

Théorème d’Hinich sur le transfert de structures de modèles

(Friedrich Wagemann, exposé de GDT du 22 janvier 2026)

1 Énoncé du théorème

Le but de cet exposé est d’expliquer la démonstration du Théorème d’Hinich [2], Theorem 2.2.1, sur le transfert d’une structure de catégorie de modèles le long d’une adjonction. Il s’agit plus particulièrement de transférer la structure de catégorie de modèles de la catégorie des complexes (non-bornés) $C(k)$ de k -modules (pour un anneau commutatif k) par une adjonction oubli-libre sur une catégorie $\mathcal{C}$ qui admet un foncteur oubli vers les complexes. Soit donc

$$\sharp : \mathcal{C} \xrightleftharpoons{\quad} C(k) : F$$

une adjonction, où $\sharp$ est le foncteur oubli et F est l’adjoint à gauche. On exige que la catégorie $\mathcal{C}$ satisfasse les deux conditions suivantes:

(H0) $\mathcal{C}$ admet des limites finies et des colimites arbitraires; le foncteur $\sharp$ commute aux colimites filtrées.

(H1) Soit $d \in \mathbb{Z}$, $A \in \mathcal{C}$ et $M \in C(k)$ le complexe

$$\dots \rightarrow k \xrightarrow{=} k \rightarrow 0 \dots,$$

concentré en degrés $d, d+1$. Le morphisme canonique $A \rightarrow A \coprod F(M)$ induit un quasi-isomorphisme $A^\sharp \rightarrow (A \coprod F(M))^\sharp$.

On définit trois classes de morphismes dans $\mathcal{C}$:

1. $f \in \text{Mor}(\mathcal{C})$ appartient à $\mathfrak{W}$ si $f^\sharp$ est un quasi-isomorphisme.
2. $f \in \text{Mor}(\mathcal{C})$ appartient à $\mathfrak{F}$ si $f^\sharp$ est surjective (degré par degré).
3. $f \in \text{Mor}(\mathcal{C})$ appartient à $\mathfrak{C}$ si $f^\sharp$ satisfait la LLP¹ par rapport aux fibrations acycliques.

Theorem 1.1 (Théorème d’Hinich) *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie munie d’une adjonction*

$$\sharp : \mathcal{C} \xrightleftharpoons{\quad} C(k) : F$$

telle que les conditions (H0) et (H1) soient satisfaites. Alors les classes de morphismes $\mathfrak{W}$, $\mathfrak{F}$ et $\mathfrak{C}$ munissent $\mathcal{C}$ d’une structure de catégorie de modèles.

Une situation concrète où le théorème s’applique est $\mathcal{C} = \mathcal{O}\text{-alg}$, la catégorie de algèbres différentielles graduées sur une opérade $\mathcal{O}$ qui est Σ -split. Cette dernière condition est satisfaite, par exemple, quand k est de caractéristique nulle. Dans ce cadre, le foncteur F associe à un complexe M la $\mathcal{O}$ -algèbre libre $F(M)$ sur M .

¹LLP=left lifting property

2 Construction de $A(M, \alpha)$

Soit $A \in \mathcal{C}$ un objet de $\mathcal{C}$, et $M \in C(k)$ un complexe de k -modules. On se donne également un morphisme $\alpha : M \rightarrow A^\sharp \in \text{Mor}(C(k))$. On définit alors le foncteur

$$h_{A,\alpha} : \mathcal{C} \rightarrow \text{Ens}$$

par

$$h_{A,\alpha}(B) := \{(f, t) \mid f : A \rightarrow B \in \text{Mor}(\mathcal{C}), t \in \text{Hom}^{-1}(M, B^\sharp) : d(t) = f^\sharp \circ \alpha\}.$$

Ici, Hom^l désigne les morphismes de k -modules gradués de degré l . La différentielle $d(t)$ est celle des morphismes de k -modules gradués, i.e. la différence entre la précomposition par la différentielle de M et la postcomposition par $B^\sharp$. Toutes les différentielles sont cohomologiques ici, i.e. de degré $+1$.

Le foncteur $h_{A,\alpha}$ est représentable, i.e. il existe un objet $A(M, \alpha)$ dans $\mathcal{C}$ tel que qu'on ait une bijection fonctorielle pour tout $B \in \mathcal{C}$

$$h_{A,\alpha}(B) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(A(M, \alpha), B).$$

Pour construire $A(M, \alpha)$, on construit d'abord le cône $C(\alpha)$ du morphisme de complexes $\alpha : M \rightarrow A^\sharp$. Le cône $C(\alpha)$ a en degré n l'espace $M_{n+1} \oplus A_n^\sharp$ avec différentielle

$$d(m, a) = (-dm, \alpha(m) + da).$$

Le cône vient avec un morphisme de complexes $A^\sharp \rightarrow C(\alpha)$ (et un morphisme $C(\alpha) \rightarrow M[1]$). On construit alors la colimite/le pushout:

$$\begin{array}{ccc} F(A^\sharp) & \longrightarrow & F(C(\alpha)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & A(M, \alpha) \end{array}$$

Lemma 2.1 *L'objet $A(M, \alpha)$ représente le foncteur $h_{A,\alpha}$.*

démo: Étant donné $(f, t) \in h_{A,\alpha}(B)$, on construit un morphisme $A(M, \alpha) \rightarrow B$ par la propriété universelle du pushout. Pour cela, on a d'une part le morphisme $f : A \rightarrow B$, mais de l'autre part, il nous faudrait un morphisme $F(C(\alpha)) \rightarrow B$. Ce dernier revient par adjonction à un morphisme $C(\alpha) \rightarrow B^\sharp$. Celui-là est construit à l'aide de t :

$$M[1] \oplus A^\sharp \rightarrow B^\sharp, \quad (m, a) \rightarrow (-1)^{\deg(m)} t(m) + f(a),$$

pour m homogène. Ceci est bien compatible avec les différentielles (supposons m de degré pair):

$$t(dm) + f(\alpha(m)) + f(da) = dt(m) + df(a) = d(t(m) + f(a)),$$

puisque $t(dm) = -f(\alpha(m)) + dt(m)$ et $f(da) = df(a)$.

Réciproquement, étant donné un morphisme $A(M, \alpha) \rightarrow B$, il faut construire le couple (f, t) . f est construite comme composée avec $A \rightarrow A(M, \alpha)$. t est construit comme avant par le morphisme $C(\alpha) \rightarrow B^\sharp$. $\square$

Remark 2.2 *On voit dans la démo qu'il y a bijection entre morphismes $C(\alpha) \rightarrow B^\sharp$ dont la composante sur $A^\sharp$ est f et applications t (qui vérifient la propriété $(f, t) \in h_{A, \alpha}$).*

Quand $M = k[n]$ est le complexe concentré en degré n et $\alpha : M \rightarrow A^\sharp$ envoie le générateur de M sur un cycle $a \in A$, alors l'objet $A(M, \alpha)$ s'interprète comme " A où on a rajouté une variable afin de tuer le cycle a ". Dans ce cas, on écrira $A(T; dT = a)$ au lieu de $A(M, \alpha)$.

3 Cofibrations standard et cofibrations acycliques standard

Soit M un complexe de k -modules libres et différentielles nulles. Pour tout $A \in \mathcal{C}$ et tout morphisme $\alpha : M \rightarrow A^\sharp$, le morphisme $A \rightarrow A(M, \alpha)$ est une cofibration.

démo: D'abord $F(A^\sharp) \rightarrow F(C(\alpha))$ est une cofibration. En effet, pour montrer que ce morphisme a la LLP pour une fibration acyclique $f : X \rightarrow Y$ quelconque, on montre par adjonction, qu'il existe la flèche diagonale

$$\begin{array}{ccc} A^\sharp & \longrightarrow & X^\sharp \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ C(\alpha) & \longrightarrow & Y^\sharp \end{array}$$

Ici $f^\sharp : X^\sharp \rightarrow Y^\sharp$ est une fibration acyclique dans les complexes (par définition de $\mathfrak{F}$). Il reste donc à montrer que $A^\sharp \rightarrow C(\alpha)$ est une cofibration dans les complexes. Pour cela, on regarde la colimite/le pushout de

$$A^\sharp \longleftarrow M \oplus M \rightarrow \text{Cyl}(M),$$

où la première flèche est $(m, m') \mapsto \alpha(m)$ et $\text{Cyl}(M)$ est le cylindre de M (i.e. le mapping cylinder de l'identité de M). On va montrer que $M \oplus M \rightarrow \text{Cyl}(M)$ est une cofibration. Par ailleurs, les cofibrations sont stables par pushout, donc le pushout

$$\begin{array}{ccc} M \oplus M & \longrightarrow & A^\sharp \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Cyl}(M) & \longrightarrow & C(\alpha) \end{array}$$

montre que $A^\sharp \rightarrow C(\alpha)$ est aussi une cofibration. Il reste donc à montrer que $M \oplus M \rightarrow \text{Cyl}(M)$ est une cofibration. Pour cela, on se souvient que M consiste de k -modules libres avec différentielle nulle.

Le cylindre a $\text{Cyl}(M)_n = M_n \oplus M_{n+1} \oplus M_n$ avec une différentielle donnée dans [4]. Le Lemma 1.5.6 p. 21 de [4] nous dit que le sous-complexe des éléments de la forme $(m, 0, 0)$ est isomorphe à M et l'inclusion est un quasi-isomorphisme. Le conoyau de cette inclusion est le cone $C(-\text{id})$. On sait par la Proposition 3.3.1 de l'exposé de Hermann que les cofibrations dans les complexes sont les morphismes qui sont injectifs en chaque degré avec conoyau cofibrant.

Il reste donc à montrer que le cone $C(-\text{id})$ est cofibrant. Pour cela, on peut (quitte à faire à la fin un argument de passage à la limite) supposer que $M = k[n]$. Donc $C(-\text{id})$ est un complexe borné. Par le Lemma 3.3.1 de l'exposé de Hermann, un complexe borné en bas de k -modules projectifs est cofibrant. C'est le cas ici, puisque les k -modules sont libres.

On a donc montré que $F(A^\sharp) \rightarrow F(C(\alpha))$ est une cofibration. Or, le morphisme $A \rightarrow A(M\alpha)$ s'obtient de celui-ci par pushout et les morphismes possédant la LLP sont stables par pushout (voir Lemma 2.1.10, p. 31, dans [3]), donc $A \rightarrow A(M\alpha)$ est aussi une cofibration. $\square$

Definition 3.1 *Un morphisme $A \rightarrow B$ dans $\mathcal{C}$ est une cofibration standard s'il est limite d'une suite*

$$A = A_0 \rightarrow A_1 \rightarrow \dots \rightarrow B$$

où tout morphisme $A_i \rightarrow A_{i+1}$ est de la forme $A \rightarrow A(M, \alpha)$ pour un M consistant de k -modules libres avec différentielles nulles.

Soit maintenant M un complexe contractile consistant de k -modules libres. Alors $A \rightarrow A(M, \alpha)$ est une cofibration acyclique.

démo: On remarque que le raisonnement de la démo précédente s'applique pour montrer que dans ce cas encore, c'est une cofibration. Il reste à montrer que c'est une équivalence faible. Ceci doit se déduire du fait que $A^\sharp \rightarrow C(\alpha)$ est un quasi-isomorphisme (se déduit de la suite exacte longue du cône). $\square$

Definition 3.2 *Un morphisme $f : A \rightarrow B$ est une cofibration acyclique standard s'il est limite d'une suite*

$$A = A_0 \rightarrow A_1 \rightarrow \dots \rightarrow B$$

où tout morphisme $A_i \rightarrow A_{i+1}$ est de la forme $A \rightarrow A(M, \alpha)$ avec M contractile consistant de k -modules libres.

4 Démonstration du théorème

Les axiomes (CM1)-(CM3) d'une structure de catégorie de modèle sont évidents: En effet, (CM1) est clair, car $\mathcal{C}$ est supposé fermé sous limites finies et colimites finies.

(CM2) est l'axiome "deux sur trois". $f \in \text{Mor}(\mathcal{C})$ est une équivalence faible par définition si $f^\sharp$ est un quasi-isomorphisme. Ainsi, "deux sur trois" est vrai, car c'est vrai dans $\mathcal{C}(k)$.

(CM3) est l'axiome du rétracte. Pour $g \in \mathfrak{W}$ ou $g \in \mathfrak{F}$, c'est clair en appliquant le foncteur oubli $\sharp$. Pour $g \in \mathfrak{C}$, on a le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccccccc} \bullet & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet & \xrightarrow{\alpha} & X \\ \downarrow f & & \downarrow g & & \downarrow h & \nearrow f & \downarrow p \\ \bullet & \longrightarrow & \bullet & \longrightarrow & \bullet & \xrightarrow{\beta} & Y \end{array}$$

où la partie avec les $\bullet$ est un diagramme de rétracte, i.e. les composées horizontales sont l'identité, et le carré à droite est un diagramme de relèvement pour f , i.e. p est une fibration acyclique. On veut montrer que f a la LLP. On sait que g a la LLP, donc il existe la flèche diagonale h . La composée avec la première flèche horizontale en bas donne le relèvement pour f comme on vérifie facilement.

(CM4) (ii) exige que si i est une cofibration et p une fibration dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ \downarrow i & \nearrow \alpha & \downarrow p \\ B & \longrightarrow & Y, \end{array}$$

alors si de plus $p \in \mathfrak{W}$, alors la flèche α existe. Ceci est clair, puisque les cofibrations sont par définition les morphismes ayant la LLP par rapport aux fibrations acycliques.

(CM5)(i) Étant donné $f : A \rightarrow B$ dans $\mathcal{C}$, il faut pouvoir factoriser (de manière fonctorielle en principe) f en $f = p \circ i$ avec p une fibration et i une cofibration acyclique. Pour cela, Hinich fait une construction. Pour tout $b \in B^\sharp$, on définit

$$C_b := A(T_b, S_b; dT_b = S_b).$$

C_b est un $A(M, \alpha)$ pour $M = \dots 0 \rightarrow k = k \rightarrow 0 \rightarrow \dots$ (on veut que la première flèche soit une cofibration triviale) et $\alpha : M \rightarrow A^\sharp$, $T_b \mapsto a$, $S_b \mapsto da$, et cela pour un $a \in A$ tel que $f(a) = b$ ("under A "). S'il n'existe pas de a tel que $f(a) = b$, on prend un $a \in A$ quelconque. Cette procédure de choisir un a rend certainement la construction non-fonctorielle.

On définit alors $g_b : C_b \rightarrow B$ en posant $g_b^\sharp(T_b) = b$ et $g_b^\sharp(S_b) = db$. Sur les composantes de C_b dans A , on applique f . On pose $C = \coprod_{b \in B} C_b$ (sous A), et on obtient alors $g : C \rightarrow B$. On a bien que $g^\sharp : C^\sharp \rightarrow B^\sharp$ est surjective, donc g est une fibration. Par ailleurs, le morphisme $A \rightarrow C$ est une cofibration triviale (c'est en fait une cofibration acyclique standard !). Pour rétablir la fonctorialité,

on peut penser à prendre $C = \coprod_{b \in B} \coprod_{a \in f^{-1}(b)} C_b^a$ où C_b^a est le C_b où on a pris a comme image de T_b sous α .

(CM5)(ii) est plus compliqué (et je n'ai pas tout compris). Étant donné un morphisme $f : A \rightarrow B$ dans $\mathcal{C}$, Hinich construit une suite de cofibrations standard

$$A \rightarrow C_0 \rightarrow C_1 \rightarrow \dots \rightarrow C_i \rightarrow C_{i+1} \rightarrow \dots \rightarrow B$$

telle que

- (1) the morphismes $g_i^\sharp : C_i^\sharp \rightarrow B^\sharp$ sont surjectives;
- (2) $Z(g_i^\sharp) : ZC_i^\sharp \rightarrow ZB^\sharp$ sont surjectives (ici, Z sont les cocycles);
- (3) si $z \in ZC_i^\sharp$ et $g_i^\sharp(z)$ est un cobord dans $B^\sharp$, alors l'image de z dans $C_{i+1}^\sharp$ est un cobord.

Alors on pose $C = \lim_{\rightarrow} C_i$ et $g : C \rightarrow B$ le morphisme induit par les g_i . Le morphisme $A \rightarrow C$ est une cofibration (même une cofibration standard), et $g^\sharp$ est un quasi-isomorphisme surjectif, puisque le foncteur oubli commute avec les colimites filtrées.

Construction de la suite: l'objet C_0 est construit comme dans la démo de (CM5)(i): on adjoint une paire (T_b, S_b) pour tout $b \in B^\sharp$. Ensuite on adjoint un cocycle correspondant à chaque cocycle de $B^\sharp$ (afin d'avoir (2)). Le passage de C_i à C_{i+1} se fait en adjoignant une variable T pour toute paire (z, u) avec $z \in ZC_i^\sharp$ et $u \in B^\sharp$ telle que $g_i^\sharp(z) = du$. On pose pour cela $dT = z$ et $g_{i+1}^\sharp(T) = u$.

(CM4)(i) exige que l'on montre l'existence de α dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & X \\ \downarrow i & \nearrow \alpha & \downarrow p \\ B & \longrightarrow & Y, \end{array}$$

avec i cofibration acyclique et p fibration. Pour cela, on montre que toute cofibration acyclique est rétracte d'une cofibration acyclique standard. Pour une cofibration acyclique standard, les données se traduisent via $\sharp$ en LLP dans $C(k)$, donc on conclut à la LLP dans $\mathcal{C}$.

La cofibration acyclique $f : A \rightarrow B$ se factorise par (CM5)(i) en $f = p \circ i$ avec p fibration acyclique et i cofibration standard acyclique. Puisque f est de plus une cofibration, alors par (CM4)(ii), il existe j dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{i} & C \\ \downarrow f & \nearrow j & \downarrow p \\ B & \xrightarrow{\text{id}_B} & B. \end{array}$$

Ceci montre bien que toute cofibration acyclique (i.e. f) est rétracte d'une cofibration acyclique standard (i.e. i) (voir aussi Lemma 1.1.9, p. 5, dans [3]) et montre donc la propriété (CM4)(i).

5 D'autres approches

Dans le livre de Dwyer-Hirschhorn-Kan, on trouve le Lifting Lemma suivant:

Theorem 5.1 *Soit B une catégorie de modèle cofibramment engendrée avec I et J les cofibrations génératrices et les cofibrations triviales génératrices. Soit C une catégorie complète et cocomplète et supposons donnée une adjonction*

$$F : B \xrightleftharpoons{\quad} C : U.$$

Alors C porte une structure de catégorie de modèle cofibramment engendrée avec FI et FJ comme ensembles de cofibration et cofibrations triviales génératrices, dans laquelle un morphisme est une équivalence faible si son image sous U l'est, si et seulement si

- (i) les ensembles FI et FJ admettent l'argument du petit objet, et*
- (ii) une (et donc toutes les deux) des conditions suivantes est satisfaite:*
 - (ii)' Uf est une équivalence faible pour tout $f \in FJ\text{-cof}$, ou*
 - (ii)" tout morphisme f dans C admet une factorization $f = pj$ telle que Uj est une équivalence faible et Up est une fibration.*

Si ces deux conditions (i) et (ii) sont satisfaites, alors F et U forment une paire de foncteurs adjoints de Quillen.

Ce théorème s'applique aussi dans le cadre du début de ces pages, i.e. pour l'adjonction libre-oubli entre les $\mathcal{O}$ -algèbres et les complexes. On rappelle que dans la catégorie des complexes, on a comme cofibrations génératrices I les morphismes $S^{n-1} \rightarrow D^n$ et comme cofibrations triviales génératrices J les morphismes $0 \rightarrow D^n$. Pour le transfert de la structure de catégorie modèle, on pose que les fibrations sont $RLP(FJ)$. On peut voir qu'il s'agit de morphismes qui sont surjectives en tout degré.

$FJ\text{-cof} = LLP(RLP(FJ))$ vérifie les propriétés suivantes: Les complexes cellulaires FJ -relatifs, $FJ\text{-cell}$, appartiennent à $FJ\text{-cof}$. Ceci est purement catégorique (voir Lemma 2.1.10, p. 31, dans [3]): FJ appartient à $FJ\text{-cof}$, et la classe des morphismes de la forme $LLP(-)$ est stable par pushout et colimite séquentielle, donc $FJ\text{-cof}$ contient $FJ\text{-cell}$.

Ensuite, tout morphisme de $FJ\text{-cof}$ est rétracte d'un morphisme de $FJ\text{-cell}$. Pour cela, on produit le diagramme de rétraction grâce à la factorisation de l'argument du petit objet (voir Corollary 2.1.15, p. 33, dans [3]).

Les morphismes cellulaires FJ -relatifs étant obtenus à partir de quasi-isomorphismes $0 \rightarrow D^n$, ce sont aussi des quasi-isomorphismes, et tout rétracte

d'un quasi-isomorphisme et encore un quasi-isomorphisme. Donc les morphismes dans $FJ\text{-cof}$ sont des quasi-isomorphismes. Ceci montre donc la Propriété (ii)' du théorème ci-dessus.

References

- [1] William Dwyer, Philip Hirschhorn, Daniel Kan, *Model Categories and More General Abstract Homotopy Theory*, manuscript 1997
- [2] Vladimir Hinich, *Homological algebra of homotopy algebras* Comm. Algebra **25** (10) (1997) pp. 3291–3323
- [3] Mark Hovey, *Model Categories* Mathematical Surveys and Monographs **63** 1999
- [4] Charles Weibel, *An introduction to homological algebra* Cambridge University Press 2013