Groupe de travail : Lecture de l'article de Joan Millès
« André-Quillen cohomology of algebras over an operad »
Exposé n°7 : Dualité de Koszul des opérades binaires quadratiques

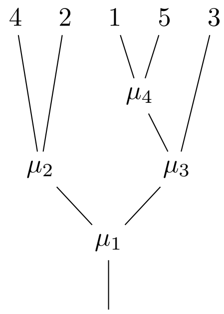
Jules Givelet

4 décembre 2025

La notion d'opérde généralise celle d'algèbre dans le sens qu'une algèbre associative unitaire est une opérade concentrée en arité 1. La théorie de la dualité de Koszul s'étend alors à ce cadre.

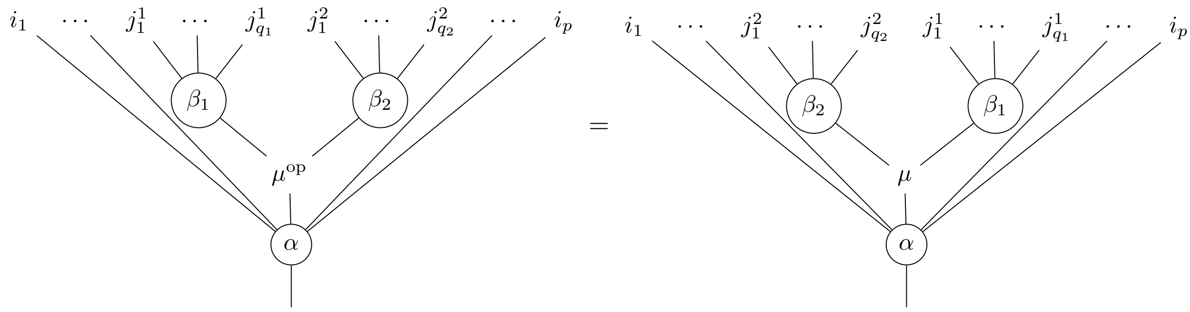
1 Présentation d'une opérade par générateurs et relations

On considère un $\mathfrak{S}_2$-module de type fini E. Ce module engendre une opérade notée $\mathcal{T}(E)$ appelée *opérade libre* engendrée par E. Elle est donnée explicitement en arité n par les combinaisons linéaires d'arbres planaires binaires enracinés dont les nœuds sont étiquetés par des éléments de E et dont les feuilles sont étiquetés par des entiers de 1 à n :

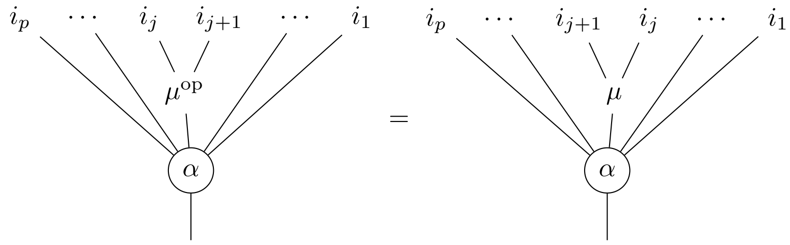


$\in \mathcal{T}(E)(5)$

On assujetti cet espace d'arbres aux relations suivantes : en notant $\mu^{\mathrm{op}} := \mu \cdot (1\,2) \in E$, on a

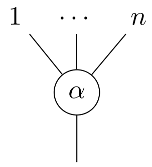


et



pour tout $\alpha \in \mathcal{T}(E)(p)$ et $\beta_i \in \mathcal{T}(E)(q_i)$. L'action de $\mathfrak{S}_n$ sur $\mathcal{T}(E)(n)$ est donnée par la permutation des étiquettes des feuilles et la composition par greffe d'arbres.

Notations. Seuls les étiquetages de feuilles qui ne sont pas de la forme



seront explicités par la suite.

Cette opérade est graduée par le poids ω qui est le nombre d'opérations binaires utilisées pour écrire un élément. On note $\mathcal{T}(E)^{(\omega)}$ l'espace des éléments de poids ω. Comme E est concentré en arité 2, on a $\omega = n-1$, où n est l'arité, si bien que $\mathcal{T}(E)^{(\omega)} = \mathcal{T}(E)(\omega+1)$. On dit qu'un élément de l'opérade libre est *quadratique* s'il est de poids 2 (et donc d'arité 3 dans notre cas).

Soit R un sous-espace vectoriel de $\mathcal{T}(E)^{(2)}$.

Définition 1.1. L'opérade *engendrée* par E et sujette aux relations R est l'unique opérade $\mathcal{P}(E,R)$ vérifiant la propriété universelle suivante

$$\begin{tikzcd}
R \arrow[r, hook] \arrow[rr, bend left, "0"] \arrow[rrd, bend right, "0"'] & \mathcal{T}(E) \arrow[r, two heads] \arrow[rd, "\forall"'] & \mathcal{P}(E,R) \arrow[d, "\exists!"] \\
 & & \mathcal{P}
\end{tikzcd}$$

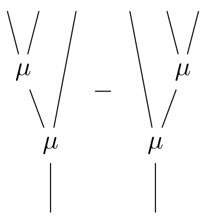
Comme E est engendrée par des opérations binaires, on dit que $\mathcal{P}(E,R)$ est *binaire* et comme R est engendré par des éléments quadratiques de $\mathcal{T}(E)$, on dit que $\mathcal{P}(E,R)$ est *quadratique.*

Remarque 1.2. Cette définition se généralise aux cas non binaires. C'est cette généralisation qui englobe le cas des algèbres associatives unitaires puisqu'une algèbre quadratique est une opérade quadratique non binaire.

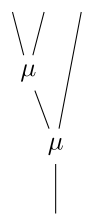
Explicitement, l'opérade $\mathcal{P}(E,R)$ est l'opérade quotient $\mathcal{T}(E)/(R)$ où (R) est l'idéal opéradique (sous $\mathfrak{S}$-module stable par pré ou post composition partielle) engendré par R.

Exemples 1.3. On note 1_G la représentation triviale d'un groupe G, $\mathbb{K}[G]$ sa représentation régulière et sgn_n la représentation signature de $\mathfrak{S}_n$.

- On a $\mathcal{P}(E,0) = \mathcal{T}(E)$ et $\mathcal{T}(E, \mathcal{T}(E)^{(2)}) =: \mathcal{D}(E)$ où $\mathcal{D}(E) = (0, \mathbb{K}, E, 0, \cdots)$ est telle que la composition d'au moins deux éléments de E est nulle.
- On a $\mathcal{P}(\mathbb{K}[\mathfrak{S}_2] : A(\mu)) = \mathcal{A}ss$ où $\mu = \mathrm{id}_2 \in \mathbb{K}[\mathfrak{S}_2]$ et $A(\mu)$ est l'associateur de μ :

$A(\mu) =$ 

- On a $\mathcal{P}(1_{\mathfrak{S}_2} : A(\mu)) = \mathcal{C}om$ où $\mu = 1 \in 1_{\mathfrak{S}_2}$.
- On a $\mathcal{P}(\mathrm{sgn}_2 : J(\mu)) = \mathcal{L}ie$ où $\mu = 1 \in \mathrm{sgn}_2$ et $J(\mu)$ est le jacobiateur de μ :

$J(\mu) =$  $\cdot\, (\mathrm{id}_3 + (1\,2\,3) + (1\,3\,2))$

2 Présentation duale d'une opérade quadratique binaire

Pour dualiser la *donnée quadratique binaire* (E, R), on commence par dualiser E en posant

$$E^\vee := E^* \otimes \mathrm{sgn}_2\,.$$

Explicitement, on a $\phi^{\mathrm{op}}(\mu) = -\phi(\mu^{\mathrm{op}})$ pour tout $\phi \in E^*$ et pour tout $\mu \in E$. Pour dualiser R, on veut considérer « l'orthogonal de R dans $\mathcal{T}(E^\vee)(3)$ » et il faut alors un isomorphisme $\mathcal{T}(E)(3)^* \simeq \mathcal{T}(E^\vee)(3)$ pour cela.

Explicitons $\mathcal{T}(E)(3)$. On a

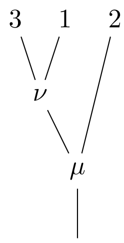
$$\mathcal{T}(E)(3) = (E\otimes E)_0 \oplus (E\otimes E)_1 \oplus (E\otimes E)_2$$

où $(E\otimes E)_0$ correspond aux éléments de la forme

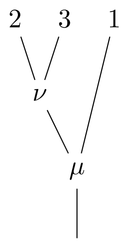
$$= \mu \circ_1 \nu.$$

et $(E\otimes E)_i = (E\otimes E)_0 \cdot (1\,2\,3)^i$. Explicitement, en notant $c := (1\,2\,3)$, on a

$$(\mu \circ_1 \nu)\cdot c =$$



$$\in (E\otimes E)_1, \quad (\mu \circ_1 \nu)\cdot c^2 =$$



$$\in (E\otimes E)_2.$$

Maintenant, considérons la forme bilinéaire non dégénérée à gauche

$$\langle -,- \rangle : \mathcal{T}(E^\vee)(3) \otimes \mathcal{T}(E)(3) \to \mathbb{K}$$

telle que

$$\langle (\phi \circ_1 \psi)\cdot c^i, (\mu \circ_1 \nu)\cdot c^j \rangle = \begin{cases} \phi(\mu)\psi(\nu) & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On obtient alors un morphisme injectif $\mathcal{T}(E^\vee)(3) \hookrightarrow \mathcal{T}(E)(3)^*$ qui est un isomorphisme car E est de dimension finie (si $\dim E = n$, alors ces espaces sont de dimensions $3n^2$).

Exercice 2.1. *Vérifier que pour tout $\Phi \in \mathcal{T}(E^\vee)(3)$, $\omega \in \mathcal{T}(E)(3)$ et $\sigma \in \mathfrak{S}_3$ on a*

$$\langle \Phi\cdot\sigma, \omega\cdot\sigma \rangle = (-1)^{\varepsilon(\sigma)} \langle \Phi, \omega \rangle$$

et conclure que l'isomorphisme précédent induit l'isomorphisme de $\mathfrak{S}_3$-modules

$$\mathcal{T}(E^\vee)(3) \simeq \mathcal{T}(E)(3)^\vee$$

où $M^\vee = M^* \otimes \mathrm{sgn}_3$ pour tout $\mathfrak{S}_3$-module M.

Définition 2.2. *L'opérade duale de Koszul* d'une opérade binaire quadratique $\mathcal{P} = \mathcal{P}(E, R)$ est l'opérade quadratique binaire

$$\mathcal{P}^! := \mathcal{P}(E^\vee, R^\perp)$$

où $R^\perp$ est l'orthogonal de R pour la forme bilinéaire précédente.

Exemples 2.3.

- On a $\mathcal{T}(E)^! = \mathcal{D}(E)$ et réciproquement par bidualité (on a $\mathrm{sgn}_2 \otimes \mathrm{sgn}_2 = 1_{\mathfrak{S}_2}$).
- Pour l'opérade $\mathcal{C}om$, on a $E = 1_{\mathfrak{S}_2} = \mathbb{K}\{\mu\}$, donc, en notant $u_i := (\mu \circ_1 \mu) \cdot c^i$, on a $\mathcal{T}(E)(3) = \mathbb{K}\{u_0, u_1, u_2\}$ et $R = \mathbb{K}\{u_0 - u_2, u_2 - u_1\}$. L'othogonal de R est alors un sous-espace de $\mathcal{T}(E^\vee)(3)$ de dimension $3 - 2 = 1$.

  On a donc $E^\vee = \mathrm{sgn}_2 = \mathbb{K}\{\nu\}$ où $\nu = \mu^*$ et, en notant $v_i := (\nu \circ_1 \nu) \cdot c^i$, on a $R^\perp = \mathbb{K}\{v_0 + v_1 + v_2\}$:

$$\langle v_0 + v_1 + v_2, u_0 - u_2 \rangle = \langle v_0, u_0 \rangle - \langle v_2, u_2 \rangle = 1 - 1 = 0,$$
$$\langle v_0 + v_1 + v_2, u_2 - u_1 \rangle = \langle v_2, u_2 \rangle - \langle v_1, u_1 \rangle = 1 - 1 = 0.$$

  Finalement, on a $\mathcal{C}om^! \simeq \mathcal{L}ie$ car $v_0 + v_1 + v_2 = J(\nu)$.
- On a $\mathcal{L}ie^! \simeq \mathcal{C}om$ par bidualité.
- Pour l'opérade $\mathcal{A}ss$, on a $E = \mathbb{K}[\mathfrak{S}_2] = \mathbb{K}\{\mu, \mu^{\mathrm{op}}\}$. L'espace $\mathcal{T}(E)(3)$ est alors de dimension 12 et on peut étiqueter sa base intelligemment en utilisant le *permutoassociagone* de Kapranov :

$$\begin{tikzcd}
& & u_{11} \arrow[r] & u_0 \arrow[dr] & & \\
& u_{10} \arrow[ur] & & & u_1 \arrow[dr] & \\
u_9 \arrow[ur] & & & & & u_2 \arrow[d] \\
u_8 \arrow[u] & & & & & u_3 \arrow[dl] \\
& u_7 \arrow[ul] & & & u_4 \arrow[dl] & \\
& & u_6 \arrow[ul] & u_5 \arrow[l] & &
\end{tikzcd}$$

  où $u_0 = \mu \circ_i \mu$ correspond à l'expression $(xy)z$ et où une flèche $u_i \to u_{i+1}$ correspond correspond à l'associativité si i est pair et l'application de la transposition sur la seconde opération si i est impair. Par exemple, $u_1 = (\mu^{\mathrm{op}} \circ_1 \mu) \cdot c^2$ correspond à l'expression $x(yz)$ et $u_2 = (\mu^{\mathrm{op}} \circ_1 \mu^{\mathrm{op}}) \cdot c^2$ correspond à l'expression $x(zy)$. De manière générale, on a

$$\begin{aligned}
u_{4i} &= (\mu \circ_1 \mu) \cdot c^i \\
u_{4i+1} &= (\mu^{\mathrm{op}} \circ_1 \mu) \cdot c^{i-1} \\
u_{4i+2} &= (\mu^{\mathrm{op}} \circ_1 \mu^{\mathrm{op}}) \cdot c^{i-1} \\
u_{4i+3} &= (\mu \circ_1 \mu^{\mathrm{op}}) \cdot c^{i+1}.
\end{aligned}$$

  On a alors $R = \mathbb{K}\{u_i - u_{i+1} : i = 0, 2, 4, 6, 8, 10\}$. L'orthogonal de R est donc un sous-espace vectoriel de $\mathcal{T}(E^\vee)(3)$ de dimension $12 - 6 = 6$.

  On a donc $E^\vee = \mathbb{K}\{\mu^*, \mu^{\mathrm{op}\,*}\} = \mathbb{K}\{\nu, -\nu^{\mathrm{op}}\}$. Si $u_i = (\mu_1 \circ_1 \mu_2) \cdot c^j$ avec $\mu_1, \mu_2 \in \{\mu, \mu^{\mathrm{op}}\}$, on note $v_i := (\mu_1^* \circ_1 \mu_2^*) \cdot c^j$ de telle sorte que les nœuds du permutoassociagone associé à ν soit alternativement v_{2i} et $-v_{2i+1}$. On a alors $R^\perp = \mathbb{K}\{v_i + v_{i+1} : i = 0, 2, 4, 6, 8, 10\}$:

$$\langle v_i + v_{i+1}, u_i - u_{i+1} \rangle = \langle v_i, u_i \rangle - \langle v_{i+1}, u_{i+1} \rangle = 0.$$

  Et finalement, on a
$$(A(\nu)) = \mathbb{K}\{v_i + v_{i+1} : i = 0, 2, 4, 6, 8, 10\} = R^\perp$$
  si bien que $\mathcal{A}ss^! = \mathcal{A}ss$.

Les $\mathcal{P}^!$-algèbres de dimension finie peuvent s'interpréter comme les $\mathcal{P}$-groupes formels de dimension finie, notion formalisée dans le langage opéradique par Ginzburg et Kapranov dans [GK94] et introduite originellement par Lazard dans [Laz55].

3 Koszulité d'une opérade quadratique binaire

Comme pour les algèbres quadratiques, on peut définir la notion de *coopérade* et de coopérade *coprésentée par cogénérateurs et corelations* et il existe une coopérade duale $\mathcal{P}^{¡}$ telle que $\mathcal{P}^!$ soit le dual linéaire de $\mathcal{P}^{¡}$ modulo des opérations de suspension et désuspensions (ce sont celles-ci qui font apparaître le produit tensoriel par sgn_2 dans $E^\vee$). La coopérade $\mathcal{P}^{¡}$ est alors une sous-coopérade de la construction bar opéradique que l'on se propose d'expliciter.

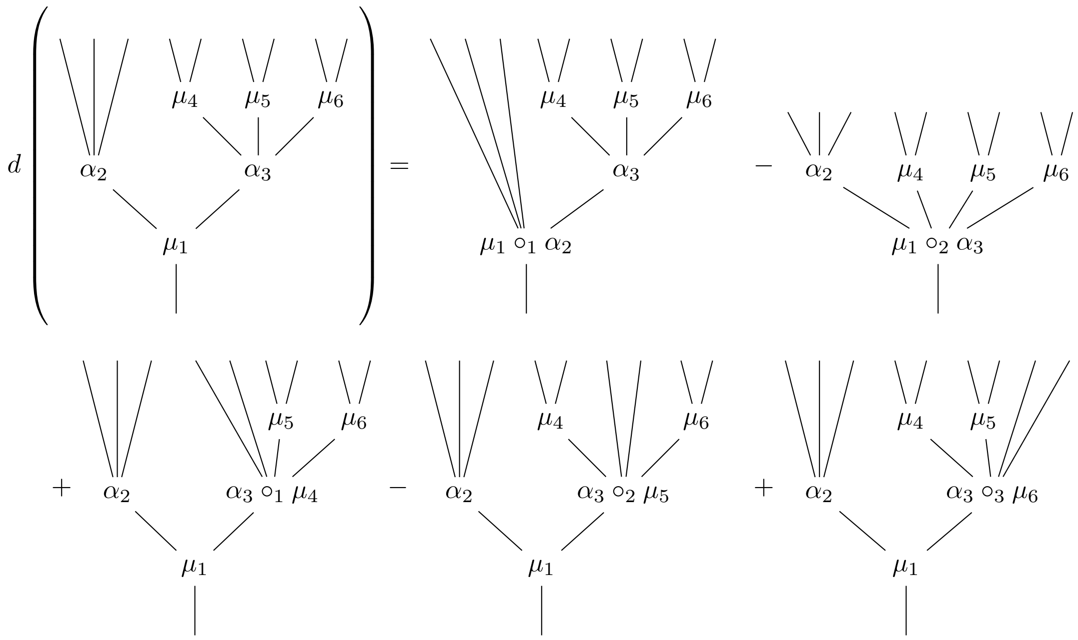
Définition 3.1. Soit $\mathcal{P}$ une opérade quadratique binaire. En particulier, on a $\mathcal{P} = \overline{\mathcal{P}} \oplus I$ où $I = (0, \mathbb{K}, 0, \cdots)$ et $\overline{\mathcal{P}} = (0, 0, \mathcal{P}(2), \mathcal{P}(3), \dots)$. La *construction bar* de $\mathcal{P}$, notée $B\mathcal{P}$ est le $\mathfrak{S}$-module sous-jacent à $\mathcal{T}(\overline{\mathcal{P}})$ que l'on gradue homologiquement par le poids :

$$B_n\mathcal{P} = \mathcal{T}(\overline{\mathcal{P}})^{(n)}$$

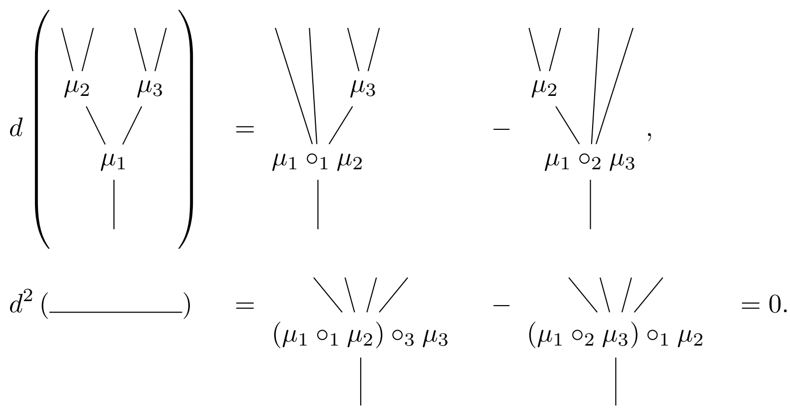
et dont la différentielle $d : B_n\mathcal{P} \to B_{n-1}\mathcal{P}$ est donnée par par la somme alternée des compositions partielles de $\mathcal{P}$ appliquées à toutes les branches d'un arbre donné.

Cette construction bar est en fait la coopérade conilpotente colibre associée à la suspension de $\overline{\mathcal{P}}$ et dont la différentielle est alors naturellement induite par le morphisme de composition $\overline{\mathcal{P}} \circ \overline{\mathcal{P}} \to \overline{\mathcal{P}}$. L'associativité de la composition de $\mathcal{P}$ assure alors le fait que $d^2 = 0$.

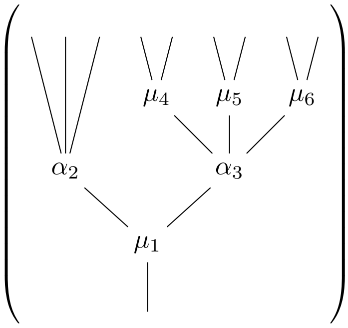
Exemples 3.2. On a



et d^2 fait alors intervenir 20 termes qui s'annulent les uns les autres. Pour un exemple plus minimal où l'on observe le fait que $d^2 = 0$, on a



La construction bar $B\mathcal{P}$ est alors graduée par le poids total, induit par le poids ω dans $\mathcal{P}$:

ω 

$$= \omega(\mu_1) + \omega(\alpha_2) + \omega(\alpha_3) + \omega(\mu_4) + \omega(\mu_5) + \omega(\mu_6)$$

$$= 1 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1 = 8.$$

Comme la différentielle préserve le poids, on a une graduation du complexe de chaîne

$$B\mathcal{P} = \bigoplus_{\omega \geqslant 0} (B_\bullet \mathcal{P})^{(\omega)}$$

que l'on peut expliciter :

$$\begin{array}{lllll}
n: & 0 & 1 & 2 & 3 \\
(B_n\mathcal{P})^{(0)} : & \mathbb{K} & & & \\
(B_n\mathcal{P})^{(1)} : & 0 \longleftarrow & E & & \\
(B_n\mathcal{P})^{(2)} : & 0 \longleftarrow & \dfrac{\mathcal{T}(E)^{(2)}}{R} \longleftarrow & \mathcal{T}(E)^{(2)} & \\
(B_n\mathcal{P})^{(3)} : & 0 \longleftarrow & \dfrac{\mathcal{T}(E)^{(3)}}{R \circ_\varepsilon E + E \circ_\varepsilon R} \longleftarrow & \left(\dfrac{\mathcal{T}(E)^{(2)}}{R} \circ_\varepsilon E\right) \oplus \left(E \circ_\varepsilon \dfrac{\mathcal{T}(E)^{(2)}}{R}\right) \longleftarrow & \mathcal{T}(E)^{(3)}
\end{array}$$

où $M \circ_\varepsilon N := M(\mathbb{K}; N)$ est le module des compositions partielles de M et N.

On peut alors définir, comme le fait Joan Millès dans [Mil11], la coalgèbre duale de Koszul $\mathcal{P}^{¡}$ comme l'homologie diagonale de ce complexe bigradué.

Définition 3.3. Une opérade quadratique binaire $\mathcal{P}$ est *koszul* lorsque l'injection canonique $\mathcal{P}^{¡} \hookrightarrow B\mathcal{P}$ est un quasi-isomorphisme *i.e.* l'homologie de $B\mathcal{P}$ est concentrée sur sa diagonale.

Comme pour les algèbre quadratiques, il existe une construction cobar Ω pour les coopérades différentielles graduées augmentées comme $B\mathcal{P}$ ou $\mathcal{P}^{¡}$ (dont la différentielle correspond à celle induite par la coopérade de base tordue par la déconcaténation réduite) et on a la *résolution bar-cobar opéradique*

$$\Omega B\mathcal{P} \to \mathcal{P}$$

qui est un quasi-isomorphisme et donc une résolution cofibrante. Le fait que $\mathcal{P}$ soit koszul implique alors (non trivialement) qu'on ait une plus petite résolution cofibrante

$$\Omega\mathcal{P}^{¡} \to \mathcal{P}.$$

On note $\mathcal{P}_\infty := \Omega\mathcal{P}^{¡}$ car les $\mathcal{P}_\infty$-algèbres correspondent aux $\mathcal{P}$-algèbres à homotopie près.

De manière générale (*cf.* [GJ94] partie 2), si l'on a un morphisme tordant $\Phi : \mathcal{C} \to \mathcal{P}$ (qui sont les Maurer-Cartan de $\mathrm{Hom}(\mathcal{C}, \mathcal{P})$ que l'on munit d'une structure d'algèbre pré-Lie grâce à un produit de convolution), on a une adjonction

$$\Omega_\Phi : \mathrm{coAlg}(\mathcal{C}) \rightleftharpoons \mathrm{Alg}(\mathcal{P}) : B_\Phi$$

représentant le module des Φ-cochaîne tordante d'une $\mathcal{C}$-coalgèbre C vers une $\mathcal{P}$-algèbre A. L'unité de cette adjonction est alors un quasi-isomorphisme pour $\mathcal{C} = B\mathcal{P}$ et $\mathcal{C} = \mathcal{P}^{\text{i}}$ lorsque $\mathcal{P}$ est koszul :

$$\Omega_\pi(B_\pi(A)) = \mathcal{P} \circ_\pi B\mathcal{P} \circ A \to A$$
$$\Omega_\kappa(B_\kappa(A)) = \mathcal{P} \circ_\kappa \mathcal{P}^{\text{i}} \circ A \to A.$$

où $\pi : B\mathcal{P} \twoheadrightarrow B_1\mathcal{P} = \overline{\mathcal{P}} \hookrightarrow \mathcal{P}$ et $\kappa = \pi|_{\mathcal{P}^{\text{i}}}$. Ce sont les résolution cofibrantes que l'on utilisera pour décrire le complexe cotangent et la cohomologie d'André-Quillen des $\mathcal{P}$-algèbres.

Exemple 3.4. La résolution bar-cobar d'une algèbre associative unitaire graduée A correspond à la résolution $(\mathcal{A}ss \circ_\kappa \mathcal{A}ss^{\text{i}} \circ \overline{A})_+ \to A$ obtenue en augmentant la résolution $\mathcal{A}ss \circ_\kappa \mathcal{A}ss^{\text{i}} \circ \overline{A} \to \overline{A}$. Pour retrouver la résolution de Koszul de A, il faut une théorie de la dualité de Koszul des $\mathcal{P}$-algèbres, ce que formalise Joan Millès dans [Mil12].

Pour établir le koszulité d'une opérade, on peut étudier le complexe de Koszul $\mathcal{P}^{\text{i}} \circ_\kappa \mathcal{P}$ et montrer qu'il est acyclique en explicitant une homotopie.

On peut aussi utiliser des méthodes de réécriture dont la combinatoire nécessite d'écrire systématiquement les éléments de l'opérade libre sous la forme d'*arbres de mélanges i.e.* on range toutes les entrées de tous les nœuds de l'arbre « dans l'ordre croissant autant que possible ». Ces arbres de mélanges amènent à la notion d'*opérade de mélange* qui est un compromis entre les opérades symétriques et les opérades non-symétriques permettant de raisonner sans problème sur le degré et sans perdre d'information sur les opérades symétriques étudiées.

Bibliographie

[GJ94] Ezra Getzler et John DS Jones. « Operads, homotopy algebra and iterated integrals for double loop spaces ». In : (1994). url : https://arxiv.org/abs/hep-th/9403055.

[GK94] Victor Ginzburg et Mikhail Kapranov. « Koszul duality for operads ». In : (1994). url : https://arxiv.org/abs/0709.1228.

[Laz55] Michel Lazard. « Lois de groupes et analyseurs ». In : *Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure*. T. 72. 4. 1955, p. 299-400.

[LV12] Jean-Louis Loday et Bruno Vallette. *Algebraic operads*. T. 346. Springer Science & Business Media, 2012.

[Mil11] Joan Millès. « André–Quillen cohomology of algebras over an operad ». In : *Advances in Mathematics* 226.6 (2011), p. 5120-5164. issn : 0001-8708. url : https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0001870811000065.

[Mil12] Joan Millès. « The Koszul complex is the cotangent complex ». In : *International Mathematics Research Notices* 2012.3 (2012), p. 607-650.