \simeq \Omega_{\mathcal{P}}(A).$$

*Démonstration.* Notons  $K_{\mathcal{P}} = \text{Ker}(\mathcal{P} \circ_{(1)} \mathcal{P} \rightarrow \Omega_{\mathcal{P}})$ . Par exactitude à droite de  $- \circ_{\mathcal{P}} A$ , il suffit de montrer que  $\text{Im}(K_{\mathcal{P}} \circ_{\mathcal{P}} A \rightarrow A \otimes^{\mathcal{P}} A) = \text{Ker}(A \otimes^{\mathcal{P}} A \rightarrow \Omega_{\mathcal{P}}(A))$ . Pour le sens direct, on pose

$$a_k := \alpha_k(b_{I_{k-1}+1}, \dots, b_{I_k})$$

dans la relation de (1) (il faut se rappeler que, dans (1), on considère le  $A$ -module engendré par les relations) et, pour le sens inverse, on remplace les  $\alpha_i$  et  $\mathcal{P}$  par  $\text{id}$  dans (2). ✿

**Corollaire 2.3.** On a un isomorphisme linéaire

$$(\Omega_{\mathcal{P}} \circ_{\mathcal{P}} I) \circ A \simeq \Omega_{\mathcal{P}}(A^{\text{triv}}).$$

### 3 Complexe cotangent fonctoriel

Pour « rappels », les résolutions de  $A$ , en tant que  $\mathcal{P}$ -algèbre, que l'on a vu jusqu'à présent sont des résolutions quasi-libres. Elles sont obtenues en considérant un morphisme de Koszul  $\alpha : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{P}$  (par exemples,  $B\mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$  ou  $\mathcal{P}^i \rightarrow \mathcal{P}$  si  $\mathcal{P}$  est de Koszul) puisque, par Koszulité de  $\alpha$ , le morphisme naturellement induit

$$(\mathcal{P}(\mathcal{C}(A)), d_{\alpha}) \rightarrow A$$

est un quasi-isomorphisme. Ce morphisme est obtenu en étendant naturellement l'application linéaire

$$\varphi : \mathcal{C}(A) \xrightarrow{\eta_{\mathcal{C}(A)}} A.$$

Le complexe cotangent associé à une telle résolution s'explique (partie 4) de la manière suivante

$$L_{\mathcal{P}(\mathcal{C}(A))/A} \simeq (A \otimes^{\mathcal{P}} \mathcal{C}(A), d_{\varphi}).$$

où  $d_{\varphi} = d_{A \otimes^{\mathcal{P}} \mathcal{C}(A)} - \delta_{\varphi}^l + \delta_{\varphi}^r$  avec  $\delta_{\varphi}^l$  induit par

$$\mathcal{P}(A, \mathcal{C}(A)) \xrightarrow{\Delta_{(1)}} \mathcal{P}(A, \mathcal{C} \circ_{(1)} \mathcal{C}(A)) \xrightarrow{\alpha \circ_{(1)} \text{id}_{\mathcal{C}}} \mathcal{P}(A, \mathcal{P} \circ_{(1)} \mathcal{C}(A)) \xrightarrow{\gamma} \mathcal{P}(A, \mathcal{C}(A))$$

et  $\delta_{\varphi}^r$  induit par

$$\mathcal{P}(A, \mathcal{C}(A)) \xrightarrow{\Delta_{(1)}} \mathcal{P}(A, \mathcal{C} \circ_{(1)} \mathcal{C}(A)) \xrightarrow{\text{id}_{\mathcal{C}} \circ_{(1)} \alpha} \mathcal{P}(A, \mathcal{C} \circ_{(1)} \mathcal{P}(A)) \xrightarrow{\gamma_A} \mathcal{P}(A, \mathcal{C}(A)).$$

**Remarque 3.1.** La notation est un peu bizarre ici car on devrait plutôt noter  $d_{\varphi, \alpha}$  en toute généralité. Je garde la simplification faite dans l'article de Millès dans le paragraphe précédant le théorème 4.4.2.

Pour fonctorialiser cela, on introduit le  $\mathcal{P}$ -bimodule  $L_{\mathcal{P}} := \mathcal{P} \circ_{(1)} (\mathcal{C} \circ \mathcal{P})$ .

**Proposition 3.2.** On a un isomorphisme de  $A$ -modules

$$L_{\mathcal{P}} \circ_{\mathcal{P}} A \simeq A \otimes^{\mathcal{P}} \mathcal{C}(A).$$

*Démonstration.* La démonstration est tout à fait similaire à celle de la proposition 2.1 donc on détaillera moins ici. L'isomorphisme  $L_{\mathcal{P}} \circ A = (\mathcal{P} \circ_{(1)} (\mathcal{C} \circ \mathcal{P})) \circ A \simeq \mathcal{P}(A, \mathcal{C}(\mathcal{P}(A)))$  permet de définir, en appliquant  $\gamma_A$  au bon endroit, un morphisme surjectif

$$L_{\mathcal{P}} \circ A \twoheadrightarrow A \otimes^{\mathcal{P}} \mathcal{C}(A)$$

qui se factorise bien par  $L_{\mathcal{P}} \circ_{\mathcal{P}} A$ .

Dans l'autre sens, on définit un morphisme  $A \otimes^{\mathcal{P}} \mathcal{C}(A) \rightarrow L_{\mathcal{P}} \circ_{\mathcal{P}} A$  par propriété universelle du  $A$ -module libre en envoyant

$$\begin{array}{ccc}
 & & \begin{array}{c} A \quad A \\ | \quad | \\ \text{id} \cdots \text{id} \\ \diagdown \quad \diagup \\ \mathcal{C} \\ | \\ \text{id} \\ | \end{array} \\
 & \mapsto & \\
 \begin{array}{c} A \quad A \\ \diagdown \quad \diagup \\ \mathcal{C} \\ | \end{array} & & 
 \end{array}$$

et on peut vérifier que c'est une rétraction du premier. ✿

**Remarque 3.3.** En fait, la proposition 2.1 est le cas particulier de celle-ci où  $\mathcal{C} = I$ .

Pour la différentielle, on introduit la différentielle suivante sur  $L_{\mathcal{P}} : d_{L_{\mathcal{P}}} = d_{\mathcal{P} \circ_{(1)} (\mathcal{C} \circ \mathcal{P})} - \delta_{L_{\mathcal{P}}}^l + \delta_{L_{\mathcal{P}}}^r$  où  $\delta_{L_{\mathcal{P}}}^l$  est induit par

$$\mathcal{P} \circ_{(1)} (\mathcal{C} \circ \mathcal{P}) \xrightarrow{\Delta(1)} \mathcal{P} \circ_{(1)} ((\mathcal{C} \circ_{(1)} \mathcal{C}) \circ \mathcal{P}) \xrightarrow{\alpha \circ_{(1)} \text{id}_{\mathcal{C}}} \mathcal{P} \circ_{(1)} ((\mathcal{P} \circ_{(1)} \mathcal{C}) \circ \mathcal{P}) \xrightarrow{\gamma \circ \gamma} \mathcal{P} \circ_{(1)} (\mathcal{C} \circ \mathcal{P})$$

et  $\delta_{L_{\mathcal{P}}}^r$  est induit par

$$\mathcal{P} \circ_{(1)} (\mathcal{C} \circ \mathcal{P}) \xrightarrow{\Delta(1)} \mathcal{P} \circ_{(1)} ((\mathcal{C} \circ_{(1)} \mathcal{C}) \circ \mathcal{P}) \xrightarrow{\text{id}_{\mathcal{C}} \circ_{(1)} \alpha} \mathcal{P} \circ_{(1)} ((\mathcal{C} \circ_{(1)} \mathcal{P}) \circ \mathcal{P}) \xrightarrow{\gamma} \mathcal{P} \circ_{(1)} (\mathcal{C} \circ \mathcal{P})$$

**Proposition 3.4.** On a un isomorphisme de  $A$ -modules différentiels gradués

$$(L_{\mathcal{P}} \circ_{\mathcal{P}} A, d_{L_{\mathcal{P}} \circ_{\mathcal{P}} A}) \simeq (A \otimes^{\mathcal{P}} \mathcal{C}(A), d_{\varphi})$$

*Démonstration.* L'identification de  $d_{\mathcal{P} \circ_{(1)} (\mathcal{C} \circ \mathcal{P})} \circ_{\mathcal{P}} A$  avec  $d_{A \otimes^{\mathcal{P}} \mathcal{C}(A)}$  est purement formelle. Les identifications  $\delta_{L_{\mathcal{P}}}^l \circ_{\mathcal{P}} A = \delta_{\varphi}^l$  et  $\delta_{L_{\mathcal{P}}}^r \circ_{\mathcal{P}} A = \delta_{\varphi}^r$  sont données par l'identification des éléments de  $A$  par  $\text{id}(A) \in \mathcal{P}(A)$  et par la relation imposée dans  $L_{\mathcal{P}} \circ_{\mathcal{P}} A$  identifiant  $\gamma_A$  avec  $\gamma$  (c'est tout à fait similaire à ce qu'on a fait dans la démonstration de la proposition 2.2). ✿

**Corollaire 3.5.** On a un isomorphisme de complexes de chaînes

$$((L_{\mathcal{P}} \circ_{\mathcal{P}} I) \circ A, d_{(L_{\mathcal{P}} \circ_{\mathcal{P}} I) \circ A}) \simeq (A^{\text{triv}} \otimes^{\mathcal{P}} \mathcal{C}(A^{\text{triv}}), d_{\varphi})$$

On a un morphisme de  $\mathcal{P}$ -bimodules infinitésimaux

$$L_{\mathcal{P}} = \mathcal{P} \circ_{(1)} (\mathcal{C} \circ \mathcal{P}) \xrightarrow{\eta_{\mathcal{C}}} \mathcal{P} \circ_{(1)} (I \circ \mathcal{P}) \simeq \mathcal{P} \circ_{(1)} \mathcal{P} \twoheadrightarrow \Omega_{\mathcal{P}}$$

qui, d'après les propositions précédentes et la remarque 3.3, réalise fonctoriellement le morphisme

$$L_{R/A} = A \otimes^{\mathcal{P}} \mathcal{C}(A) \xrightarrow{\eta_{\mathcal{C}}} A \otimes^{\mathcal{P}} I(A) \simeq A \otimes^{\mathcal{P}} A \twoheadrightarrow \Omega_{\mathcal{P}}(A).$$

Ainsi, par functorialité de  $- \circ_{\mathcal{P}} A$ , on a le résultat suivant.

**Théorème 3.6.** Si l'application  $L_{\mathcal{P}} \rightarrow \Omega_{\mathcal{P}}$  est un quasi-isomorphisme, alors  $L_{R/A} \rightarrow \Omega_{\mathcal{P}}(A)$  en est un pour toute  $\mathcal{P}$ -algèbre  $A$  et on a

$$\text{Ext}_{U_{\mathcal{P}}(A)}^{\bullet}(\Omega_{\mathcal{P}}(A), M) \simeq H_{\mathcal{P}}^{\bullet}(A, M).$$

La prochaine fois, on voudra comprendre pourquoi la réciproque est vraie et pourquoi, dans le cas des opérades PBW (*i.e.* telle qu'on ait un isomorphisme linéaire naturel  $U_{\mathcal{P}}(A) \simeq U_{\mathcal{P}}(A^{\text{triv}})$ ), on peut se ramener à ne vérifier cela que pour les algèbres triviales.

## Références

- [1] Julien DUCOULOMBIER, Benoit FRESSE et Victor TURCHIN. « Projective and Reedy model category structures for (infinitesimal) bimodules over an operad ». In : 30.5 (2022), p. 825-920. DOI : [10.1007/s10485-022-09675-z](https://doi.org/10.1007/s10485-022-09675-z). eprint : [1911.03890](https://arxiv.org/abs/1911.03890). URL : [https://pure.mpg.de/view/item\\_3376827](https://pure.mpg.de/view/item_3376827).
- [2] Joan MILLÈS. « André–Quillen cohomology of algebras over an operad ». In : *Advances in Mathematics* 226.6 (2011), p. 5120-5164. ISSN : 0001-8708. DOI : <https://doi.org/10.1016/j.aim.2011.01.002>. URL : <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0001870811000065>.