Groupe de travail : Lecture de l'article de Joan Millès « André-Quillen cohomology of algebras over an operad » Exposé n°2 : Différentielles de Kähler

Jules Givelet

9 octobre 2025

1 Différentielles de Kähler d'une algèbre commutative (unitaire)

Dans cette section, A désigne une $\mathbb{K}$-algèbre commutative unitaire *i.e.* une $u\mathcal{C}om$-algèbre, et M désigne un A-module.

Définition 1.1. Une *dérivation* de A à valeur dans M est une application $\mathbb{K}$-linéaire $d : A \to M$ telle que $d(ab) = b \cdot d(a) + a \cdot d(b)$. On note $\mathrm{Der}(A, M)$ l'ensemble des dérivations de A dans M.

Remarque 1.2. Le module $\mathrm{Der}(A) := \mathrm{Der}(A, A)$ est la brique de base en géométrie algébrique du faisceau $\mathcal{D}er(\mathcal{O}_X)$ des dérivations sur un schéma X. Ce faisceau joue alors le rôle du fibré tangent. Ce faisceau tangent est un $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang d pour une variété algébrique de dimension d. Or, l'ensemble des $\mathcal{O}_X$-module localement libre de rang 1 forment un groupe sous le produit tensoriel (l'inverse est donné par le dual) appelé le groupe de Picard de X. Si X est une courbe, alors son faisceau des dérivations est localement libre de rang 1 et c'est un problème récurent de trouver la place du module tangent dans le groupe de Picard.

Par exemple, le groupe de Picard de la droite projective $\mathbb{P}^1$ est libre de rang 1, engendré par $\mathcal{O}(1)$ le faisceau tordant de Serre, et on a $\mathcal{D}er(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}) = \mathcal{O}(2) = \mathcal{O}(1) \otimes \mathcal{O}(1)$ (car la dérivée de $1/x$ est $-1/x^2$).

Proposition 1.3. Si $d : A \to M$ est une dérivation, on a $d(1) = 0$ et

$$d(a_1 \cdots a_n) = \sum_{i=1}^{n} (a_1 \cdots \widehat{a_i} \cdots a_n) \cdot d(a_i).$$

Démonstration. En prenant $a = b = 1$, on a $d(1) = 2d(1)$ et donc $d(1) = 0$. Ensuite, par récurrence, en prenant $a = a_1 \cdots a_{n-1}$ et $b = a_n$, on obtient

$$d(a_1 \cdots a_n) = (a_1 \cdots a_{n-1}) \cdot d(a_n) + \sum_{i=1}^{n-1} (a_1 \cdots \widehat{a_i} \cdots a_n) \cdot d(a_i).$$

✿

L'ensemble $\mathrm{Der}(A, M)$ est un sous A-module de $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(A, M)$ et le but des différentielles de Kähler est de représenter le foncteur $\mathrm{Der}(A, -)$.

Définition 1.4. Un A-module Ω muni d'une dérivation $d_\Omega : A \to \Omega$ est un *module des différentielles de Kähler de* A s'il vérifie la propriété universelle suivante : Pour toute dérivation $d : A \to M$, il existe un unique morphisme de A-modules $f_d : \Omega \to M$ tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\forall d"] \arrow[d, "d_\Omega"'] & M \\ \Omega \arrow[ur, dashed, "\exists ! f_d"'] & \end{tikzcd}$$

D'après l'abstract non-sense habituel (le lemme de Yoneda), un tel A-module est unique à isomorphisme près et on note alors $\Omega(A)$ l'unique module les différentielles de Kähler de A. La propriété universelle précédente se traduit alors en un isomorphisme naturel

$$\mathrm{Hom}_A(\Omega(A), M) \simeq \mathrm{Der}(A, M).$$

Proposition 1.5. Le module des différentielles de Kähler $\Omega(A)$ existe.

Démonstration. On considère le A-module libre engendré par l'espace vectoriel A :

$$A \otimes A$$

On note $d : A \to A \otimes A$ l'application envoyant a sur $1 \otimes a$ (c'est la counité de l'adjonction : $\mathrm{Vect} \rightleftharpoons \mathrm{Mod}(A)$) de telle sorte que

$$a \otimes b = a \cdot d(b) \in A \otimes A.$$

On considère alors le quotient

$$\frac{A \otimes A}{d(ab) - (a \cdot d(b) + b \cdot d(a)) : a, b \in A)} = \frac{A \otimes A}{(1 \otimes ab - (a \otimes b + b \otimes a) : a, b \in A)} =: \Omega(A)$$

On note encore $d : A \to \Omega(A)$ le morphisme envoyant a sur $[1 \otimes a]$. Par construction, $d : A \to \Omega(A)$ est une dérivation.

Toute application linéaire $\delta : A \to M$ induit alors un morphisme de A-modules $A \otimes A \to M$ (explicitement, il envoie $a \otimes b$ sur $a \cdot \delta(b)$) et le fait que ce morphisme passe au quotient en $f_\delta : \Omega(A) \to M$ est équivalent au fait que δ soit une dérivation. L'égalité $f \circ d = \delta$ est alors équivalente au fait que f provient du morphisme $A \otimes A \to M$ induit par δ. ✿

Aparté sur le mot « différentielle » Il faut visualiser les éléments de $\Omega(A)$ comme des formes différentielles de degré 1 si bien que certain.es désigneront ce module par $\Omega^1(A)$ ou $\Omega^1_{A/\mathbb{K}}$. En effet, le module $\Omega^n(A) := \bigwedge^n \Omega^1(A)$ est alors engendré par des éléments de la forme $da_1 \wedge \cdots \wedge da_n$ et la dérivation $d : A \to \Omega^1(A)$ induit une dérivation $\Omega^n(A) \to \Omega^{n+1}(A)$ telle que $d^2 = 0$. La cohomologie de $(\Omega^\bullet(A), d)$ est alors appelé *cohomologie algébrique de De Rham de A*. Elle se définit de manière plus générale pour tout schéma X au dessus de $\mathbb{K}$ (et même pour tout morphisme de schémas $X \to Y$). Grothendieck a alors montré que l'on retrouve la cohomologie de De Rham habituelle lorsque l'on remplace une variété algébrique complexe lisse X par son *analytifié* X^{an} qui n'est autre que $X(\mathbb{C})$ munie d'une structure naturelle de variété analytique complexe

$$H^\bullet_{dR}(X/\mathbb{C}) \simeq H^\bullet_{dR}(X^{an}).$$

Exemple 1.6. On a $\Omega(\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]) = \bigoplus_{i=1}^n \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]dx_i$ car une dérivation δ sur $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ est entièrement déterminée par ses valeurs en les x_i :

$$\delta(x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}) = \sum_{k=1}^n i_k (x_1^{i_1} \cdots x_k^{i_k - 1} \cdots x_n^{i_n}) \cdot \delta(x_k).$$

La dérivée partielle habituelle $\partial/\partial x_i : \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n] \to \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$ correspond alors à la forme $\mathbb{K}[x_1, \ldots, x_n]$-linéaire dx_i^*.

Exercice 1.7. *Montrer que si* $A = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]/(f_1, \dots, f_m)$*, alors* $\Omega(A)$ *s'identifie au conoyau de la transposée de la Jacobienne de* $f : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^m$ *:*

$$\Omega(A) \simeq \mathrm{coKer}\left(\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} : A^m \to A^n\right).$$

En dualisant ce résultat, montrer que $\mathrm{Der}(A, A) =: \mathrm{Der}(A)$ *s'identifie au noyau de la Jacobienne de* f

$$\mathrm{Der}(A) \simeq \mathrm{Ker}\left(\begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix} : A^n \to A^m\right)$$

et le redémontrer directement à la main.

On peut se demander comment se comporte le foncteur Ω vis à vis de l'extension des scalaires. Si $\pi : B \to A$ est un morphisme d'algèbres, alors on a un morphisme naturel

$$\begin{aligned} A \otimes_B \Omega(B) &\xrightarrow{d\pi} \Omega(A \otimes_B B) = \Omega(A) \\ a \otimes db &\longmapsto ad(\pi(b)) \end{aligned}$$

On observe que si $\pi : B \to A$ est surjectif, alors ce morphisme est surjectif aussi. De plus, le noyau de π fournis alors une description du noyau de ce morphisme.

Théorème 1.8 (Suite conormale)**.** Si $\pi : B \to A$ est un morphisme d'algèbres surjectif de noyau I, alors I/I^2 a une structure naturelle de A-module et on a une suite exacte de A-modules

$$I/I^2 \xrightarrow{D} A \otimes_B \Omega(B) \xrightarrow{d\pi} \Omega(A) \longrightarrow 0.$$

De plus, si $\pi : B \to A$ admet une section $s : A \to B$, alors cette suite est scindée à gauche (et donc à droite) *i.e.*

$$A \otimes_B \Omega(B) \simeq I/I^2 \oplus \Omega(A).$$

Démonstration. <u>La structure de A-module de I/I^2</u> provient du fait que l'on ait $A = B/I$ et donc un A-module n'est qu'un B-module M tel que l'action des éléments de I soit nulle. Ici, I est un sous B-module de B, donc I/I^2 est un B-module et l'action de I est nulle par construction.

<u>Le morphisme $D : I/I^2 \to A \otimes_B \Omega(B)$</u> est le morphisme induit par

$$\begin{aligned} I &\longrightarrow A \otimes_B \Omega(B) \\ b &\longmapsto 1 \otimes db \end{aligned}$$

qui est nul sur I^2 car pour tout $b, b' \in I = \mathrm{Ker}(\pi)$,

$$1 \otimes d(bb') = 1 \otimes bdb' + 1 \otimes b'db = \pi(b) \otimes db' + \pi(b') \otimes db = 0.$$

Ce même calcul montre que c'est une application A-linéaire en remplaçant $b \in I$ par un élément quelconque de B :

$$1 \otimes d(a \cdot b') = 1 \otimes bb' = a \otimes db$$

où $\pi(b) = a$.

Montrons que $\underline{d\pi \text{ induit un isomorphisme } \mathrm{coKer}(D) \to \Omega(A)}$. La composition $d\pi \circ D$ est nulle car pour tout $b \in I = \mathrm{Ker}(\pi)$, $d(\pi(b)) = 0 \in \Omega(A)$. Le morphisme $d\pi$ induit donc un morphisme $d\pi : \mathrm{coKer}(D) \to \Omega(A)$. Pour l'inverse, on considère le morphisme

$$\Omega(A) \longrightarrow A \otimes_B \Omega(B)$$

induit par la dérivation

$$\delta : B \xrightarrow{d} \Omega(B) \longrightarrow A \otimes_B \Omega(B) \longrightarrow \mathrm{coKer}(D)$$

qui passe au quotient par I en une dérivation $\delta : A \to A \otimes_B \Omega(B)$ puisque pour $b \in I$, on a

$$\delta(b) = [1 \otimes db] = [D([b])] = 0.$$

Ce sont bien des isomorphismes réciproques :

$$[a \otimes db] \xmapsto{d\pi} ad(\pi(b)) \xmapsto{f_\delta} [a \otimes db]$$
$$ada' \xmapsto{f_\delta} [a \otimes db'] \xmapsto{d\pi} ad(\pi(b')) = ada'$$

où b' est un antécédent de a' par π.

Maintenant, si π admet une section s, alors $\underline{D \text{ admet une rétraction } \rho : A \otimes_B \Omega(B) \to I/I^2}$. Pour cela, on considère la dérivation

$$\begin{aligned} \varepsilon :\ B &\longrightarrow I/I^2 \\ b &\longmapsto [b - s\pi(b)] \end{aligned}$$

qui en est bien une car $\varepsilon(bb') = b\varepsilon(b') + b'\varepsilon(b) - \underbrace{\cancel{\varepsilon(b)\varepsilon(b')}}_{\in I^2}$. Elle induit un morphisme $\Omega(B) \to I/I^2$ et par extension des scalaires un morphisme

$$\begin{aligned} \rho :\ A \otimes_B \Omega(B) &\longrightarrow I/I^2 \\ a \otimes db &\longmapsto [s(a) \cdot (b - s\pi(b))] \end{aligned}$$

C'est bien une rétraction de D : $\rho D([b]) = b - \underbrace{\cancel{s\pi(b)}}_{b \in I}$. ✿

Remarque 1.9. La dérivation $B \xrightarrow{d} \Omega(B) \longrightarrow A \otimes_B \Omega(B)$ utilisée pour construire l'isomorphisme $\Omega(A) \simeq \mathrm{coKer}(D)$ permet aussi de construire la section $\sigma : \Omega(A) \to A \otimes_B \Omega(B)$ de $d\pi$ lorsque π admet une section s en considérant la dérivation

$$A \xrightarrow{s} B \xrightarrow{d} \Omega(B) \longrightarrow A \otimes_B \Omega(B).$$

Le module $A \otimes_B \Omega(B)$ associée à la donnée (B, π) d'une algèbre au-dessus de A est centrale dans la définition de la cohomologie d'André-Quillen puisqu'elle s'obtient en « dérivant » le foncteur $A \otimes_- \Omega(-)$. En fait, ce module vient palier le fait que la représentation du foncteur $\mathrm{Der}(A, -)$ par $\Omega(A)$ n'est pas fonctorielle car $\mathrm{Der}(A, M)$ n'est pas fonctoriel en A si l'on fait parcourir A la catégorie des algèbres commutatives unitaires. La solution est de plutôt parcourir la catégorie des algèbres au-dessus de A.

Pour rappel, un *truc au dessus d'un truc* X d'une catégorie $\mathcal{C}$ est la donnée d'un morphisme $Y \to X$, un morphisme de trucs au-dessus de X est un triangle commutatif et la catégorie des trucs au-dessus de X est notée $\mathcal{C}_{/X}$.

Définition 1.10. Soit (B, π) une algèbre au-dessus de A. Une *dérivation au-dessus de* A sur B à valeurs dans un A-module M est une application $\mathbb{K}$-linéaire $d : B \to M$ telle que

$$d(b_1 b_2) = \pi(b_1) \cdot d(b_2) + \pi(b_1) \cdot d(b_2).$$

On note $\mathrm{Der}^A(B, M)$ le module des dérivations au-dessus de A de B dans M.

Autrement dit, on a $\mathrm{Der}^A(B,M) = \mathrm{Der}(B, M^\pi)$ où M^π est la restriction des scalaires de M le long de π. On a alors

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_A(A \otimes_B \Omega(B), M) &\simeq \mathrm{Hom}_B(\Omega(B), M^\pi)\\ &\simeq \mathrm{Der}(B, M^\pi)\\ &= \mathrm{Der}^A(B,M).\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathrm{Der}^A(B,M)$ est une construction bi-fonctorielle :

$$\mathrm{Der}^A : (\mathrm{Alg}(u\mathcal{C}om)_{/A})^{\mathrm{op}} \times \mathrm{Mod}(A) \to \mathrm{Vect}$$

représentable à gauche par $A \otimes_- \Omega(-)$. Il est aussi représentable à droite grâce à l'extension triviale de A par un A-module M.

Définition 1.11. *L'extensions triviale de A par M*, notée $A \ltimes M$ est l'espace vectoriel $A \oplus M$ munie de la multiplication

$$(a,x)(a',x') = (aa', a\cdot x' + a' \cdot x)$$

qui forme alors une algèbre commutative unitaire d'unité $(1,0)$.

L'extension triviale de A par M est automatiquement munie d'une structure d'algèbre au-dessus de A grâce à la projection de la première coordonnée $A \ltimes M \to A$ qui a l'avantage d'admettre une section $\eta : A \to A \ltimes M$ $a \mapsto (a,0)$.

Proposition 1.12. On a un isomorphisme naturel pour tout $(B,\pi) \in \mathrm{Alg}(u\mathcal{C}om)_{/A}$:

$$\mathrm{Der}^A(B,M) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Alg}(u\mathcal{C}om)_{/A}}(B, A \ltimes M).$$

Démonstration. Dans un sens, si $d : B \to M$ est un dérivation au-dessus de A, alors (π, d) est un morphisme d'algèbres au-dessus de A et dans l'autre, la seconde composante d'un morphisme $B \to A \ltimes M$ est une dérivation au-dessus de A. ✿

L'adjonction

$$A \otimes_- \Omega(-) : \mathrm{Alg}(u\mathcal{C}om)_{/A} \leftrightharpoons \mathrm{Mod}(A) : A \ltimes -$$

est ce qu'on appelle une *adjonction de Quillen* (*cf.* prochain exposé !) et c'est cela qui assure le fait que l'on puisse dériver le foncteur $A \otimes_- \Omega(-)$ sereinement.

Une construction de $\Omega(A)$ comme module conormal Une construction classique de $\Omega(A)$ (les géomètres algébriques l'adorent !) provient de l'identification suivante :

Proposition 1.13. Posons $I := \mathrm{Ker}(\mu : A \otimes A \to A)$ le noyau de la multiplication. On a un isomorphisme

$$\Omega(A) \simeq I/I^2.$$

Démonstration. Dans un sens, on considère le morphisme induit par la dérivation $A \to I/I^2$ envoyant a sur $[1 \otimes a - a \otimes 1]$ et dans l'autre le morphisme envoyant $[\tau] = [\tau_{(1)} \otimes \tau_{(2)}]$ (notation d'Einstein) sur $\tau_{(1)} d\tau_{(2)}$. ✿

Exercice 1.14. *Rédiger les détails de la démonstration précédente.*

Les détails ont été laissé en exercices car tout est en fait contenu dans une suite conormale scindée. En effet, on applique ici la proposition 1.8 avec les paramètres suivant :

$$\begin{aligned}&B := A \otimes A\\ &\pi := \mu\\ &s : \begin{array}{rcl} A & \longrightarrow & A \otimes A\\ a & \longmapsto & a \otimes 1\end{array}\\ &\mathbb{K} := A\end{aligned}$$

Avant de crier à la sorcellerie en se qui concerne le dernier point, rendez-vous compte que, d'une part, on a jamais utilisé le fait que $\mathbb{K}$ était un corps et qu'on aurait pu partir de n'importe quelle algèbre commutative unitaire à la place ; et d'autre part, B est un A-module grâce à s. Ceci étant dit, on écrira ici $\Omega(B/A)$ pour désigner son module des différentielles de Kähler A-linéaire (et donc $\Omega(B) = \Omega(B/\mathbb{K})$).

Maintenant que l'on a calmé nos ardeurs, la suite conormale scindée associée dans ce cadre est

$$0 \longrightarrow I/I^2 \longrightarrow A \otimes_B \Omega_A(B) \longrightarrow \Omega(A/A) \longrightarrow 0$$

Or, $\Omega(A/A) = 0$ ($d(1) = 0$ et d est A-linéaire) et on a la proposition suivante.

Lemme 1.15. Soit A et C deux algèbres commutatives unitaires. L'algèbre $A \otimes C$ est alors une A-algèbre et on a

$$\Omega(A \otimes C/A) \simeq A \otimes \Omega(C).$$

Démonstration. Dans un sens, on considère le morphisme f induit par la dérivation A-linéaire $A \otimes C \to A \otimes \Omega(C)$ obtenu par extension des scalaires de la dérivation universelle de C. Dans l'autre, on considère l'extension des scalaires g du morphisme induit par la dérivation

$$C \longrightarrow A \otimes C \xrightarrow{d} \Omega(A \otimes C/A).$$

On a alors

$$fg(a \otimes cdc') = f((a \otimes c)d(1 \otimes c')) = a \otimes cdc'$$
$$gf((a \otimes c)d(a' \otimes c')) = g(aa' \otimes cdc') = (aa' \otimes c)d(1 \otimes c) = (a \otimes c)d(a' \otimes c')$$

✿

Ainsi, en appliquant cela à $C := A$, on a

$$\begin{aligned} A \otimes_{A \otimes A} \Omega(A \otimes A/A) &= A \otimes_{A \otimes A} (A \otimes \Omega(A)) \\ &= A \otimes_{A \otimes A} (A \otimes A \otimes_A \Omega(A)) \\ &= (A \otimes_{A \otimes A} (A \otimes A)) \otimes_A \Omega(A) \\ &= A \otimes_A \Omega(A) \\ &= \Omega(A) \end{aligned}$$

Voici en deux diagrammes les liens explicites entre la suite conormale scindée et les morphismes exhibés dans la preuve de la proposition 1.13 :

$$\begin{tikzcd}
{[b]} \arrow[r, mapsto] \arrow[dddr, mapsto, bend right] & 1 \otimes db \arrow[ddd, mapsto, bend left] \\
I/I^2 \arrow[r, "D"] \arrow[dr] & A \otimes_B \Omega_A(B) \arrow[d, "\sim"] \\
 & \Omega(A) \\
 & b_{(1)}db_{(2)}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
{[(a \otimes 1)(b - b_{(1)}b_{(2)} \otimes 1)]} & a \otimes db \arrow[l, mapsto] & \\
I/I^2 & A \otimes_B \Omega_A(B) \arrow[l, "\rho"'] & 1 \otimes d(1 \otimes a) \\
{[1 \otimes a - a \otimes 1]} & \Omega(A) \arrow[u, "\sim"] \arrow[ul] & \\
 & da \arrow[ul, mapsto] \arrow[uur, mapsto] &
\end{tikzcd}$$

2 Différentielles de Kähler d'une $\mathcal{P}$-algèbre

Dorénavant, A est une algèbre sur une opérade $\mathcal{P}$ et M est un A-module au sens vu à l'exposé précédent.

Définition 2.1. Une *dérivation* de A dans M est une application $\mathbb{K}$-linéaire $d : A \to M$ telle que pour tout $\mu \in \mathcal{P}$:

$$d(\mu_A(a_1, \ldots, a_n)) = \sum_{i=1}^{n} \mu_M^i(a_1, \ldots, d(a_i), \ldots, a_n).$$

Si (B, π) est une $\mathcal{P}$-algèbre au-dessus de A, une dérivation au-dessus de A de B dans M est une dérivation de B dans M^π *i.e.* pour tout $\mu \in \mathcal{P}$:

$$d(\mu_B(b_1, \dots, b_n)) = \sum_{i=1}^{n} \mu_M^i(\pi(b_1), \dots, d(b_i), \dots, \pi(b_n)).$$

Lorsque l'opérade est présentée par générateurs et relations, il suffit de vérifier la compatibilité entre la dérivation et les opérations génératrices pour qu'il y ait compatibilité avec toutes les opérations de l'opérade comme on l'a vérifié explicitement dans la proposition 1.3.

Définition 2.2. Le *module des différentielles de Kähler* d'une $\mathcal{P}$-algèbre A est un A-module $\Omega_{\mathcal{P}}(A)$ munie d'une dérivation $d : A \to \Omega(A)$ induisant un isomorphisme naturel

$$\mathrm{Hom}_A(\Omega_{\mathcal{P}}(A), M) \xrightarrow[\sim]{d^*} \mathrm{Der}(A, M).$$

Proposition 2.3. Le module des différentielles de Kähler existe pour toute $\mathcal{P}$-algèbre A.

Démonstration. Comme précédemment, comme on souhaite construire le « A-module muni d'une dérivation » libre, on considère le A-module libre engendré par A

$$A \otimes^{\mathcal{P}} A = U_{\mathcal{P}}(A) \otimes A.$$

Puis, on note $d : A \to U_{\mathcal{P}}A \otimes A$ la counité (qui envoie a sur $1 \otimes A$) et on considère le quotient $\Omega_{\mathcal{P}}(A)$ de $U_{\mathcal{P}}(A) \otimes A$ par les relations de la forme

$$d(\mu_A(a_1, \dots, a_n)) - \sum_{i=1}^{n} \mu^i_{U_{\mathcal{P}}(A)\otimes A}(a_1, \dots, d(a_i), \dots, a_n).$$

de telle sorte qu'un morphisme partant de $\Omega_{\mathcal{P}}(A)$ correspond à une dérivation et réciproquement. ✿

Exemples 2.4.

— Si $A = \mathcal{P}(V)$ est libre, alors $\Omega_{\mathcal{P}}(A) = \mathcal{P}(V, V)$ muni de sa structure de A-module naturelle. En effet, $\mathcal{P}(V)$ admet une dérivation dans $\mathcal{P}(V, V)$

$$\begin{array}{rccc} d : & \bigoplus_{n\geqslant 0} \mathcal{P}(n) \otimes_{\mathfrak{S}_n} V^{\otimes n} & \longrightarrow & \bigoplus_{n\geqslant 0} \mathcal{P}(n) \otimes_{\mathfrak{S}_n} \left(\bigoplus_{i=1}^{n} V^{\otimes(i-1)} \otimes dV \otimes V^{\otimes(n-i)} \right) \\ & (\mu; v_1, \dots, v_n) & \longmapsto & \sum_{i=1}^{n} (\mu; v_1, \dots, dv_i, \dots, v_n) \end{array}$$

et $\mathcal{P}(V, V)$ muni de cette dérivation vérifie la propriété universelle attendue.

— Si $\mathcal{P} = \mathcal{A}ss$, alors $\Omega_{\mathcal{P}}(A) = A_+ \otimes A$ qui est un A-bimodule avec les actions

$$a \cdot (\alpha \otimes \beta) := a\alpha \cdot \beta$$
$$(\alpha \otimes \beta) \cdot b := \alpha \otimes \beta b - \alpha\beta \otimes b.$$

La dérivation universelle $d : A \to A_+ \otimes A$ est alors le morphisme envoyant a sur $1 \otimes a$.

— Si $\mathcal{P} = \mathcal{L}ie$, alors $\Omega_{\mathcal{P}}(\mathfrak{g}) = \overline{U}\mathfrak{g}$ l'idéal d'augmentation de l'algèbre enveloppante sur lequel $U\mathfrak{g}$ agit à gauche par multiplication. La dérivation universelle $d : \mathfrak{g} \to \overline{U}\mathfrak{g}$ est alors le morphisme envoyant g sur g.

Si $\pi : B \to A$ est une $\mathcal{P}$-algèbre au-dessus de A, on a encore un morphisme naturel

$$d\pi : A \otimes^{\mathcal{P}}_B \Omega_{\mathcal{P}}(B) \to \Omega_{\mathcal{P}}(A)$$

envoyant $\mu^i(a_1, \dots, db, \dots, a_n)$ sur $\mu^i(a_1, \dots, d\pi(b), \dots, a_n)$. Si $\pi : B \to A$ est surjectif, alors $d\pi$ l'est aussi et comme précédemment, on peut décrire le noyau grâce à la suite conormale.

Théorème 2.5 (Suite conormale opéradique)**.** Soit $\pi : B \to A$ un morphisme surjectifs de $\mathcal{P}$-algèbres. Notons $I := \mathrm{Ker}(\pi)$. On a une suite exacte de A-module

$$I/I^2 \longrightarrow A \otimes_B^{\mathcal{P}} \Omega_{\mathcal{P}}(B) \longrightarrow \Omega_{\mathcal{P}}(A) \longrightarrow 0$$

où I^2 est l'idéal des combinaisons linéaires d'éléments de la forme $\mu_B(b_1, \ldots, b_n)$ avec $b_i, b_j \in I$ pour $i \neq j$. De plus, si $\pi : B \to A$ admet une section $s : A \to B$, alors cette suite est scindée.

Démonstration. Tout fonctionne de la même manière que précédemment. La seule difficulté sera de généraliser la formule « $\varepsilon(bb') = b\varepsilon(b') + b'\varepsilon(b) - \varepsilon(b)\varepsilon(b')$ ».

Structure de A-module sur I/I^2 : Comme π est surjectif, on a $A = B/I$ et l'action des éléments de I sur I/I^2 est nulle par construction.

Construction de $D : I/I^2 \to A \otimes_B^{\mathcal{P}} \Omega(B)$: On considère le morphisme

$$\begin{aligned} I &\longrightarrow A \otimes_B^{\mathcal{P}} \Omega_{\mathcal{P}}(B) \\ b &\longmapsto \mathrm{id}^1(db) \end{aligned}$$

qui est nul sur I^2 car on a pour tout $b_1, \ldots, b_n \in B$ avec $b_i, b_j \in I$ pour $i < j$:

$$\begin{aligned} \mathrm{id}^1(d(\mu_B(b_1, \ldots, b_n))) &= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{id}^1(\mu^k(b_1, \ldots, db_k, \ldots, b_n)) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \mu^k(\pi(b_1), \ldots, db_k, \ldots, \pi(b_n)) \\ &= \sum_{k<j} \mu^k(\pi(b_1), \ldots, db_k, \ldots, \cancel{\pi(b_j)}^0, \ldots, \pi(b_n)) \\ &\quad + \sum_{k \geqslant j} \mu^k(\pi(b_1), \ldots, \cancel{\pi(b_i)}^0, \ldots, db_k, \ldots, \pi(b_n)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

et les deux premières étapes de ce calcul permet de voir que le morphisme induit $D : I/I^2 \to A \otimes_B^{\mathcal{P}} \Omega_{\mathcal{P}}(B)$ est A-linéaire.

Le morphisme $d\pi$ induit un isomorphisme $\mathrm{coKer}(D) \to \Omega_{\mathcal{P}}(A)$: On a bien $d\pi \circ D = 0$ car $d\pi(\mathrm{id}^1(db)) = d\pi(b) = 0$ si $b \in I$ et donc $d\pi$ induit un morphisme $\mathrm{coKer}(D) \to \Omega_{\mathcal{P}}(A)$. Pour construire son inverse, on considère la morphisme

$$\Omega_{\mathcal{P}}(A) \longrightarrow A \otimes_B^{\mathcal{P}} \Omega_{\mathcal{P}}(B)$$

induit par la dérivation

$$\delta : \; B \xrightarrow{\;d\;} \Omega_{\mathcal{P}}(B) \longrightarrow A \otimes_B^{\mathcal{P}} \Omega_{\mathcal{P}}(B) \longrightarrow \mathrm{coKer}(D)$$

qui passe au quotient par I en une dérivation $\delta : A \to A \otimes_B^{\mathcal{P}} \Omega_{\mathcal{P}}(B)$ puisque pour tout $b \in I$, on a

$$\delta(b) = [\mathrm{id}^1(db)] = [D([b])] = 0.$$

Si π admet une section s, alors D admet une rétraction ρ : On considère la dérivation

$$\begin{aligned} \varepsilon : \; B &\longrightarrow I/I^2 \\ b &\longmapsto [b - s\pi(b)]. \end{aligned}$$

C'est une dérivation car on a

$$\varepsilon(\mu_B(b_1, \ldots, b_n)) = \sum_{\alpha \in \{0,1\}^n \setminus \{(0,\ldots,0)\}} (-1)^{|\operatorname{Supp}(\alpha)|+1} \mu_B(\varepsilon^{\alpha_1}(b_1), \ldots, \varepsilon^{\alpha_n}(b_n)) \tag{1}$$

où $\varepsilon^0 = \mathrm{id}_B$, $\varepsilon^1 = \varepsilon$ et $\mathrm{Supp}(\alpha)$ est le support de α *i.e.* l'ensemble des indices i pour lesquels $\alpha_i \neq 0$. En effet, les termes survivant modulo I^2 sont alors ceux correspondant aux suites α de support réduit à un indice ce qui correspond au fit que ε est une dérivation. Le morphisme associé $\rho : A \otimes_B^{\mathcal{P}} \Omega_{\mathcal{P}}(B)$ est alors une rétraction de D.

Pour établir (1), on rassemble les termes du membre de droite qui sont de supports de même cardinal $j \in \{1, \dots, n\}$ et on développe par multilinéarité de μ_B pour obtenir

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_j \leqslant n} \left(\sum_{l=0}^{j} (-1)^l \sum_{1 \leqslant k_1 < \dots < k_l \leqslant j} \mu_B(b_1, \dots, s\pi(b_{i_{k_1}}), \dots, s\pi(b_{i_{k_l}}), \dots, b_n) \right)$$

L'indice l correspond alors au nombre de b_i sur lesquels agissent $s\pi$ dans un terme. La somme des termes pour lesquels $l = 0$ est

$$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \binom{n}{j} \mu_B(b_1, \dots, b_n) = \mu_B(b_1, \dots, b_n).$$

La somme des termes pour lesquels l est un entier strictement positif inférieur à n fixé est

$$\begin{aligned} &\sum_{1 \leqslant i_1 < \dots < i_l \leqslant n} \sum_{j=l}^{n} (-1)^{j+1-l} \binom{n-l}{j-l} \mu_B(b_1, \dots, s\pi(b_{i_1}), \dots, s\pi(b_{i_l}), \dots, b_n) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } l < n \\ -\mu_B(s\pi(b_1), \dots, s\pi(b_n)) & \text{si } l = n. \end{cases} \end{aligned}$$

et la somme finale est donc égale à $\mu_B(b_1, \dots, b_n) - s\pi(\mu_B(b_1, \dots, b_n)) = \varepsilon(\mu_B(b_1, \dots, b_n))$. ✿

Le foncteur $\mathrm{Der}^A : (\mathrm{Alg}(\mathcal{P})_{/A})^{\mathrm{op}} \times \mathrm{Mod}_{\mathcal{P}}(A) \to \mathrm{Vect}$ est aussi représentable à droite par l'extension triviale $A \ltimes M$ où M est un A-module. C'est la $\mathcal{P}$-algèbre dont la composition est donnée par

$$\mu_{A \ltimes M}((a_1, x_1), \dots, (a_n, x_n)) = \left(\mu_A(a_1, \dots, a_n), \sum_{i=1}^{n} \mu_M^i(a_1, \dots, x_i, \dots, a_n) \right)$$

et on observe qu'une dérivation $d : B \to M$ au-dessus de A correspond à la seconde composante d'un morphisme $B \to A \ltimes M$ de $\mathcal{P}$-algèbres au-dessus de A.

L'adjonction

$$A \otimes_{-}^{\mathcal{P}} \Omega_{\mathcal{P}}(-) : \mathrm{Alg}(\mathcal{P})_{/A} \rightleftharpoons \mathrm{Mod}_{\mathcal{P}}(A) : A \ltimes -$$

est encore une adjonction de Quillen et c'est cela qui donne naissance à la cohomologie opéradique d'André-Quillen.

Motivation de la cohomologie d'André-Quillen par la suite de Jacobi-Zariski La suite conormale (opéradique) est en fait le début du calcul d'une suite exacte longue dans le cas où on se donne un morphisme surjectifs d'algèbres $\pi : B \twoheadrightarrow A$.

On est passé vite sur la fonctorialité de $\mathrm{Der}(-, M)$ mais c'est en fait cela qui motive initialement l'établissement de la cohomologie d'André-Quillen donc reprenons les choses. Comme vu à maintes reprises au long de nos démonstrations, la pré-composition d'une dérivation par un morphisme d'algèbres $\pi : B \to A$ est une dérivation et on obtient un morphisme

$$\pi^* : \mathrm{Der}(A, M) \to \mathrm{Der}(B, M^\pi)$$

Le noyau de ce morphisme correspond aux dérivation $d : A \to M$ qui s'annulent sur $\pi(B)$. Cela implique en particulier que ce sont des applications B-linéaires :

$$\begin{aligned} d(\mu_{A_\pi}^i(b_1, \dots, a, \dots, b_n)) =& d(\mu_A(\pi(b_1), \dots, a, \dots, \pi(b_n)) \\ =& \mu_M^i(\pi(b_1), \dots, da, \dots, \pi(b_n)) \\ =& \mu_{M^\pi}^i(b_1, \dots, da, \dots, b_n) \end{aligned}$$

On note alors $\mathrm{Der}_B(A, M)$ le sous-module de ces dérivations de telle sorte que l'on ait une suite exacte appelée *suite de Jacobi-Zariski* :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Der}_B(A, M) \longrightarrow \mathrm{Der}(A, M) \xrightarrow{\pi^*} \mathrm{Der}(B, M^\pi)$$

(remarquez comme le premier terme est nul si π est surjectif). Le but de la cohomologie d'André-Quillen est de compléter cette suite avec des groupes de cohomologie. En pratique, on part de la suite de Jacobi-Zariski antéduale

$$A \otimes_B^{\mathcal{P}} \Omega_{\mathcal{P}}(B) \xrightarrow{d\pi} \Omega_{\mathcal{P}}(A) \longrightarrow \Omega(A/B) \longrightarrow 0$$

où $\Omega_{\mathcal{P}}(A/B)$ est le quotient de $\Omega_{\mathcal{P}}(A)$ par les relations de la forme $d\pi(b) = 0$ que l'on complète à gauche grâce à une résolution de la forme $A \otimes_{B_\bullet}^{\mathcal{P}} \Omega_{\mathcal{P}}(B_\bullet)$ où $B_\bullet$ est une résolution de A (c'est ici qu'on a besoin de catégories de modèles), puis on applique le foncteur $\mathrm{Hom}_A(-, M)$ et on prends la cohomologie du résultat pour obtenir la suite exacte longue

$$0 \longrightarrow \mathrm{Der}_B(A, M) \longrightarrow \mathrm{Der}(A, M) \xrightarrow{\pi^*} \mathrm{Der}(B, M^\pi) \longrightarrow H^1(A/B, M) \longrightarrow H^1(A, M) \longrightarrow H^1(B, M) \longrightarrow \cdots$$

Bibliographie

[And74] Michel André. *Homologie des algebres commutatives.* T. 206. Springer, 1974.

[Bec67] Jonathan Mock Beck. « Triples, algebras and cohomology ». Thèse de doct. Columbia University, 1967. URL : http://www.tac.mta.ca/tac/reprints/articles/2/tr2.pdf.

[Eis95] David Eisenbud. *Commutative algebra : with a view toward algebraic geometry.* T. 150. Springer Science & Business Media, 1995.

[Fre09] Benoit Fresse. *Modules over operads and functors.* T. 1967. Springer Science & Business Media, 2009.

[LV12] Jean-Louis Loday et Bruno Vallette. *Algebraic operads.* T. 346. Springer Science & Business Media, 2012.

[Mil11] Joan Millès. « André–Quillen cohomology of algebras over an operad ». In : *Advances in Mathematics* 226.6 (2011), p. 5120-5164. ISSN : 0001-8708. URL : https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0001870811000065.

[Qui70] Daniel Quillen. « On the (co-) homology of commutative rings ». In : *Proc. Symp. Pure Math.* T. 17. 2. 1970, p. 65-87.