

Cohomologie galoisienne et groupe de Brauer

24 mars 2026

Objectifs :

- Donner quelques rudiments de cohomologie des groupes.
- Démontrer que le groupe de Brauer d'un corps s'identifie à son deuxième groupe de cohomologie galoisienne.
- Aborder quelques conséquences arithmétiques des conjectures de Milnor.

1 Cohomologie des groupes

1.1 Généralités

Rappels sur les modules injectifs, projectifs, la définition de Ext, la suite exacte longue associée à une suite courte de modules.

Soit G un groupe et M un G -module.

Définition 1. La **cohomologie de G à coefficients dans M** est le groupe abélien gradué

$$H^*(G; M) := \text{Ext}(\mathbb{Z}; M) := \mathbb{R}\text{Hom}_G(\mathbb{Z}; -)(M) = \mathbb{R}(-)^G(M) = \mathbb{R}\text{Hom}_G(-; M)(\mathbb{Z}).$$

Exemple 2. Si G est le groupe à un élément,

$$H^*(G; M) = \begin{cases} M & \text{si } * = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

car $(-)^G$ est exact.

Définition 3. Le **complexe standard** est le groupe abélien gradué $C^*(G; M)$ défini par

$$\forall n \in \mathbb{N}, C^n(G; M) := \text{Map}(G^n; M)$$

muni de la différentielle ∂ définie par

$$\partial(f)(g_0, g_2, \dots, g_n) := g_0 f(g_1, \dots, g_n) + \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^{i+1} f(g_0, \dots, g_i g_{i+1}, \dots, g_n) + (-1)^{n+1} f(g_0, \dots, g_{n-1})$$

pour tous g_1, \dots, g_n dans G .

Proposition 4. ∂ est bien une différentielle et

$$H^*(G; M) = H^*(C^*(G; M), \partial)$$

Démonstration. Remarquons que

$$(C^*(G; M), \partial) \cong \text{Hom}_G((\mathbb{Z}[G]^{*+1}, d); M)$$

où

$$d([g_0 | \cdots | g_n]) := \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i [g_0 | \cdots | g_i g_{i+1} | \cdots | g_n] + (-1)^n [g_0 | \cdots | g_{n-1}]$$

pour tous g_0, \dots, g_n dans G . Il suffit donc de démontrer que

$$(\mathbb{Z}[G]^{*+1}, d)$$

est une résolution libre (donc projective) de \mathbb{Z} en exhibant une homotopie contractante. \square

Exemple 5 (Petits degrés). H^0 donne les invariants, H^1 les classes de morphismes croisés (morphismes de groupes dans le cas d'une action triviale) et H^2 classe les extensions abéliennes.

Remarque 6. Un modèle simplicial de $B_\bullet G$ de $K(G, 1)$ est donné par $B_\bullet G := G^{\times \bullet}$ et la résolution standard n'est autre que la linéarisation de $E_\bullet G := G^{\times(n+1)}$. La cohomologie de groupe de G à coefficients dans M est celle de $BG := |B_\bullet G|$ à valeur dans le système local induit par M .

Proposition 7. Si N est un autre G -module, l'application naturelle $M^G \otimes N^G \rightarrow (M \otimes N)^G$ induit un cup-produit

$$H^*(G; M) \otimes H^*(G; N) \rightarrow H^*(G; M \otimes N).$$

Proposition 8 (Shapiro). Soit H un sous-groupe de G et N un H -module. L'application canonique

$$H^*(G; N \uparrow_H^G) \rightarrow H^*(H; N)$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Remarquer que si N^* est une résolution injective de N comme H -module, $N^* \uparrow_H^G$ est une résolution injective de $N \uparrow_H^G$ comme G module. \square

Corollaire 9. La cohomologie à valeur dans un module induit $N \uparrow_1^G$ est concentrée en degré 0.

1.2 Cohomologie des groupes finis

Supposons G fini d'ordre n . Soit H un sous-groupe de G et M un G -module.

Proposition 10. L'application naturelle de corestriction $M^H \rightarrow M^G$ qui envoie m dans M^H sur

$$\sum_{[g] \in G/H} g.m$$

dans M^G induit une factorisation

$$H^*(G; M) \rightarrow H^*(H; M \downarrow_H^G) \rightarrow H^*(G; M)$$

de la multiplication par n .

Démonstration. Résulte de l'unicité des relèvements à homotopie près (lemme fondamental) et de l'exactitude du foncteur de restriction. \square

Corollaire 11. Les groupes de cohomologie de G sont de n -torsion.

Théorème 12. Si G est cyclique, alors sa cohomologie est 2-périodique.

Démonstration. Utiliser la résolution norme/trace associée au choix d'un générateur σ de G pour calculer $H^*(G; -)$. \square

Remarque 13 (Voir [2]). La suite exacte courte de G -modules

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \rightarrow 0$$

induit une suite longue

$$\cdots H^1(G; \mathbb{Z}) \rightarrow H^1(G; \mathbb{Q}) \rightarrow H^1(G; \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \xrightarrow{\delta} H^2(G; \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \rightarrow \cdots$$

et l'image par le connectant δ de la classe de l'unique homomorphisme (croisé i.e. de groupe) qui envoie σ sur $\frac{1}{n}$ fournit un élément non nul dans $H^2(G; \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$. L'isomorphisme de 1-périodicité précédent (associé au choix de σ) est donné par cup-produit avec cet élément.

Remarque 14. Lien avec la cohomologie des espaces lenticulaires.

Pour la culture (et peut-être pour plus tard) :

Théorème 15. Si H est un p -Sylow de G , l'application de restriction

$$H^*(G; M) \rightarrow H^*(H; M \downarrow_H^G)$$

est injective sur la composante p -primaire de $H^*(G; M)$.

Remarque 16. Il faudrait peut-être aussi mentionner le théorème de Tate et Nakayama, parler de cohomologie d'un p -groupe, de quotient de Herbrand...

1.3 Cohomologie non abélienne

Soit G est un groupe et A un groupe non nécessairement commutatif muni d'une action de G par automorphismes.

Définition 17. Un 0-cocycle de G à valeurs dans A est un élément de A invariant par G et $H^0(G; A) := A^G$.

Un 1-cocycle est une application $a : G \rightarrow A$ telle que $a(st) = a(s)s(a(t))$ pour tous s et t dans G . Deux tels cocycles a et b sont **cohomologues** s'il existe c dans A tel que $b(s) = c^{-1}a(s)s(c)$ pour tout s dans G .

Proposition 18. Être cohomologues est une relation d'équivalence sur l'ensemble des 1-cocycles et le quotient associé est noté $H^1(G; A)$.

Proposition 19. Un morphisme de G -modules non abéliens $f : A \rightarrow B$ induit un morphisme de groupes entre les H^0 et un morphisme d'ensembles pointés entre les H^1 .

Proposition 20. Toute suite exacte $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ de G -modules non nécessairements abéliens induit une suite exacte d'ensembles pointés. Si, de surcroît, A est contenu dans le centre de B , cette suite se prolonge en ajoutant le terme $H^2(G; A)$.

1.4 Groupes profinis

La cohomologie d'un groupe profini peut être définie à l'aide de cochaînes continues ou comme limite. Un certain nombre de constructions et résultats s'étendent par passage aux quotients finis. Exemple "type" des complétés. Voir "Cohomologie Galoisienne" de Serre. Introduire la notion de module "topologique/discret" sur un groupe profini.

2 Cohomologie Galoisienne

Ici, la référence est Serre [2].

Passons au cas où G est le groupe de Galois d'une extension galoisienne finie $K|k$. Dans ce cas, $H^*(G; M)$ est noté $H^*(K|k; M)$.

2.1 Premiers exemples

Proposition 21. Pour tout entier $q > 0$, $H^q(K|k; K) = 0$ et $H^0(K|k; K) = k$.

Démonstration. Provient du théorème de la base normale qui implique que K est un G -module induit. \square

Théorème 22 (Hilbert 90). Pour tout entier n ,

$$H^1(G; \mathrm{GL}_n(K)) = \{1\}.$$

Démonstration. Nous ne traitons que le cas $n = 1$. Soit $s \rightarrow a_s$ un 1-cocycle non-nul. Soit c dans K et posons

$$b := \sum_s a_s s(c).$$

Le théorème d'indépendance linéaire des automorphismes de Dedekind (c.f. Bourbaki Alg. Chap. V par. 6 par ex.) implique qu'il est possible de choisir c tel que $b \neq 0$. Un calcul direct fournit

$$\forall s \in G, s(b) = a_s^{-1} b$$

i.e. $s \rightarrow a_s$ est cobordant à 1. \square

Corollaire 23. Si G est cyclique engendré par s , pour tout élément x de K^* tel que $N_{K|k}(x) = 1$, il existe y dans K^* tel que $x = y/s(y)$.

Exemple 24. Énumération des triplets pythagoriciens.

Corollaire 25. Pour tout entier n ,

$$H^1(G; \mathrm{SL}_n(K)) = \{1\}.$$

Démonstration. Regarder la suite exacte courte donnée par le déterminant $\mathrm{GL}_n(K) \rightarrow K^*$. \square

Corollaire 26. Si μ_n désigne le sous-groupe des racines n -ième de l'unité de K , la n torsion dans $H^2(K|k; K^*)$ s'identifie à $H^2(K|k; \mu_n)$.

Démonstration. Regarder la suite exacte longue associée à

$$0 \rightarrow \mu_n \rightarrow K^* \xrightarrow{()^n} K^* \rightarrow 0.$$

\square

2.2 Descente d'une représentation

Exemple historique : Schur 1904, descente d'une représentation [Voir exposé de Serre 1996, le diaporama de l'exposé de Caldero, les notes d'exposé de B. Conrad [8]].

Soit $K|k$ une extension galoisienne et soit $\rho : H \rightarrow \mathrm{GL}_n(K)$ une représentation **absolument** irréductible d'un groupe fini H sur K (de caractéristique nulle). Provient-elle, par extension des scalaires et à conjugaison près, d'une représentation sur k i.e.

$$\exists B \in \mathrm{GL}_n(K) \quad \text{et} \quad \tilde{\rho} : H \rightarrow \mathrm{GL}_n(k) \quad / \quad B\rho B^{-1}$$

c'est à dire

$$\exists B \in \mathrm{GL}_n(K) \quad / \quad B\rho B^{-1} \in \mathrm{GL}_n(k) \quad (*) \quad ?$$

Cette condition implique que $\mathrm{tr}(\rho(h))$ appartient à k , **ce que nous supposons dorénavant**. Le groupe de Galois G de $K|k$ agit sur $\mathrm{GL}_n(K)$ et (donc) sur l'ensemble des représentations de H sur K . Pour tout s dans G ,

$$\mathrm{tr}(\rho^s(h)) = \mathrm{tr}(\rho(h))^s = \mathrm{tr}(\rho(h))$$

donc ρ et ρ^s ont même caractère, ce qui implique qu'elles sont équivalentes, d'où l'existence d'une matrice A_s dans $\mathrm{GL}_n(K)$ telle que

$$\rho^s = A_s \rho A_s^{-1}.$$

De plus, vu que $K^G = k$, la condition (*) se reformule en

$$\exists B / \forall s \in G, \quad B \cdot \rho = B^s \cdot \rho^s$$

en notant \cdot l'action par conjugaison, c'est à dire

$$\exists B / \forall s \in G, \quad B(B^s)^{-1} \cdot \rho = A_s \cdot \rho$$

La condition (*) est donc satisfaite dès lors que $s \rightarrow A_s$ est un 1-cobord de G dans $\mathrm{GL}_n(K)$, ce qui, en vertu du théorème 90 de Hilbert, équivaut au fait que ce soit un cocycle i.e. que

$$\mu : (s, t) \mapsto A_s A_t^s A_{st}^{-1}$$

soit constante et égale à la matrice identité. Comme ρ est irréductible, le lemme de Schur implique l'existence de scalaires $a_{s,t}$ dans K^* tels que $A_s A_t^s A_{st}^{-1} = a_{s,t} \mathbf{I}_n$ pour tous s et t et donc μ induit en fait un 2-cocycle (à vérifier) à valeurs dans K^* et donc une classe $[(s, t) \mapsto a_{s,t}]$ dans $H^2(K|k; K^*)$, dont la nullité implique la possibilité de descendre ρ à k .

Remarque 27. B. Conrad semble dire qu'il est vain d'espérer que la condition suffisante (*) soit nécessaire dans le cas où K est un corps de nombres (non-unicité de l'isomorphisme B ?).

Dans le cas où $k = \mathbb{R}$ et $K = \mathbb{C}$ nous disposons d'une caractérisation des représentations complexes provenant d'une représentation réelle :

Définition 28. L'indicateur de Schur de ρ est le réel $I(\rho)$ défini par

$$I(\rho) := \frac{1}{|H|} \sum_h \mathrm{tr}(\rho(h^2)).$$

Théorème 29 (Frobenius-Schur). $I(\rho)$ vaut 0, 1 ou -1 et ρ descend à \mathbb{R} si et seulement si $I(\rho) = 1$.

Remarque 30. Pour une démonstration du théorème, lier les valeurs de l'indicateur à l'existence d'une forme bilinéaire (symétrique/alternée) H -invariante sur l'espace sous-jacent à la représentation. (voir [8], puis Serre "Représentations linéaires des groupes finis" pour l'étape cruciale).

Exemple 31. Lorsque $H = Q := \{\pm 1, \pm i, \pm j \pm k\}$ est le groupe des quaternions, la représentation fidèle $\rho : Q \subset \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ induite par la multiplication à gauche dans \mathbb{H} (muni de sa structure de \mathbb{C} -espace vectoriel donné par la multiplication à droite de 1 et i) ne descend pas à \mathbb{R} (sinon $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}[Q]}(\mathbb{H}) = \mathbb{H}^{\mathrm{op}}$ ne serait pas à division). Les valeurs de la trace sont ± 2 et 0, et son indicateur vaut -1 . Le cocycle associé prend en effet la valeur -1 sur le générateur de G .

Questions :

- Formules générales pour caractériser l'obstruction à la descente ?
- $H^2(\mathbb{C}|\mathbb{R}; \mathbb{C}^*)$ est cyclique d'ordre 2, cela permet-il d'expliquer le "et seulement si" dans le théorème de Frobenius-Schur ?

2.3 Descente galoisienne d'une structure

Rappel : $K|k$ est une extension galoisienne finie de groupe de Galois G . La référence principale suivie est "Corps locaux" de Serre [2].

Dans la section précédente, nous avons rencontré un problème du type suivant :

PBM1 : Si $F := -\otimes_K : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ est un foncteur de changement de base, comment caractériser l'image essentielle de F ? En d'autres termes, pour tout objet d de \mathcal{D} , existe-t-il un objet c de \mathcal{C} tel que

$$F(c) = c \otimes K \xrightarrow{\cong} d \quad ?$$

Exemple 32. Lorsque \mathcal{C} (resp. \mathcal{D}) est la catégorie des représentations k -linéaires (resp. K -linéaires) d'un groupe fini H , cela donne lieu à la discussion de la section précédente, qui donne une réponse partielle dans le cas général (il suffit qu'une classe soit nulle dans le groupe de Brauer $H^2(G)$) et à une réponse complète pour l'extension $\mathbb{C}|\mathbb{R}$ donnée par le théorème de Frobenius-Schur.

Dans cette section, nous allons nous pencher sur le problème "dual" :

PBM2 : Comment caractériser la pré-image essentielle d'un objet d de \mathcal{D} ? En d'autres termes, étant donné un objet c de \mathcal{C} , quelles sont les classes d'isomorphismes d'objets c' tels que

$$c \otimes K = F(c) \stackrel{K}{\cong} F(c') = c' \otimes K$$

Définition 33. La classe d'isomorphisme (sur k) d'un tel objet c' s'appelle **une k -forme** de c (sur K).

Exemple 34. — Les k -formes d'espaces vectoriels sur k sont classifiées par leur dimension.

- La classification des k -formes d'un espace quadratique donnent lieu à des problèmes de difficulté variable. Le cas $K|k = \mathbb{C}|\mathbb{R}$ est classifié par le rang.
- Quid des espaces symplectiques?
- Les k -formes de l'algèbre de matrices $M_n(k)$ sont classifiées par le deuxième groupe de cohomologie galoisienne de k : ce fait sera établi dans la section suivante.

Idée : classifier les k -formes d'un objet c à l'aide d'un H^1 .

Pour tout k -espace vectoriel V , soit $V_K := V \otimes_k K$ le K -espace vectoriel obtenu par changement de base. Étant donné un tenseur x sur un tel V (i.e. un élément de $(V^*)^{\otimes m} \otimes V^{\otimes n}$ avec m et n entiers), notons $E(V, x, K)$ l'ensemble des classes d'équivalence de couples (V', x') tels qu'il existe un K -isomorphisme $f : (V'_K, x'_K) \cong (V_K, x_K)$ (pour la relation d'équivalence donnée par l'isomorphisme sur k). À un tel f est associée une 1-cochaîne

$$\theta(f) : s \in G \mapsto f s f^{-1} s^{-1} \in \text{Aut}(V_K, x_K)$$

Le but de cette section est d'établir le théorème suivant

Théorème 35. *L'application $f \mapsto \theta(f)$ induit une bijection*

$$E(V, x, K) \cong H^1(G; \text{Aut}(V_K, x_K))$$

Démonstration. — Bien définie.

- Injectivité : Soient $f : (V'_K, x'_K) \cong (V_K, x_K)$ et $g : (V''_K, x''_K) \cong (V_K, x_K)$ tels que $[\theta(f)] = [\theta(g)]$. Il s'agit de démontrer que (V'_K, x'_K) et (V''_K, x''_K) sont k -isomorphes. Or, $[\theta(f)] = [\theta(g)]$ signifie qu'il existe $b \in \text{Aut}(V_K, x_K)$ tel que

$$\forall s \in G, \quad \theta(f)_s = b \theta(g)_s (b^s)^{-1}$$

i.e.

$$\forall s \in G, \quad f(f^{-1})^s = b g (g^{-1})^s (b^{-1})^s = b g ((b g)^s)^{-1}$$

c'est à dire

$$\forall s \in G, \quad f(f^{-1})^s = b g (g^{-1})^s (b^{-1})^s = b g ((b g)^s)^{-1}$$

et donc

$$\forall s \in G, \quad (f^{-1} b g)^s = f^{-1} b g$$

ce qui démontre que $f^{-1} b g$ est un K -isomorphisme qui provient d'un k -isomorphisme par changement de base (théorème de Galois) et donc que (V', x') et (V'', x'') sont bien k -isomorphes.

- surjectivité : Soit $a : s \mapsto a_s$ un 1-cocycle à valeurs dans $\text{Aut}(V_K, x_K)$. Comme $\text{Aut}(V_K, x_K) \subset \text{GL}(V_K)$, le théorème de Hilbert 90 assure l'existence de b dans $\text{GL}(V_K)$ tel que

$$\forall s \in G, \quad a_s = b (b^s)^{-1}.$$

L'automorphisme b^{-1} induit un K -automorphisme de l'algèbre tensorielle de V_K noté encore b^{-1} : posons $y := b^{-1}(x_K)$. Alors, pour tout s dans G ,

$$y^s = (b^{-1}(x_K))^s = (b^s)^{-1}(s(x_K)) = (b^s)^{-1}(x_K) = b^{-1}a_s(x_K) = b^{-1}(x_K) = y$$

ce qui, par Galois I, implique l'existence de \tilde{x} dans V tel que $y = \tilde{x}_K$. Par construction, b est un K -isomorphisme de (V_K, \tilde{x}_K) dans (V_K, x_K) et

$$\theta(b) = a$$

□

Corollaire 36. $H^1(G, \text{Sp}(n, K)) = \{1\}$

Démonstration. Cela résulte du fait que deux formes alternées non dégénérées et de même rang sont équivalentes. □

Corollaire 37. Si $K|k = \mathbb{C}|\mathbb{R}$ et q est une forme quadratique non dégénérée de rang n sur \mathbb{C} , alors

$$|H^1(G, \text{O}(q))| = n + 1$$

Remarque 38. Les schémas $\text{spec}(k)$ et $\text{spec}(K)$ n'ont qu'un point. Les constructions précédentes se généralisent aux schémas (affines, quelconques) puis aux catégories fibrées et le problème de descente a été étudié dans ce contexte plus général¹ par Grothendieck (voir ses exposés au séminaire Bourbaki de 1960-).

2.4 k -formes d'une algèbre d'endomorphismes : le groupe de Brauer comme groupe de cohomologie

Rappels sur les algèbres centrales simples, notamment leurs caractérisations (Bourbaki VIII) :

Proposition 39. Une k -algèbre A est centrale simple si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

1. A est centrale et simple
2. il existe $K|k$ finie telle que A_K soit isomorphe à une algèbre de matrices
3. A_K est une algèbre de matrices lorsque K est la clôture de k .

Corollaire 40.

$$\text{Br}(k) = \cup_{K|k} \text{Br}(K|k)$$

où $\text{Br}(K|k)$ désigne l'ensemble des classes de k -formes d'algèbres centrales simples sur k qui deviennent isomorphes à une algèbre de matrices sur K .

Théorème 41. $\text{Br}(k) \cong H^2(k)$

Démonstration. Il s'agit de construire des isomorphismes

$$\text{Br}(K|k) \cong H^2(K|k)$$

fonctoriels en $K|k$. Soit $K|k$ finie. Alors,

$$\text{Br}(K|k) = \cup_n E(M_n(k), K)$$

La théorie de descente fournit un isomorphisme

$$\theta_n : E(M_n(k), K) \cong H^1(K|k; \text{Aut}(M_n(K))).$$

1. Qui fait intervenir la notion, jusqu'ici sans importance, de platitude.

Or, tout automorphisme de l'algèbre $M_n(K)$ est intérieur (c'est en fait le cas pour toute algèbre centrale simple) et le groupe $\text{Aut}(M_n(K)) \cong \text{PGL}_n(K)$ s'insère donc dans une suite exacte courte

$$\{*\} \rightarrow K^* \rightarrow \text{GL}_n(K) \rightarrow \text{PGL}_n(K) \rightarrow \{*\}$$

dont le connectant ∂ fournit une application

$$\partial : H^1(K|k; \text{Aut}(M_n(K))) \rightarrow H^2(K|k)$$

qui est injective par Hilbert 90.

Lemme 42. *Si n est supérieur à l'ordre de $G := \text{Gal}(K|k)$ alors ∂ est surjective.*

Démonstration. Démonstration du lemme. Il s'agit de démontrer que pour tout 2-cocycle $(s, t) \mapsto a_{s,t}$ à valeurs dans K^* , il existe $s \mapsto b_s$ à valeurs dans $\text{GL}_n(K)$ tel que

$$a_{s,t} = b_s b_t^s b_{st}^{-1} =: \partial(b)_{s,t} \quad (*).$$

Soit V le K -espace vectoriel de base $(e_s)_s$ et b_s l'automorphisme de V défini par $b_s e_t := a_{s,t} e_{st}$ pour tous s et t dans G . Alors, pour tout s, t et u dans G ,

$$b_s b_t^s e_u = \cdots = a_{s,t} b_{st} e_u$$

ce qui démontre que $b : s \mapsto b_s$ satisfait $(*)$. □

La composée de θ et ∂ fournit l'isomorphisme recherché pour n assez grand, qui passe ensuite à la limite sur K . □

2.5 Variétés de Severi-Brauer

Variétés de Severi-Brauer : ce sont les k formes d'un l'espace projectif sur k :

Définition 43. X est une **variété de Severi-Brauer** sur k s'il existe un entier n et une extension $K|k$ telle que

$$X_K \cong \mathbb{P}_n(K)$$

Proposition 44. *Toute conique non singulière de $\mathbb{P}_2(k)$ est une variété de Severi-Brauer de dimension 1. Une telle conique est K -isomorphe à $\mathbb{P}_1(K)$ si et seulement si elle admet un point sur K .*

Démonstration. Faire un dessin. Soit C est une conique admettant un point p sur K et soit D une droite ne contenant pas p . Le théorème de Bézout implique que pour tout point r de D , il existe au plus (et donc exactement) un point q de C tel que $(pq) \cap C = \{r\}$. Ceci fournit un isomorphisme entre $D \cong \mathbb{P}_1$ et C . Pour la réciproque, appeler un ami. □

Théorème 45. *Les variétés de Severi-Brauer sont classifiées par le groupe de Brauer.*

Démonstration. Cela résulte de la théorie de la descente après avoir remarqué que le groupe des automorphismes de \mathbb{P}_n est PGL_n . Si V est une variété de Severi-Brauer de dimension $n-1$ qui se décompose sur K , soit f un isomorphisme de V_K vers $\mathbb{P}_n(K)$ et posons

$$\forall s \in G, \quad \mu(V)_s := f s f^{-1} s^{-1} \in \text{Aut}(\mathbb{P}_n(K)) \cong \text{PGL}_n(K).$$

Alors, μ induit une bijection entre l'ensemble des classes de k -isomorphisme de variétés de Severi-Brauer de dimension $n-1$ qui se décomposent sur K et $H^1(K|k, \text{PGL}_n(K))$. En post-composant par le connectant de la suite longue associée à

$$\{1\} \rightarrow K^* \rightarrow \text{GL}_n(K) \rightarrow \text{PGL}_n(K) \rightarrow \{1\}$$

puis passant à la colimite sur n et sur K , nous obtenons une bijection (la surjectivité résulte de nouveau du lemme 42) :

$$\text{SB}(k) := \{V / V \text{ est de Severi-Brauer}\}_{\sim_k} \cong \cup_n H^1(\bar{k}|k, \text{PGL}_n(\bar{k})) \cong H^2(k) \cong \text{Br}(k)$$

□

Remarque 46. La bijection

$$\text{SB}(k) \cong \text{Br}(k)$$

devrait être un isomorphisme de groupes pour la structure de groupe induite sur $\text{SB}(k)$ par une certaine construction de nature “géométrique” (voir Qixiao Ma 2022)

Comme les classes d'équivalence d'algèbre centrales simples sont également classifiées par le groupe de Brauer, elles doivent correspondre de façon bi-univoque aux classes de variétés de Severi-Brauer. Le reste de cette section a pour but d'expliciter cette correspondance. Voici un ingrédient clef pour cela :

Lemme 47. Soit M est une matrice de $M_n(K)$. Alors, l'idéal à droite

$$M \cdot M_n(K)$$

est constitué des matrices dont les colonnes sont combinaisons linéaires de celles de M . En particulier,

$$\dim(M \cdot M_n(K)) = rn$$

en notant r le rang de M .

Soit A une k -algèbre centrale simple de dimension n^2 et V la sous-variété (fermée) de $\text{Gr}(n, A)$ des idéaux à droites de dimension n . Si A se décompose sur $K|k$, alors tout isomorphisme $f : A_K \cong M_n(K)$ fournit un isomorphisme, encore noté f

$$V_K = \{I \subset A_K / \dim(I) = n \text{ et } IA_K = I\} \cong \{J \subset M_n(K) / \dim(J) = n \text{ et } J \cdot M_n(K) = J\} \cong \mathbb{P}_{n-1}(K)$$

et donc une classe dans $H^2(k)$.

Théorème 48. La classe de A et celle de V se correspondent via les bijections

$$\text{Br}(k) \cong H^2(k) \cong \text{SB}(k)$$

définie précédemment.

Exemple 49. Une variété de Severi-Brauer de dimension 1 est représentable par une conique d'équation $ax^2 + by^2 = z^2$, qui correspond à l'algèbre quaternionique $H_{a,b}$ définie dans les exposés précédents (à deux signes près). L'unique classe non-nulle de $\text{Br}(\mathbb{R})$ est donc représentée par la conique d'équation $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ et l'algèbre des quaternions usuels $\mathbb{H}_{-1,-1}$.

Pour la culture :

Proposition 50. ([2])

- Une variété de Severi-Brauer est triviale si et seulement si elle admet un point rationnel
- Les diviseurs positifs appartenant à une classe de diviseurs rationnelle sur k forment une variété de Severi-Brauer
- Si deux variétés de Severi-Brauer sont birationnellement isomorphes, alors leurs algèbres centrales simples correspondantes engendrent le même sous-groupe du groupe de Brauer.²

Remarque 51. Mentionner la suite de Lichtenbaum.

Voir l'article de la Gazette sur la faisceautisation du groupe de Brauer (qui étend la définition du groupe de Brauer aux schémas), les algèbres d'Azuyama, le lien avec les perfectoides et les travaux de Scholze.

2.6 Théories de Kummer et d'Artin-Schreier

2.7 Exemple de groupes de Brauer

Suivre Serre [2] et commencer par déterminer la cohomologie du groupe profini \hat{Z} .

Proposition 52. Le groupe de Brauer d'un corps quasi-fini est nul.

Proposition 53. Le groupe de Brauer d'un corps complet pour une valuation discrète de corps résiduel quasi-fini est isomorphe à \mathbb{Q}/\mathbb{Z} .

Exemple 54. Le cas de \mathbb{Q}_p .

2. Réciproque non établie lorsque Serre écrit Corps Locaux

Références

- [1] Jean-Pierre Serre *Cours d'arithmétique*, 1970
- [2] Jean-Pierre Serre *Corps locaux*, 1968
- [3] Jean-Pierre Serre https://www.college-de-france.fr/sites/default/files/media/document/2023-03/1982-1983_serre.pdf 1982
- [4] Jean-Pierre Serre https://www.numdam.org/item/CJPS_1982__4_.pdf 1982
- [5] John Willard Milnor et Dale Husemoller *Symmetric bilinear forms*, Springer, 1973
- [6] Colmez Pierre *Eléments d'analyse et d'algèbre (et de théorie des nombres)*, Editions Ecole Polytechnique, 2009
- [7] Jacob Lurie, Dennis Gaitsgory <https://people.math.harvard.edu/~lurie/papers/tamagawa-abridged.pdf>
- [8] Brian Conrad <https://math.stanford.edu/~conrad/210BPage/handouts/realrep.pdf>