

Cohomologies

3 mars 2026

Objectifs :

- Rappeler quelques faits concernant les foncteurs dérivés de foncteurs additifs entre catégories abéliennes, en mettant l'accent sur le cas des catégories de modules qui conduisent aux Ext.
- Définir la cohomologie opéradique d'une algèbre sur une opérade de Koszul, la comparer à sa cohomologie d'André-Quillen.
- Traiter l'exemple des trois graces.

1 Foncteurs dérivés, le cas abélien

Référence : le livre de Cartan et Eilenberg [1].

Un foncteur additif $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ entre catégories abéliennes peut présenter un défaut d'exactitude. Mesurer ce défaut conduit à introduire ses foncteurs dérivés.

1.1 Exactitude, injectifs et projectifs

Définition 1. F est **exact à gauche** si l'image par F de toute suite exacte $0 \rightarrow A \rightarrow A' \rightarrow A'' \rightarrow 0$ dans $\mathcal{A}$ donne lieu à une suite exacte

$$0 \rightarrow F(A) \rightarrow F(A') \rightarrow F(A'')$$

dans $\mathcal{B}$, dès lors que F est covariant (sinon, inverser les sens des flèches).

De façon symétrique, F peut-être **exact à droite** si ...

Enfin, F est exact s'il l'est à gauche et à droite.

Exemple 2. — Le foncteur $A \mapsto A^G$ qui à tout module A sur un groupe G associe le groupe abélien de ses éléments invariants sous G est exact à gauche mais pas à droite : la surjection $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2 \rightarrow 0$ n'induit pas une surjection entre invariants sous l'action de $\{\pm 1\}$.

- L'exemple précédent est un cas particulier du fait suivant : $\text{Hom}(-, -)$ n'est en général pas exact à droite.

Proposition 3. *Le foncteur $\text{Hom}_R(-, -)$ est exact à gauche.*

Définition 4. Un objet I est **injectif** si, pour toute injection $\iota : 0 \rightarrow A \rightarrow A'$ et tout morphisme $f : A \rightarrow I$, il existe $g : A' \rightarrow I$ qui étend f i.e. $f = g\iota$, ce qui signifie que

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\iota} & A' \\ & & \searrow f & & \downarrow \exists g \\ & & & & I \end{array}$$

commute.

Remarque 5. Ceci traduit la surjectivité de $g \mapsto g\iota$.

Voici une caractérisation utile pour travailler avec des injectifs dans une catégorie de modules :

Proposition 6. *Un R -module M est injectif si et seulement si $\text{Hom}(-, I)$ est exact (et projectif si et seulement si $\text{Hom}(M, -)$ est exact).*

Démonstration. La démonstration se déduit du lemme suivant

Lemme 7. *Un foncteur contravariant (resp. covariant) exact à gauche est exact à droite si et seulement si il l'est sur les injections (resp. sur les surjections).*

□

Théorème 8. *La catégorie des R -modules admet assez d'injectifs et de projectifs.*

1.2 Résolutions, foncteurs dérivés

Lemme 9 (lemme fondamental). *Soit I^* un complexe d'injectifs au dessous de A et M^* un complexe acyclique au dessous de B . Alors, tout morphisme $f : A \rightarrow B$ se relève en un morphisme de complexes $f^* : I^* \rightarrow M^*$ unique à homotopie près.*

Corollaire 10. *Toutes les résolutions injectives sont uniques à homotopie près.*

Définition 11. Soit $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un foncteur covariant (resp. contravariant) exact à gauche avec $\mathcal{A}$ ayant assez d'injectifs (resp. de projectifs). Son foncteur **dérivé à droite** est défini par

$$\mathbb{R}^*F(M) := H^*(F(M^*))$$

où M^* est une résolution injective (resp. projective) arbitraire de M .

En particulier,

$$\text{Ext}_R(M, N) = \mathbb{R}^*\text{Hom}(M, N) = H^*(\text{Hom}_R(P_*, N)) = H^*(\text{Hom}_R(M, I^*))$$

pour tous R -modules M et N , toute résolution injective I^* de N (resp. toute résolution projective P_* de M).

Remarque 12. Le choix de ne dériver Hom_R que par rapport à l'une de ses deux variables est licite en vertu du fait que ce foncteur est "bien équilibré" (voir Cartan-Eilenberg).

Proposition 13. $\mathbb{R}^*F$ est un δ -foncteur : toute suite exacte courte $0 \rightarrow M \rightarrow M' \rightarrow M'' \rightarrow 0$ induit une suite exacte longue naturelle

$$\cdots \mathbb{R}^i F(M) \rightarrow \mathbb{R}^i F(M') \rightarrow \mathbb{R}^i F(M'') \xrightarrow{\delta} \mathbb{R}^{i+1} F(M) \rightarrow \mathbb{R}^{i+1} F(M') \rightarrow \cdots$$

(renverser le sens des flèches dans le cas contravariant)

Remarque 14. Lien avec la localisation évoquée dans les exposés précédents : dériver un foncteur revient à construire l'extension de Kan qui l'étend en un foncteur entre les catégories homotopiques (i.e. dérivées) associées aux structures de modèles injectives/projectives.

1.3 Exemples

1. Cohomologie des groupes : $H^*(G; M) = \text{Ext}_G(\mathbb{Z}; M) = \mathbb{R}(-)^G(M)$ pour tout G -module M .
2. Cohomologie de Hochschild des algèbres associatives : $HH^*(A; M) = \text{Ext}_{A^e}(A; M) = \mathbb{R}(-)^A(M)$ pour toute algèbre associative A et tout A -bimodule M , où $A^e := A \otimes A^{op}$ est l'algèbre enveloppante de A . Résolution standard.
3. Cohomologie de Chevalley-Eilenberg des algèbres de Lie sur un corps k : $H_{CE}^*(\mathfrak{g}; M) = \text{Ext}_{U\mathfrak{g}}(k; M) = \mathbb{R}(-)^{\mathfrak{g}}(M)$ pour tout algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ d'enveloppante $U\mathfrak{g}$. Résolution standard. Comparaison avec la cohomologie de Hochschild de $U\mathfrak{g}$.

4. Cohomologie de Loday-Pirashvili des algèbres de Leibniz.
5. Homologie comme foncteur $\text{Tor} = \otimes_A^{\mathbb{L}}$.
6. Pour A commutative, interprétation de l'homologie comme intersection dérivée, lien avec les espaces de lacets (Moulinos-Robalo-Toën), le théorème de HKR.
7. Algèbres augmentées (Cartan-Eilenberg), changement d'anneau.
8. Cohomologies des petites catégories, des foncteurs.
9. Homologie cyclique ?
10. Cohomologie des faisceaux, le cas "de Rham".

Proposition 15. *Soit A une algèbre associative de produit μ et $\Omega_A^{As} := \text{Ker} \mu$ son bimodule des différentielles de Kahler. Alors,*

$$HH^{*+1}(A; M) = \text{Ext}_{A^e}^*(\Omega_A^{As}; M).$$

De façon analogue, pour tout k -algèbre de Lie $\mathfrak{g}$,

$$H_{CE}^{*+1}(\mathfrak{g}; M) = \text{Ext}_{U\mathfrak{g}}^*(\Omega_{\mathfrak{g}}; M).$$

en notant $\Omega_{\mathfrak{g}}$ le noyau de l'augmentation $U\mathfrak{g} \rightarrow k$.

Démonstration. Considérer les suite courtes associées aux augmentations. □

Remarque 16. Quid du cas Leibniz ?

Expliquer pourquoi cela ne fonctionne pas pour les algèbres commutatives : $\text{Ext}_A(\Omega_A; M)$ ne fournit pas le "bonne" cohomologie des algèbres commutatives.

2 Foncteur dérivé dans le cas non abélien : la cohomologie d'André-Quillen

Références

- [1] H. Cartan, S. Eilenberg *Homological algebra* Princeton University Press 1956