Objets cosimpliciaux, limites homotopiques

Notes d'exposé du groupe de travail
Topologie Algébrique

(Nantes)

Salim RIVIERE

Février 2011

1 Approche constructive

1.1 Objets simpliciaux et cosimpliciaux

1.1.1 Définitions

Définition 1.1.1 *La catégorie Δ est celle dont les objets sont les ensembles ordonnés $\underline{n} := \{0, 1, \cdots, n\}$ ($n \in \mathbb{N}$), et les morphismes sont les applications non décroissantes $\phi : \underline{n} \to \underline{m}$ i.e*

$$\forall i, j \in \underline{n} \quad , \quad i \leqslant j \Rightarrow \phi(i) \leqslant \phi(j)$$

Proposition 1.1.2 *Les morphismes de Δ sont engendrés par les applications $d_n^i : \underline{n\text{-}1} \to \underline{n}$ et $s_n^i : \underline{n\text{+}1} \to \underline{n}$ définies par*

$$d_n^i(j) := \begin{cases} j & si\ j < i \\ j+1 & sinon \end{cases}$$

et

$$s_n^i(j) := \begin{cases} j & si\ j \leqslant i \\ j-1 & sinon \end{cases}$$

pour tous n dans $\mathbb{N}$ et $0 \leqslant i \leqslant n$.

Définition 1.1.3 *Un objet **cosimplicial** d'une catégorie $\mathcal{C}$ est un foncteur (covariant)*

$$X : \Delta \to \mathcal{C}$$

*Un objet **simplicial** d'une catégorie $\mathcal{C}$ est un foncteur contravariant*

$$X : \Delta \to \mathcal{C}$$

c'est à dire un foncteur covariant $X : \Delta^{op} \to \mathcal{C}$.

Proposition 1.1.4 *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie. La donnée d'un objet simplicial $X : \Delta \to \mathcal{C}$ est équivalente à la donnée*

– *Pour tout entier n, d'un objet X_n de $\mathcal{C}$.*

– *Pour tous entiers n et j avec $0 \leqslant i \leqslant n$, de deux morphismes de $\mathcal{C}$*

$$d_i^n : X_n \to X_{n-1} \quad (si\ n \geqslant 1) \quad et \quad s_i^n : X_n \to X_{n+1}$$

tels que les ***relations simpliciales*** *suivantes soient vérifiées pour tout entier n strictement positif (lorsque cela a du sens) :*

$$\begin{array}{ll} d_i^n d_j^{n+1} = d_{j-1}^n d_i^{n+1} & si\ i < j \\ s_i^n s_j^{n-1} = s_j^n s_{i-1}^{n-1} & si\ i > j \\ d_i^n s_j^{n-1} = \begin{cases} s_{j-1}^{n-2} d_i^{n-1} & si\ i < j \\ id & si\ i = j\ ou\ i = j+1 \\ s_j^n d_{i-1}^{n-1} & si\ i > j+1 \end{cases} & \end{array}$$

De même la donnée d'un objet cosimplicial de $\mathcal{C}$ est équivalente à la donnée d'objets X^n de $\mathcal{C}$ pour tout entier n, ainsi que de morphismes $d_n^i : X^{n-1} \to X^n$ (pour $n \geqslant 1$) et $s_n^i : X^{n+1} \to X^n$ pour tout i dans $[|0, n|]$, assujettis aux ***relations cosimpliciales*** *suivantes :*

$$\begin{array}{ll} d_{n+1}^j d_n^i = d_{n+1}^i d_n^{j-1} & si\ i < j \\ s_{n-1}^j s_n^i = s_{n-1}^{i-1} s_n^j & si\ i > j \\ s_{n-1}^j d_n^i = \begin{cases} d_{n-1}^i s_{n-2}^{j-1} & si\ i < j \\ id & si\ i = j\ ou\ i = j+1 \\ d_{n-1}^{i-1} s_n^j & si\ i > j+1 \end{cases} & \end{array}$$

On notera un objet tel simplicial $((X_n)_{n\geqslant 0}, (d_i^n), (s_i^n))$.

1.1.2 Réalisation et Totalisation

Définition 1.1.5 *Un* ***espace topologique simplicial*** *(resp.* ***espace topologique cosimplicial****) est un objet simplicial (resp. cosimplicial) dans la catégorie* ***Top****. Le terme espace simplicial sera ici une abréviation du terme espace topologique simplicial.*

Définition 1.1.6 *Soit $X := ((X_n)_{n\geqslant 0}, (d_i^n), (s_i^n))$ un espace topologique simplicial. Sa* ***réalisation****, notée $|X|$ est l'espace topologique quotient :*

$$\coprod_{n\geqslant 0} X_n \times \Delta[n] \,/\sim$$

où la relation d'équivalence $\sim$ est celle engendrée par les relations suivantes :

$$(d_i^{n+1}x, y) \sim (x, d_{n+1}^i y) \quad \forall (x,y) \in X_{n+1} \times \Delta[n]$$

et

$$(s_i^{n-1}x, y) \sim (x, s_{n-1}^i y) \quad \forall (x,y) \in X_{n-1} \times \Delta[n]$$

pour tout entier $n \geqslant 1$.

Il est possible de définir la réalisation d'un espace simplicial comme le coégalisateur d'une paire d'applications continues :

Proposition 1.1.7 *Soit $X := ((X_n)_{n\geqslant 0}, (d_i^n), (s_i^n))$ un espace topologique simplicial. Définissions deux applications continues f et f'*

$$f, f' : \coprod_{\phi:\underline{m}\to\underline{n}} X_n \times \Delta[m] \to \coprod_{n\geqslant 0} X_n \times \Delta[n]$$

où les $\phi : \underline{m} \to \underline{n}$ parcourent toutes applications croissantes (des morphismes de Δ) de $\underline{m}$ dans $\underline{n}$ pour toutes les paires d'entiers (m, n) possibles. Ainsi, pour tout $\phi : \underline{m} \to \underline{n}$ et pour tout $(x, \bar{t})$ dans $X_n \times \Delta[m]$, posons

$$f((x, \bar{t})) := (x, \phi_*(\bar{t})) \in X_n \times \Delta[n]$$

et

$$f'((x, \bar{t})) := (\phi^*(x), \bar{t}) \in X_m \times \Delta[m]$$

où $\phi_* := \Delta(\phi)$ et $\phi^* := X(\phi) : X_n \to X_m$ est l'application induite par ϕ via le foncteur X. La réalisation de X est alors l'égaliseur de la paire de flèches (f, f') ainsi définie :

$$\coprod_{\phi:\underline{m}\to\underline{n}} X_n \times \Delta[m] \underset{f'}{\overset{f}{\rightrightarrows}} \coprod_{n\geqslant 0} X_n \times \Delta[n] \longrightarrow |X|$$

Cette définition de la réalisation d'un espace simplicial en terme de coégaliseur se "dualise" pour donner une définition de totalisation d'un espace cosimplicial en terme d'égaliseur :

Définition 1.1.8 *Soit $X := ((X^n)_{n\geqslant 0}, (d_n^i), (s_n^i))$ un espace cosimplicial. Définissons deux applications continues g et g'*

$$g, g' : \prod_{n\geqslant 0} Hom(\Delta[n], X^n) \to \prod_{\phi:\underline{m}\to\underline{n}} Hom(\Delta[m], X^n)$$

par leur composantes dans chacun des $Hom(\Delta[m], X^n)$ lorsque $\phi : \underline{m} \to \underline{n}$ décrit les morphismes de Δ. Ainsi pour un tel ϕ, et pour tout $f = (f^n)_{n\geqslant 0}$ dans $\prod_{n\geqslant 0} Hom(\Delta[n], X^n)$ la composante de $g(f)$ dans le facteur correspondant à ϕ est $g(f)_\phi := X(\phi) \circ f^m$ et celle de $g'(f)$, notée $g'(f)_\phi$ est $f^n \circ \Delta(\phi)$.

La totalisation de X, notée $\boldsymbol{tot}X$ est alors l'égaliseur de la paire de flèches parallèles (g, g') :

$$\boldsymbol{tot}X \longrightarrow \prod_{n\geqslant 0} Hom(\Delta[n], X^n) \underset{g'}{\overset{g}{\rightrightarrows}} \prod_{\phi:\underline{m}\to\underline{n}} Hom(\Delta[m], X^n)$$

C'est l'ensemble des familles d'applications continues $\{f_n : \Delta[n] \to X^n\}_{n\geqslant 0}$ telles que le diagramme

$$\begin{tikzcd} \Delta[m] \arrow[r, "\Delta(\phi)"] \arrow[d, "f^m"] & \Delta[n] \arrow[d, "f^n"] \\ X^m \arrow[r, "X(\phi)"'] & X^n \end{tikzcd}$$

commute pour tout morphisme $\phi : \underline{m} \to \underline{n}$ de la catégorie Δ.

1.2 Limites et colimites homotopiques dans *Top*

Nous allons maintenant associer à chaque diagramme de **Top** un espace simplicial dont la réalisation sera la colimite homotopique du diagramme de départ.

1.2.1 Définitions de *hocolim* et *holim*

Définition 1.2.1 *Soient $\mathcal{C}$ une catégorie et $\mathcal{D}$ une petite catégorie. Un **diagramme de forme $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{C}$** est un foncteur $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$.*

Définition 1.2.2 *Soit $\mathcal{D}$ une petite catégorie. Le **nerf** de $\mathcal{D}$, noté $N(\mathcal{D}) = ((N(\mathcal{D})_n)_{n\geqslant 0}, (d_i^n), (s_i^n))$ est l'ensemble simplicial défini par*

– *Pour tout entier n,*

$$N(\mathcal{D})_n := \left\{ c_0 \overset{\alpha_1}{\to} c_1 \overset{\alpha_1}{\to} \cdots \overset{\alpha_n}{\to} c_n \;/\; c_i \in Ob(\mathcal{D}) \;,\; \alpha_i \in Hom_{\mathcal{D}}(c_i, c_{i+1}) \right\}$$

c'est à dire que les n-simplexes de $N(\mathcal{D})$ sont les chaînes de n flèches composables de $\mathcal{D}$.

– *pour tous n et i entiers tels que $0 \leqslant i \leqslant n$, et pour tout n-simplexe $\sigma := c_0 \overset{\alpha_0}{\to} c_1 \overset{\alpha_1}{\to} \cdots \overset{\alpha_{n-1}}{\to} c_n$ dans $N(\mathcal{D})_n$,*

$$d_i^n(\sigma) := \begin{cases} c_0 \overset{\alpha_0}{\to} c_1 \overset{\alpha_1}{\to} \cdots \to c_{i-1} \overset{\alpha_i \alpha_{i+1}}{\to} c_{i+1} \to \cdots \overset{\alpha_n}{\to} c_n & si\ 0 < i < n \\ c_1 \overset{\alpha_2}{\to} c_2 \to \cdots \to c_{n-1} \overset{\alpha_n}{\to} c_n & si\ i = 0 \\ c_0 \overset{\alpha_1}{\to} c_1 \to \cdots \to c_{n-2} \overset{\alpha_{n-1}}{\to} c_{n-1} & si\ i = n \end{cases}$$

et

$$s_i^n(\sigma) := c_0 \overset{\alpha_1}{\to} c_1 \to \cdots \overset{\alpha_i}{\to} c_i \overset{Id}{\to} c_i \to \cdots \to c_{n-1} \overset{\alpha_n}{\to} c_n$$

Ceci va nous permettre d'associer un espace simplicial à tout diagramme dans **Top** :

Définition 1.2.3 *Soient $\mathcal{D}$ une petite catégorie et $F : \mathcal{D} \to$ **Top** un diagramme de forme $\mathcal{D}$ dans **Top**. Le **remplacement simplicial** de F est l'espace simplicial $\amalg F = (((\amalg F)_n)_{n\geqslant 0}, (d_i^n), (s_i^n))$ défini par*

– *Pour tout entier n,*

$$(\amalg F)_n := \coprod_{\substack{c_0 \overset{\alpha_1}{\to} c_1 \cdots \overset{\alpha_n}{\to} c_n \\ \in N(\mathcal{D})_n}} F(c_0)$$

– *pour tous entiers n et i tels que $0 \leqslant i \leqslant n$, et pour tout n-simplexe (du nerf $N(\mathcal{D})_n$) $\sigma := c_0 \overset{\alpha_1}{\to} c_1 \cdots \overset{\alpha_n}{\to} c_n$, d_i^n restreinte au facteur $F(c_0)_\sigma$ associé à σ est*
  – *l'identité de $F(c_0)_\sigma$ dans $F(c_0)_{d_i\sigma} \subset (\amalg_* F)_{n-1}$ si $i > 0$*
  – *l'application $F(\alpha_1) : F(c_0)_\sigma \to F(c_1)_{d_0\sigma} \subset (\amalg_* F)_{n-1}$ si $i = 0$.*

  et l'application s_i^n restreinte au facteur $F(c_0)_\sigma \subset (\amalg_* F)_n$ associé à σ est l'identité de $F(c_0)$ dans $F(c_0)_{s_i^n\sigma}$.

Ce qui nous conduit à définir la colimite homotopique d'un diagramme de forme $\mathcal{D}$

Définition 1.2.4 *Sous les hypothèses de la définition précédente, la colimite homotopique du diagramme F, notée **hocolim**F, est définie par*

$$\textbf{\textit{hocolim}}F := |\amalg_* F|$$

Une construction analogue permet de définir la limite homotopique d'un diagramme dans ***Top*** :

Définition 1.2.5 *Soient $\mathcal{D}$ une petite catégorie et $F : \mathcal{D} \to$ **Top** un diagramme. Le remplacement cosimplicial de F est l'espace cosimplicial $\Pi^*F = (((\Pi^*F)^n)_{n\geqslant 0}, (d_n^i), (s_n^i))$ défini par :*

- *Pour tout entier n,*

$$(\Pi^*F)^n := \prod_{\substack{c_0 \xrightarrow{\alpha_1} c_1 \cdots \xrightarrow{\alpha_n} c_n \\ \in N(\mathcal{D})_n}} F(c_n)$$

- *Pour tous n et i entiers tels que $0 \leqslant i \leqslant n$, et pour tout n-simplexe $\sigma := c_0 \xrightarrow{\alpha_1} c_1 \cdots \xrightarrow{\alpha_n} c_n$ de $N(\mathcal{D})_n$, la composante de $d_n^i : (\Pi^*F)^{n-1} \to (\Pi^*F)^n$ dans le facteur $F(c_n)_\sigma$ de $(\Pi^*F)^n$ associé à σ est*
  - *la composée de la projection $p_{d_i\sigma}(\Pi^*F)^{n-1} \to F(c_n)_{d_i\sigma}$ sur le facteur $F(c_n)_{d_i\sigma}$ associé à $d_i\sigma$ et de l'identité de $F(c_n)_{d_i\sigma}$ dans $F(c_n)_\sigma$ lorsque $i < n$,*
  - *la composée de la projection $p_{i,\sigma}(\Pi^*F)^{n-1} \to F(c_{n-1})_{d_i\sigma}$ sur le facteur $F(c_{n-1})_{d_i\sigma}$ associé à $d_i\sigma$ suivie de l'application identité de $F(c_{n-1})_{d_i\sigma}$ dans $F(c_{n-1})_\sigma$ postcomposée enfin avec l'application $F(\alpha_n) : F(c_{n-1})_\sigma \to F(c_n)_\sigma$ lorsque $i = n$.*

  Et la composante de $s_n^i : (\Pi^*F)^{n+1} \to (\Pi^*F)^n$ dans le facteur $F(c_n)_\sigma$ de $(\Pi^*F)^n$ associé à σ est la composée de la projection $p_{s_i\sigma}$ sur le facteur $F(c_n)_{s_i\sigma}$ associé au $n+1$ simplexe $s_i\sigma$, et de l'identité de $F(c_n)_{s_i\sigma}$ dans $F(c_n)_\sigma$.

ce qui conduit à

Définition 1.2.6 *Sous les hypothèses précedentes, la **limite homotopique** du diagramme F est l'espace topologique noté **holim**F défini par*

$$\textbf{\textit{holim}}F := \textbf{\textit{tot}}\Pi^*F$$

1.2.2 Deux exemples : Le push-out et le pull-back homotopiques

Une colimite homotopique : le push-out homotopique :

Notons $\mathcal{D}$ la catégorie à trois objets a, b et c et deux morphismes f, g qui ne sont pas des identités, représentée par le diagramme

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r] \arrow[d] & b \\ c & \end{tikzcd}$$

où l'on n'a pas fait figurer les identités. Un diagramme F de forme $\mathcal{D}$ dans ***Top*** n'est rien d'autre qu'une donnée de push-out

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \\ C & \end{tikzcd}$$

où $A := F(a)$, $B := F(b)$ et $C := F(c)$ sont des espaces topologiques, et $f := F(a \to b)$, $g : F(a \to c)$ des applications continues. Alors, le remplacement simplicial de F vérifie :

$$(\amalg_* F)_0 = A \coprod B \coprod C$$

et

$$(\amalg_* F)_1 = A_f \coprod A_g \coprod \{\text{1-simplexes dégénérés}\}$$

où l'on a noté A_f (resp. A_g) le terme A associé au 1-simplexe $a \to b$ (resp. $a \to c$) de $N(\mathcal{D})_1$. Les simplexes des $(\amalg_* F)_n$ sont tous dégénérés pour $n \geqslant 2$. La réalisation de $\amalg_* F$ est alors l'espace topologique quotient

$$\mathbf{hocolim} F = A \coprod B \coprod C \coprod (A_f \times I) \coprod (A_g \times I) / \sim$$

où I désigne l'intervalle $[0,1]$ identifié à $\Delta[1]$ et la relation d'équivalence $\sim$ est définie par

$$\forall x \in A, \quad B \ni f(x) \sim (x,1) \in A_f \times I \quad \text{et} \quad C \ni g(x) \sim (x,1) \in A_g \times I$$

et

$$\forall x \in A, \quad A \ni x \sim (x,0) \in A_f \times I \quad \text{et} \quad A \ni x \sim (x,0) \in A_g \times I.$$

Le push-out homotopique du diagramme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "g"'] & B \\ C & \end{tikzcd}$$

s'identifie donc à l'union du cylindre $A \times I$ et des espaces B et C ou les points d'une des faces planes de du cylindre ont été recollés à leur image dans B via f et ceux de l'autre face ont été recollés à leur image dans C.

Un exemple de limite homotopique : le pull-back homotopique .

Considérons ici la catégorie $\mathcal{D}^{op}$ représentée par le diagramme

$$\begin{tikzcd} & b \arrow[d] \\ c \arrow[r] & a \end{tikzcd}$$

Un diagramme G de forme $\mathcal{D}^{op}$ est alors une donnée de pull-back :

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, "f"] \\ C \arrow[r, "g"'] & A \end{tikzcd}$$

Le remplacement cosimplicial Π^*G vérifie ainsi

$$(\Pi^*G)^0 = A \times B \times C$$

et

$$(\Pi^*G)^1 = A^f \times A^g \times \prod \{\text{facteurs provenant des identités}\}$$

et tous les n-simplexes sont dégénérés pour $n \geqslant 2$. La totalisation de Π^*G, i.e **holim**G, s'identifie au sous-espace de $A \times B \times C \times Hom(I, A^f) \times Hom(I, A^g)$ constitué des quintuplets (a, b, c, α, β) tels que

$$\alpha(0) = f(b) \quad \text{et} \quad \alpha(1) = \beta(0) = a \quad \text{et} \quad \beta(1) = g(c)$$

2 Limites et colimites homotopiques dans les catégories de modèles

2.1 Catégorie homotopique associée à une catégorie de modèles, foncteurs dérivés

2.2 push-out et pull-back homotopiques