Cohomologie étale

réf. Milne Étale cohomology
K.S. Categories & Sheaves
. Stacks project

I. but

avoir un analogue pour les var. alg. de $H^i(X, \mathbb{C})$ pour esp. topo. X.

. th. des faisceaux $\to \mathbb{C}_X$ fcts c^te $H^i(X, \mathbb{C}_X) = H^i(X, \mathbb{C})$
(X ... cohom. loc. connexe)

. on peut déf. $\mathbb{C}_{\mathfrak{X}}$ $\mathbb{C}_X(U) = \{f : U \to \mathbb{C} \mid f \text{ loc. } c^{ste}\}$
pour $\mathfrak{X}$ = var. alg.

mais si $\mathfrak{X}$ irréd $\mathbb{C}_{\mathfrak{X}}$ est flasque, donc $H^i(\mathfrak{X}, \mathbb{C}_{\mathfrak{X}}) = 0$ $i > 0$

La topo étale donne

Thm X schéma lisse sur $\mathbb{C}$. M gpe abélien fini
$H^i(X(\mathbb{C}), M) \simeq H^i(X_{et}, M)$

(Brauer) $\longrightarrow$

II. Faisceaux sur un esp. topo [L.]

X esp. top.

. préfaisceau (de gpes abéliens / R-mod) : $F : Op(X)^{op} \longrightarrow Ab$
$U \longmapsto F(U)$
$V \subset U \longmapsto r^U_V : F(U) \to F(V)$
$r^U_W = r^V_W \circ r^U_V$ $r^U_V(s) = s|_V$

. faisceau si $\forall\ U = \cup U_i$

$$0 \to F(U) \to \prod_i F(U_i) \to \prod_{i,j} F(U_{ij})$$
$$s \mapsto (s|_{U_i})_i$$
$$(t_i) \longmapsto (d_{ij})_{ij} \quad d_{ij} = t_i|_{U_{ij}} - t_j|_{U_{ij}}$$

. morphismes $\varphi : F \to G$ = $\forall U$ $\varphi(U) : F(U) \to G(U)$ tq $\circledast$ commute $\forall V \subset U$

$$\begin{array}{ccc} F(U) & \to & G(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F(V) & \to & G(V) \end{array} \quad \circledast$$

$\to$ cat. $P.Sh(X)$, $Sh(X)$

Def R anneau local commutatif

A alg. $/R$ est d'Azumaya si $A \otimes_R A^{op} \to \mathrm{End}_{R\text{-mod}}(A)$ iso.

prop $M_n(R)$ Azumaya

$A \otimes_R A'$ — si A, A' Azumaya

$Br(R) = \{Az.\}/\sim$ $\quad A \sim A'$ si $\exists n, n'$ $A \otimes_R M_n(R) \simeq_R A' \otimes M_{n'}(R)$

Def X schéma

$\mathcal{O}_X$-alg A Azumaya si $\left|\begin{array}{l} A \ \mathcal{O}_X\text{-cohérente} \\ \forall x \quad A_x \ \text{Azumaya} / \mathcal{O}_{X,x} \end{array}\right.$

$\left(\Rightarrow A \underset{\text{local}^t}{\simeq} \mathcal{O}_X^n \right)$

$A \sim A'$ si $\cancel{A \otimes}$ $\exists E, E'$ loc. libre rg fini $A \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathrm{End}_{\mathcal{O}_X}(E) \simeq A' \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathrm{End}_{\mathcal{O}_X}(E')$

Thm $\exists\ Br(X) \hookrightarrow H^2(X_{et}, \mathbb{G}_m)$

expl. · $F = \mathcal{C}^0_X$ f^{ct} cont. sur X

· $X = \mathbb{R}$, $U \mapsto L^1(U)$ pas faisceau

· A gpe ab. $F(U) = A$ $r^U_V = id$ pas fais. en g^{nal}
mais oui si X irréd (au sens top. Zariski) ($X \neq Z_1 \cup Z_2$, Z_i fermés propres)

· A_X fais. c^{st} de germes A
$A_X(U) = \{f : U \to A \mid \text{loc. c}^{st}\}$

germes $P \in Psh(X)$ $P_x = \varinjlim_{x \in U} P(U)$ $s \in P(U) \mapsto s_x \in P_x$

$(A_X)_x = A$

déf $F \in Sh(X)$ est loc. c^{st} si $\forall x\ \exists U$ voisin $F|_U = c^{st} = A_U$ pour A gpe ab.

$F|_U \in Sh(U)$ $(F|_U)(V) = F(V)$

---

expl. $X = \mathbb{C}^*$

$\alpha \in \mathbb{C}$ $\mathcal{L}_\alpha \subset \mathcal{O}_X$ $\mathcal{L}_\alpha(U) = \{f : U \to \mathbb{C} \mid (x\partial_x - \alpha)(f) = 0\}$

$f = \lambda x^\alpha$

· $L \subset \mathcal{O}_X$ $L = \{f : U \to \mathbb{C} \mid \partial_x(x\partial_x)(f) = 0\}$ $(x\partial_x^2 + \partial_x)(f) = 0$

$= \{\lambda + \mu \log x\}$

~~monodromie~~

Images directe / inverse

$f : X \to Y$

déf. $F \in Sh(X)$ $f_*(F) \in Sh(Y)$ $(f_*(F))(V) := F(f^{-1}(V))$ = faisceau

· $G \in Sh(Y)$ ${}^{pré}f^{-1}(G) \in Psh(X)$ $({}^{pré}f^{-1}(G))(U) := \varinjlim_{f(U) \subset V} G(V)$

Prop faisceau associé $Sh(X) \xrightarrow{i} PSh(X)$ a un adjoint à gauche

$\mathrm{Hom}_{Sh}(P^a, F) = \mathrm{Hom}_{Psh}(P, i(F))$

construction ${}_xP = i_{x*}(P_x)$ "fais gratte-ciel" $({}_xP)(U) = \begin{cases} P_x & x \in U \\ 0 & x \notin U \end{cases}$

produit $\tilde{P} = \prod_{x \in U} {}_xP$

Rq $(F_i)_{i\in I}$ $\prod_{i\in I} F_i$ existe et $(\prod_i F_i)(U) = \prod_i (F_i(U))$

$c : P \to \tilde{P}$ $\quad s\in P(U) \longmapsto (s_x)_{x\in U} \in \tilde{P}(U)$

$$P^a(U) := \left\{ s\in \tilde{P}(U) \mid \forall x\in U \ \exists V \text{ vois de } x \ \ t\in P(V) \ \ s|_V = c(t) \right\}$$

---

déf $G\in Sh(Y)$ $\quad f^{-1}(G)\in Sh(X)$ $\quad f^{-1}(G) = ({}^{pre}f^{-1}(G))^a$

Prop $(F_i)_{i\in I}$ $\quad \bigoplus F_i$ existe. $\bigoplus_i F_i = \overset{pre}{\bigoplus_i} F_i$ $\quad (\overset{pre}{\bigoplus} F_i)(U) := \bigoplus F_i(U)$

Prop (f^{-1}, f_*) adjoints

---

exple $a : X \to \{pt\}$ $\quad a^{-1}A = A_X$

~~Prop $(f\circ g)_* = f_*\circ g_*$ $\quad (f\circ g)^{-1} = g^{-1}\circ f^{-1}$~~

exple . $\forall f : X\to Y$ $\quad f^{-1}A_Y \simeq A_X$

. $\forall G\in Sh(Y)$ $\quad G$ loc. c^st $\Rightarrow f^{-1}G$ loc. c^st

Monodromie

prop I esp. topo. contractile $\quad F\in Sh(I)$ loc. c^st

Alors ① $\forall x\in I$ $\quad F(I) \to F_x$ est un iso.

$\qquad\qquad s \longmapsto s_x$

② F est constant $\quad F \simeq (F_x)_I$

cor X $\quad F\in Sh(X)$ loc. c^st $\quad a, b\in X$

① $\gamma : [0,1] \to X$ $\quad \gamma(0)=a \ \ \gamma(1)=b$

$$\underbrace{F_a \xleftarrow{\simeq} \gamma^{-1}F([a,b]) \xrightarrow{\simeq} F_b}_{m_\gamma}$$

② γ, γ' homotopes extr. fixes. Alors $m_\gamma = m_{\gamma'}$

③ γ, γ' concaténable $\quad m_{\gamma'\circ\gamma} = m_{\gamma'}\circ m_\gamma$

déf $F\in Sh(X)$ loc. c^st $\quad x_0\in X$ $\quad$ (X localt contractile)

monodromie $= \quad m : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow Aut(F_{x_0})$

$\qquad\qquad\qquad \gamma \longmapsto m_\gamma$

Prop X localt simplt connexe :

$$\mathrm{Loc}(X) \subset \mathrm{Sh}(X) \qquad \mathrm{Rep}(\pi_1(X, x_0), Ab) \quad \text{éq. de cat.}$$
$$F \longmapsto (F_{x_0}, m_{x_0})$$

Expl $X = \mathbb{C}^*$ $\quad \mathcal{L}_\alpha = \{\lambda x^\alpha\}$ $\quad (L_\alpha)_x = \mathbb{C}$ $\quad f(x) = \lambda \exp^{\alpha \log(x)} \rightsquigarrow \lambda \exp^{\alpha(\log x + 2i\pi)} = e^{2i\pi\alpha} f(x)$

$\mathcal{L}_\alpha = \mathcal{L}_{e^{2i\pi\alpha}}$ $\quad m_f(1) = (e^{2i\pi\alpha})$

$L = \{\lambda + \mu \log x\}$ $\quad \log(x e^{2i\pi}) = \log x + 2i\pi$

$L_{x_0} = \mathbb{C}^2 = \mathbb{C}(1, \log x)$ $\qquad m = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2i\pi & 1 \end{pmatrix}$

III Topologies de Grothendieck

- Pour définir un préfaisceau, la catégorie $Op(X)$ suffit

$\rightarrow \mathcal{C}$ catégorie (petite) $\quad PSh(\mathcal{C}) = \mathrm{Fun}(\mathcal{C}^{op}, Ab)$

- faisceau $\rightarrow$ notion de recouvrement

On suppose que $\mathcal{C}$ a des produits fibrés
$(\mathcal{C} = Op(X) \rightarrow$ intersection$)$

$$\begin{array}{ccc} U \times_W V & \rightarrow & V \\ \downarrow & & \downarrow \\ U & \rightarrow & W \end{array}$$

Not. Pour $U \in \mathcal{C}$ $\quad \mathcal{C}_U =$ catégorie obj $\begin{array}{c} V \\ \varphi \downarrow \\ U \end{array}$

morph $\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{f} & V' \\ & \varphi \searrow \quad \circlearrowleft \quad \swarrow \varphi' & \\ & U & \end{array}$

déf Top. de Gr. sur $\mathcal{C}$ = donnée

pour chaque $U \in \mathcal{C}$ d'une famille Cov_U de "recouvrts" de U $\quad \mathrm{Cov}_U = \{R_\alpha\}_{\alpha \in A}$ $\quad R_\alpha = \left\{ \begin{array}{c} U_i \\ \downarrow \varphi_i \\ U \end{array} \right\}_{i \in I_\alpha}$ $\quad$ tq

(1) $\{U\} \in \mathrm{Cov}_U$

(2) $R_\alpha \left\{ \begin{array}{c} U_i \\ \downarrow \varphi_i \\ U \end{array} \right\}_{i \in I_\alpha} \in \mathrm{Cov}_U$ et $R = \left\{ \begin{array}{c} V_j \\ \downarrow \psi_j \\ U \end{array} \right\}_{j \in J}$ tq $\forall i \; \exists j$ $\quad \begin{array}{ccc} U_i & \longrightarrow & V_j \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & U & \end{array}$

alors $R \in \mathrm{Cov}_U$

(3) $R_\alpha = \left\{ \begin{matrix} U_i \\ \downarrow \varphi_i \\ U \end{matrix} \right\} \in \mathrm{Cov}_U$ et $\begin{matrix} V \\ \downarrow \\ U \end{matrix}$ $\Longrightarrow$ $\left\{ \begin{matrix} U_i \times_U V \\ \downarrow \\ V \end{matrix} \right\} \in \mathrm{Cov}_V$

(4) $R_\alpha = \left\{ \begin{matrix} U_i \\ \downarrow \varphi_i \\ U \end{matrix} \right\} \in \mathrm{Cov}_U$, $R = \left\{ \begin{matrix} V_j \\ \downarrow \psi_j \\ U \end{matrix} \right\}$

Si $\forall i$ $\quad R \times_U U_i \in \mathrm{Cov}(U_i)$, alors $R \in \mathrm{Cov}(U)$

Déf | Faisceau sur $(\mathcal{C}, \mathrm{Cov})$ = $F : \mathcal{C}^{op} \to Ab$
| tq $\forall U$ $\forall \left(\begin{matrix} U_i \\ \downarrow \varphi_i \\ U \end{matrix} \right) \in \mathrm{Cov}_U$ $\quad 0 \to F(U) \to \prod F(U_i) \to \prod F(U_{ij})$ exact

expl. G gpe fini

$T_G = \{G\text{-ensemble (fini)}\}$ (à gche) $\qquad \mathrm{Cov}_U = \left\{ \left\{ \begin{matrix} U_i \\ \varphi_i \downarrow \\ U \end{matrix} \right\} \mid \bigcup_i \varphi_i(U_i) = U \right\}$

$G \in T_G$

. $G^{op} \xrightarrow{\rho} \mathrm{Aut}(G)$

$\quad g \longmapsto (h \mapsto hg^{-1})$

$F \in Psh(T_G) \Rightarrow F(G)$ est un G-module via ρ

Lemme | $Sh(T_G) \longrightarrow G\text{-mod}$ éq. cat.
| $\quad F \longmapsto F(G)$

inverse $\quad h : G\text{-mod} \to Psh(T_G)$

$\qquad M \longmapsto (h_M : E \mapsto \mathrm{Mor}_G(E, M))$

$h_M(G) = \mathrm{Mor}_G(G, M) \simeq M$

$\qquad \varphi \longmapsto \varphi(e)$

utiliser $\quad E = \coprod \text{orbites} = \coprod_i G/H_i$

et || si $F \in Sh(T_G)$ $\quad F(G/H) = (F(G))^H$

$\qquad$ ($F(G)$ détermine F)

dém $\begin{matrix} G \\ \downarrow \\ G/H \end{matrix}$ recouvrt

$$s \longmapsto \prod_h (s - \rho_{h^{-1}}(s))$$

$$0 \to F(G/H) \to F(G) \longrightarrow F(G \times_{G/H} G) \simeq \prod_{h \in H} F(G)$$

$(g, h) = (g_1, g_1^{-1} g_2) \leftarrow (g_1, g_2)$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, bend right, "\text{trivial}"'] & G \times H \arrow[r, "\simeq"] & G \times_{G/H} G \arrow[r] \arrow[d] & G^{\,gh} \arrow[d, dashed] \\ & & G \arrow[r] & G/H \end{tikzcd}$$

$g \mapsto g(e)$; g

Exple $X = \mathbb{C}^\times$ $\mathcal{O}p_{ét}(X_{et})$ étale facile

$\mathcal{O}p_{et}(X) = \{ \varphi : U \to X \mid \exists\ V \xrightarrow{\varphi_1} X$ revêt de $X \setminus$ ens. fini $U \subsetneq V \setminus$ ens fini $\}$

$\mathcal{O}p_{et}(X) = \{ \pi : U \to X \mid$ revêt^t fini de $X \setminus$ (ens. fini) $\}$ $\quad \mathcal{O}p_{Zar}(X) = \{ U \subset X \mid U = X \setminus$ ens fini $\}$

$Sh(X) \longrightarrow Sh_{et}(X)\ ,\ Sh_{Zar}(X)$

$F \longmapsto (\pi \mapsto (\pi^{-1}F)(U))$

$F = L_\alpha$. $F_{Zar} = 0$ si $\alpha \neq 1$

. si $\alpha^n = 1$ $\beta^n = 1$ $\alpha \neq \beta$ $\quad L_{\alpha, et} \neq L_{\beta, et}$

$F = L_{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}$ base$(1, \log x)$ $\quad F_{Zar}(U) = \mathbb{C}\ \ \forall U$

$F_{et}(U \xrightarrow{id} X) = \mathbb{C} \quad \forall\ U \xrightarrow{\pi} X$

. mais remplace ~~coef~~ $\mathbb{C}$ par coef $\mathbb{F}_q$ $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ordre fini

F_{et} non trivial

. puis $\varprojlim_n$ cohomologie $\mathbb{Z}_p$