UNIVERSITÉ DE NANTES
FACULTÉ DES SCIENCES ET TECHNIQUES

ÉCOLE DOCTORALE SCIENCES ET TECHNOLOGIES DE L'INFORMATION ET DES MATHÉMATIQUES

Année : 2012

N° attribué par la bibliothèque universitaire

Sur l'isomorphisme entre les cohomologies de Chevalley-Eilenberg et de Hochschild

THÈSE DE DOCTORAT

Spécialité : MATHÉMATIQUES

Présentée et soutenue publiquement par

Salim RIVIÈRE

le 7 décembre 2012, devant le jury ci-dessous

Président du jury :
Rapporteurs :

Examinateurs :

Directeur de thèse : Friedrich WAGEMANN Maître de conférences (Université de Nantes)

Laboratoire : Laboratoire Jean Leray

Table des matières

Notations

$\mathbb{K}$ est un anneau commutatif unitaire souvent égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Le symbole Σ_n désigne le n-ième groupe symétrique (groupe des permutations de l'ensemble ordonné $\{1, 2, \cdots, n\}$). La signature sgn est l'unique morphisme de groupe non trivial sgn : $\Sigma_n \to \{-1, 1\}$. Le k-cycle qui envoie a_i sur a_{i+1} pour $1 \leq i \leq k-1$ et a_k sur a_1 sera noté $(a_1, a_2, \cdots, a_k)$. Si G est un groupe, $\mathbb{K}G$ est l'algèbre de groupe [1] de G. Si M est une variété différentiable, $\mathcal{C}^\infty(M)$ désigne la $\mathbb{R}$-algèbre des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur M.

1. Voir appendice B.

Introduction

Soient $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie libre sur un anneau commutatif $\mathbb{K}$, $U\mathfrak{g}$ son algèbre universelle enveloppante, et M un $U\mathfrak{g}$-bimodule dont on note M^{ad} le $\mathfrak{g}$-module à droite adjoint associé. Il est bien connu, depuis les travaux de H. Cartan et S. Eilenberg [CE56], que l'application d'antisymétrisation

$$\begin{array}{rcl} F_* : C_*(\mathfrak{g}; M^{ad}) & \to & CH_*(U\mathfrak{g}; M) \\ m \otimes g_1 \wedge \cdots \wedge g_n & \mapsto & \displaystyle\sum_{\sigma \in \Sigma_n} \operatorname{sgn}(\sigma) m \otimes g_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes g_{\sigma(n)} \end{array} \tag{0.0.1}$$

du complexe de Chevalley-Eilenberg de $\mathfrak{g}$ à coefficients dans M^{ad}, et à valeurs dans le complexe de Hochschild à coefficients dans M de l'algèbre associative $U\mathfrak{g}$, induit un isomorphisme

$$H_*(F_*) : H_*(\mathfrak{g}; M^{ad}) \cong HH_*(U\mathfrak{g}; M) \tag{0.0.2}$$

entre l'homologie de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et l'homologie de Hochschild de son algèbre enveloppante, ici notée $HH_*(U\mathfrak{g}; M)$. Le résultat reste vrai en cohomologie . Le but de cette étude est d'apporter une réponse à la question suivante, au moins lorsque $\mathbb{K}$ est le corps des réels :

Question 0.0.1. *Existe-t-il une application linéaire*

$$G_* : CH_*(U\mathfrak{g}; M) \to C_*(\mathfrak{g}; M^{ad}) \,,$$

definie au niveau des complexes de chaînes, telle que l'application induite en homologie $H_*(G_*)$: $HH_*(U\mathfrak{g}; M) \to H_*(\mathfrak{g}; M^{ad})$ soit l'inverse de l'application d'antisymétrisation $H_*(F_*)$?
Si oui, est-il possible d'obtenir une formule explicite pour G_*, comme dans le cas de F_* ?

Dans le cas où l'anneau de base $\mathbb{K}$ est un corps, il est clair qu'un tel G_* existe puisque qu'il suffit de le construire degré par degré en choisissant un supplémentaire de l'espace des n-bords dans celui des n-cycles pour chaque entier n. Par contre, il n'est *a priori* pas évident qu'un tel G_* puisse être défini par une formule intrinsèque ne nécessitant pas le choix de bases des espaces considérés.

Lorsque l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est abélienne, l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{g}$ s'identifie à l'algèbre symétrique $S\mathfrak{g}$ et l'isomorphisme

$$H_*(F) : H_*(\mathfrak{g}; S\mathfrak{g}) = S\mathfrak{g} \otimes \Lambda^n \mathfrak{g} \to HH_*(S\mathfrak{g}; S\mathfrak{G})$$

peut-être vu comme une version polynomiale du théorème de Hochschild-Kostant-Rosenberg ([Lod98]) qui identifie les formes de Kähler sur une algèbre commutative lisse A aux groupes d'homologie de Hochschild de A, ouvrant la voie à une nouvelle géométrie dite *non-commutative*, dans laquelle le rôle du complexe de De Rham (resp. de la cohomologie de De Rham) est joué par l'homologie de Hochschild (resp. l'homologie cyclique).

De plus, l'homologie de Hochschild admet une interprétation en terme de foncteur dérivé, et le quasi-isomorphisme (0.0.1) provient du choix de deux résolutions particulières du $U\mathfrak{g}$-bimodule $U\mathfrak{g}$ pour son calcul : la résolution bar et celle de Koszul. Dans [Con85], A. Connes explique comment construire géométriquement la résolution de Koszul $CK_*(A)$ du A-bimodule A, lorsque $A := \mathcal{C}^\infty(V)$ est l'algèbre des fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur une varieté lisse compacte V. Celle-ci est obtenue en degré n comme l'espace des sections $\mathcal{C}^\infty$ du tiré en arrière par la projection sur le deuxième facteur $\mathrm{pr}_2 : V \times V \to V$ de la n-ième puissance extérieure du fibré cotangent complexifié de V i.e

$$CK_n(A) := \Gamma^\infty(V \times V; E_n)$$

où $E_n := \mathrm{pr}_2^*(\Lambda^n T^*_{\mathbb{C}} V)$. La différentielle $d^K : CK_n(A) \to CK_{n-1}(A)$, de degré -1, est le produit intérieur i_X des formes différentielles par un certain champ de vecteur X sur $V \times V$ défini sur un voisinage de la diagonale de $V \times V$ à l'aide d'une connection sur V. La contractibilité du complexe $(CK(A), d^K)$ est alors démontrée en exhibant une contraction de degré $+1$ $s : CK_*(A) \to CK_{*+1}(A)$, définie de manière analogue à celle du lemme de Poincaré (qui est, elle, de degré -1). L'auteur en déduit alors un isomorphisme

$$F^* : HH^c_*(A; A^\vee) \xrightarrow{\cong} D^*(V)$$

entre la cohomologie de Hochschild continue de $A = \mathcal{C}^\infty(V)$ à valeurs dans son dual $A^\vee$ calculée à l'aide du complexe de Hochschild continu usuel, et l'espace $D^*(V)$ des courants de De Rham sur V, qui peut être vu comme une version cohomologique continue de l'isomorphisme d'antisymétrisation du théorème de Hochschild-Kostant-Rosenberg.

Remarquons que si V est un groupe de Lie, il existe une connection canonique donnée par les translations à gauche. Le cas $V = (\mathbb{R}^m, +)$ est traité dans [Mar05] : M. Bordemann, G. Ginot, G. Halbout, H-C Herbig, et S. Waldmann y appliquent la constrution précédente pour obtenir un contraction h^K de la résolution de Koszul continue $CK^c_*(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m)) := \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^{2m}) \otimes \mathbb{R}^{m\vee}$, et déduisent de cette contraction un morphisme de résolutions

$$G^B_* : (B^c_*(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m)), d^B) \to (CK^c_*(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m)), d^K)$$

au-dessus de l'application identité de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$, où $(B^c_*(\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m)), d^B)$ désigne la résolution bar continue usuelle de l'algèbre topologique $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$. Plus précisément, G_* est donnée en degré n par la formule

$$G^B_n(\phi)(a,b) = \sum_{i_1,\cdots,i_n=1}^{m} e_{i_1} \wedge \cdots \wedge e_{i_n} \int_0^1 dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \cdots \int_0^{t_{n-1}} dt_n \frac{\partial^n \phi}{\partial x^1_{i_1} \cdots x^n_{i_n}}(a, t_1 a + (1-t_1)b, \cdots, t_n a + (1-t_n)b, b)$$

pour toute chaîne ϕ dans $B_n^c(\mathcal{C}^\infty(V)) := \mathcal{C}^\infty(V^{\times(n+2)m})$ et pour tous a et b dans $\mathbb{R}^m$. Ici, e^1, ..., e^m désigne la base duale de la base canonique de $\mathbb{R}^m$. En fait, le morphisme de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$-bimodules G_* vérifie

$$G_{n+1}^B(1 \otimes f_1 \otimes \cdots f_n \otimes 1) = h^K \circ G_n \circ d^B(1 \otimes f_1 \otimes \cdots f_n \otimes 1) \tag{0.0.3}$$

pour toutes fonctions f_1, ..., et f_n dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$, et *cette condition le détermine entièrement* une fois fixé G_0^B. Les auteurs montrent ensuite que l'application induite par G_*^B après tensorisation par $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ au-dessus de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^m)$ fournit bien un inverse de l'application d'antisymétrisation de Hochschild-Kostant-Rosenberg en homologie continue, identifiant ainsi les formes différentielles sur $\mathbb{R}^m$ à un rétract par déformation du complexe d'homologie de Hochschild continue à coefficients dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Dans le cas 0.0.1 qui nous occupe, l'application G_* recherchée devrait provenir d'un morphisme de résolutions G_*^B de la résolution bar vers celle de Koszul, non pas de l'algèbre des fonctions sur un groupe de Lie, mais de l'algèbre enveloppante $U\mathfrak{g}$ d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$. Or, il est bien connu ([Ser06]) que lorsque $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie de dimension finie sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $U\mathfrak{g}$ s'interprète comme la bigèbre des distributions ponctuelles supportées en l'élément neutre sur le groupe de Lie connexe et simplement connexe qui intègre $\mathfrak{g}$. Ainsi, pour pouvoir transposer au cas de l'algèbre enveloppante $U\mathfrak{g}$ la construction de G_*^B de [Mar05] associée à la contraction h_K via (0.0.3), il nous faut dualiser et localiser en l'élément neutre l'interprétation géométrique de la résolution de Koszul donnée dans [Con85].

La suite de ce manuscrit est divisée en trois chapitres que nous allons maintenant décrire brièvement.

Chapitre 1

Après avoir rappelé les définitions des différents complexes de chaînes en jeu, nous décrivons les grandes lignes de la démonstration du caractère bijectif de l'isomorphisme d'antisymétrisation (0.0.2) donnée dans [CE56]. Une première étape, qui consiste à comparer les résolutions projective de l'anneau de $\mathbb{K}$ dans la catégorie des $U\mathfrak{g}$-modules et celles de $U\mathfrak{g}$ dans la catégorie des $U\mathfrak{g}$-bimodules, est donnée par le premier point du théorème 1.1.9, lui-même conséquence d'un principe plus général dit de "changement d'anneau". Ensuite, il s'agit de voir que l'application d'antisymétrisation $F_* : C_*(\mathfrak{g}, M^{ad}) \to CH_*(U\mathfrak{g}; M)$ donnée en (0.0.1) provient effectivement d'un morphisme de résolutions $F^K : CK(U\mathfrak{g}) \to B_*(U\mathfrak{g})$, de la résolution de Koszul $CK_*(U\mathfrak{g})$ de $U\mathfrak{g}$ obtenue en tensorisant celle de Chevalley-Eilenberg de $\mathbb{K}$ par $U\mathfrak{g}^e := U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g}^{op}$ au-dessus de $U\mathfrak{g}$, vers la résolution bar usuelle de $U\mathfrak{g}$, notée $B_*(U\mathfrak{g})$. Le lemme fondamental 1.2.1, qui assure que le calcul des foncteurs dérivés de foncteurs additifs ne dépend pas du choix des résolutions projectives employées, permet non seulement d'établir que l'application d'antisymétrisation F_* est un quasi-isomorphisme, mais également que tout morphisme de résolutions $G_*^B : B_*(U\mathfrak{g}) \to CK_*(U\mathfrak{g})$ en induira un quasi-inverse. La dernière section de ce chapitre s'attache à détailler la construction d'un tel G_*^B par la méthode de [Mar05] évoquée précédemment, lorsque l'on suppose l'existence d'une contraction h de la résolution de Koszul.

Chapitre 2

Dans ce chapitre, nous produisons une interprétation géométrique de la *résolution* de Chevalley-Eilenberg $C_*(\mathfrak{g}) := C_*(\mathfrak{g}; U\mathfrak{g})$ de $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, analogue à celle de la résolution de Koszul de l'algèbre de fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur une varieté compacte donnée dans [Con85], lorsque $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie réelle de dimension finie. $C_*(\mathfrak{g})$ apparaît alors comme un sous-complexe du complexe des courants ponctuels supportés en l'élément neutre sur le groupe de Lie connexe simplement connexe d'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, sur lequel la contraction de Poincaré $s^\vee$, duale de celle bien connue sur les germes de formes, se restreint en une contraction $s : C_*(\mathfrak{g}) \to C_{*+1}(\mathfrak{g})$. Ces deux points correspondent respectivement aux propositions 2.1.8 et 2.1.21. De plus, la proposition 2.1.21 donne une expression intrinsèque (2.1.7) de s, faisant intervenir la contraction canonique ϕ_t et le coproduit de l'algèbre de Hopf $U\mathfrak{g}$. La section 2.2 qui suit se divise en deux sous-sections : la première explique comment transférer l'homotopie s en une contraction $h : CK_*(U\mathfrak{g}) \to CK_{*+1}(U\mathfrak{g})$ de la résolution de Koszul. et la seconde montre que la formule (2.2.3) qui définit h fait encore sens en dimension quelconque, ce qui permet d'oublier l'hypothèse de finitude de la dimension de $\mathfrak{g}$.

Chapitre 3

Le troisième et dernier chapitre comprend deux sections distinctes mais liées. La première tente d'expliciter en petits degrés le morphisme de résolutions $G_*^B : B_*(U\mathfrak{g}) \to CK_*(U\mathfrak{g})$ obtenu à partir de la contraction h du chapitre 2 en appliquant la stratégie développée au 1.2.3, i.e les formules (1.2.6) ou (0.0.3).

La seconde commence par l'étude d'un diagramme commutatif de la forme

$$\begin{tikzcd} & C^*_{loc}(G;\mathbb{R}) \arrow[d, "T'"'] \arrow[dr, "T"] & \\ C_*(\mathfrak{g};\mathbb{R}) \arrow[ur, "I"] \arrow[r, "G^*"'] & CH_*(U\mathfrak{g};\mathbb{R}) \arrow[r, "F^*"'] & C_*(\mathfrak{g};\mathbb{R}) \end{tikzcd} \tag{0.0.4}$$

où G est un groupe de Lie intégrant $\mathfrak{g}$, $C_{loc}(G;\mathbb{R})$ désigne l'espace des cochaines de groupe sur G lisses au voisinage de l'élément neutre e de G, et le morphisme de complexes de cochaînes $T : C^*_{loc}(G;\mathbb{R}) \to C_*(\mathfrak{g};\mathbb{R})$ (resp. $I : C_*(\mathfrak{g};\mathbb{R}) \to C^*_{loc}(G;\mathbb{R})$) est le morphisme de dérivation (resp. d'intégration) des cochaînes de groupe lisses au voisnage de e (resp. des cochaînes d'algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$) en cochaînes d'algèbre de Lie (resp. de groupe, lisses au voisinage de e) défini, par exemple, dans [Nee04]. Le morphisme $G^* : C^*(\mathfrak{g};\mathbb{R}) \to CH_*(U\mathfrak{g};\mathbb{R})$ induit par G_*^B, et l'application d'antisymétrisation des cochaînes F^* apparaissent alors, via T', comme les pendants algébriques respectifs de I et T. Ce constat permet alors d'intuiter, à l'aide de la formule d'intégration cubique des cochaînes de Lie $I = I_c$ donnée au lemme cubique, une formule explicite (sans récurrence sur le degré) et compacte pour G_*^B et G^* : c'est le contenu de la proposition 3.2.8. Ce chapitre se termine par une tentative de construction purement algébrique du diagramme (0.0.4), où le rôle du groupe de Lie G intégrant $\mathfrak{g}$ est joué par le groupe $\hat{G}$ des éléments de type groupe du completé $\hat{U\mathfrak{g}}$ de $U\mathfrak{g}$ pour la topologie donnée par l'idéal d'augmentation. Les conditions de continuité et de lissité des cochaînes qui sont introduites au 3.2.2, bien que très restrictives, sont automatiquement vérifiées dès lors que l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ est nilpotente.

L'auteur de cette thèse tient à remercier chaleureusement M. Bordemann qui, par ses conseils avisés et ses indications éclairantes, est à l'origine de la plupart des idées présentées ici, notamment en ce qui concerne la stratégie de construction du quasi-inverse G^* développée au 1.2.3, et le recours aux éléments de type groupe de l'algèbre enveloppante complétée pour intuiter la formule intinsèque (2.1.7) définissant la contraction s de la résolution de Chevalley-Eilenberg établie en section 2.1.2.

Chapitre 1

Énoncé du problème et stratégie de résolution

1.1 Sens direct : l'application d'antisymétrisation de Cartan-Eilenberg

Dans cette section, nous allons rappeler brièvement la définition des complexes de chaînes mis en jeu, puis rappeler les grandes lignes de la démonstration du fait que l'application d'antisymétrisation soit un quasi-isomorphisme. La démarche suivie est celle de [CE56] car elle permet de répondre immédiatement à la première partie de la question 0.0.1 et d'intuiter une stratégie de construction d'un quasi-inverse. Une autre démonstration, faisant notament appel aux suites spectrales, est donnée dans [Lod98].

1.1.1 Complexes de Hochschild et de Chevalley-Eilenberg

Commençons par un rappel rapide de quelques définitions et proprietés. Pour plus de précisions, le lecteur pourra consulter [Wei95], [Lod98], [CE56] ou [Lan75]. Les versions cohomologiques des complexes présentés ici sont présentées dans l'appendice B.

Homologie de Hochschild

Dans toute cette sous-section, A est une algèbre associative, unitaire et projective sur un anneau commutatif $\mathbb{K}$ et M est un A-bimodule. La notation A^{op} désigne l'algèbre opposée de A et $A^e := A \otimes A^{op}$ est son algèbre enveloppante. Rappelons qu'un A-bimodule est la même chose qu'un A^e-module à gauche.

Définition 1.1.1. *Le **complexe d'homologie de Hochschild** de A à coefficients dans M, est le $\mathbb{K}$-module gradué $CH_*(A; M)$ défini par*

$$CH_n(A; M) := M \otimes A^{\otimes n}$$

pour tout entier n, muni de la différentielle d^H de degré $+1$, définie en degré n par

$$d^H(m \otimes a_1 \otimes \cdots a_n) := ma_1 \otimes a_2 \otimes \cdots a_n + \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n \\ + (-1)^n a_n m \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_{n-1}$$

pour tous m dans M et a_1, ..., a_n dans A. L'homologie de Hochschild $HH_*(A; M)$ de A à coefficients dans M est l'homologie de ce complexe i.e

$$HH_*(A; M) := H_*(CH_*(A; M), d^H)$$

De la même manière (voir Appendice B ou [Lod98]), il est possible de définir le complexe de cohomologie de Hochschild de A à valeurs dans M, noté $CH^*(A; M)$, muni de la différentielle d_H, dont l'homologie $HH^*(A; M)$ s'appelle la cohomologie de Hochschild de A à valeurs dans M.

L'homologie de Hochschild de A s'interprète comme un foncteur dérivé, et ceci passe par l'introduction d'une résolution particulière du bimodule A :

Définition 1.1.2. *La **bar-résolution de** A est le complexe de A-bimodules $B_*(A)$ défini par*

$$B_n(A) := A^{\otimes n+2}$$

pour tout entier n, muni de la différentielle d^B définie par

$$d^B(a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_n \otimes a_{n+1}) := \sum_{i=0}^{n} (-1)^i a_0 \otimes a_1 \otimes \cdots \otimes a_i a_{i+1} \otimes a_{i+1} \otimes \cdots \otimes a_n$$

pour tous a_0, ..., a_{n+1} dans A.

Proposition 1.1.3. *La bar-résolution de A est une résolution projective (consulter [CE56] pour la définition de résolution projective) du A^e-module à gauche A et l'isomorphisme de modules gradués évident*

$$M \otimes_{A^e} B_*(A) \cong CH_*(A; M)$$

fait correspondre les différentielles $Id_M \otimes d^B$ et d^H. Ainsi

$$HH_*(A; M) = \mathrm{Tor}_*^{A^e}(A; M)$$

et de même

$$HH^*(A; M) = \mathrm{Ext}_{A^e}^*(A; M)$$

Démonstration. Voir [Lod98]. □

Homologie des algèbres de Lie

Dans cette sous-section, $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie sur un anneau commutatif $\mathbb{K}$, et N (resp. N') est un $\mathfrak{g}$-module à droite (resp. à gauche) (voir [Wei95] pour une définition de module sur une algèbre de Lie). Introduisons tout d'abord succintement la notion d'algèbre enveloppante universelle de $\mathfrak{g}$ qui va jouer un rôle central dans la suite, et dont les proprietés seront détaillées ultérieurement, notamment au chapitre 2 :

Définition 1.1.4. ***L'algèbre enveloppante universelle de*** $\mathfrak{g}$ *(abregée en* ***algèbre enveloppante*** *de* $\mathfrak{g}$ *dans la suite), notée* $U\mathfrak{g}$*, est le quotient de l'algèbre tensorielle* $T\mathfrak{g} := \oplus_{n\geq 0}\mathfrak{g}^{\otimes n}$ *sur le* $\mathbb{K}$*-module* $\mathfrak{g}$ *par l'idéal* I *engendré par les éléments de la forme* $g\otimes g' - g'\otimes g - [g,g']$ *lorsque* g *et* g' *parcourent* $\mathfrak{g}$*, i.e*

$$U\mathfrak{g} := T\mathfrak{g}/_I \quad , \quad I := < g\otimes g' - g'\otimes g - [g,g'] \;/\; g,g' \in \mathfrak{g} >$$

La multiplication sur $U\mathfrak{g}$*, notée* μ*, est induite par le produit de concaténation de* $T\mathfrak{g}$*, et l'on notera* $xy := \mu(x\otimes y)$ *le produit de deux éléments* x *et* y *de* $U\mathfrak{g}$*. L'unité* $\eta : \mathbb{K} \to U\mathfrak{g}$ *provient de l'inclusion canonique de* $g^{\otimes 0} = \mathbb{K}$ *dans* $T\mathfrak{g}$*.*

L'augmentation *de* $U\mathfrak{g}$*, notée* $\epsilon : U\mathfrak{g} \to \mathbb{K}$*, est l'application induite par la projection de* $T\mathfrak{g}$ *sur* $\mathbb{K}$ *parallèlement à* $\oplus_{n\geq 1}g^{\otimes n}$*. C'est un morphisme d'algèbre qui munit naturellement* $\mathbb{K}$ *d'une structure de* $U\mathfrak{g}$*-module.*

Il découle immédiatement des définitions que la donnée d'un $\mathfrak{g}$-module à droite est équivalente à celle d'un $U\mathfrak{g}$-module à droite, c'est pourquoi les deux notions seront confondues par la suite.

Définition 1.1.5. *Le* ***complexe (d'homologie) de Chevalley-Eilenberg*** *de* $\mathfrak{g}$ *à coefficients dans* N *est le module gradué* $C_*(\mathfrak{g};N)$ *défini par*

$$C_*(\mathfrak{g};N) := N\otimes \Lambda^*\mathfrak{g}$$

pour tout entier n*, muni de la différentielle* d^{CE} *définie en degré* n *par*

$$\begin{aligned} d^{CE}(m\otimes g_1\wedge g_2\wedge\cdots\wedge g_n) := &\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1} m\cdot g_i\otimes g_1\wedge g_2\wedge\cdots\wedge\hat{g}_i\wedge\cdots\wedge g_n \\ &+ \sum_{1\leq i<j\leq n}(-1)^{j+1} m\otimes g_1\wedge\cdots\wedge[g_i,g_j]\wedge\cdots\wedge\hat{g}_j\cdots\wedge g_n \end{aligned}$$

, pour tout m *dans* N *et pour tous* g_1*, ...* g_n *dans* $\mathfrak{g}$*. Ici,* $\Lambda^*\mathfrak{g}$ *désigne l'algèbre exterieure (graduée) sur* $\mathfrak{g}$ *vue comme module graduée concentré en degré* 1*, et la notation* $\hat{g}_i$ *consiste à omettre* g_i*.* ***L'homologie de*** $\mathfrak{g}$ ***à coefficients dans*** N*, notée* $H_*(\mathfrak{g};N)$*, est le* $\mathbb{K}$*-module gradué*

$$H_*(\mathfrak{g};N) := H_*(C_*(\mathfrak{g};N), d^{CE})$$

La version cohomologique $H^*(\mathfrak{g};N')$ *est définie de manière analogue (consulter l'appendice B. ou [Wei95] pour un exposé plus détaillé).*

Comme $U\mathfrak{g}$ est un $\mathfrak{g}$-module à droite pour l'action donnée par la multiplication, il est naturel de considérer le complexe de Chevalley-Eilenberg à coefficients dans $U\mathfrak{g}$, que l'on notera $C_*(\mathfrak{g})$, et qui sera appelé **résolution de Chevalley-Eilenberg** dans ce qui suit pour la raison suivante :

Proposition 1.1.6. *Le complexe* $C_*(\mathfrak{g}) := C_*(\mathfrak{g}; U\mathfrak{g})$ *est acyclique et son homologie en degré* 0 *s'identifie à* $\mathbb{K}$. *C'est donc une résolution de* $\mathbb{K}$ *dans la catégorie des* $U\mathfrak{g}$*-modules à droite.*

Démonstration. Une démonstration de ce résultat à l'aide de la suite spectrale associée à la filtration canonique de $U\mathfrak{g}$ se trouve dans [CE56]. □

De même que dans le cas de l'homologie de Hochschild, l'acyclicité de la résolution de Chevalley-Eilenberg implique une interprétation de l'homologie d'algèbre de Lie comme foncteur dérivé :

Corollaire 1.1.7. *Si* $\mathfrak{g}$ *est projective*[1] *sur* $\mathbb{K}$, *alors*

$$H_*(\mathfrak{g}; N) = \mathrm{Tor}_*^{U\mathfrak{g}}(\mathbb{K}; N)$$

et

$$H^*(\mathfrak{g}; N') = \mathrm{Ext}^*_{U\mathfrak{g}}(\mathbb{K}; N')$$

1.1.2 L'application d'antisymétrisation est un quasi-isomorphisme

Dans cette sous-section, $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie $\mathbb{K}$-libre, et M est un $U\mathfrak{g}$-bimodule.

Définition 1.1.8. *Le* $\mathfrak{g}$*-module* ***adjoint*** *associé à* M *est le* $\mathfrak{g}$*-module à droite* M^{ad} *dont le* $\mathbb{K}$*-module sous-jacent est* M, *et l'action de* $\mathfrak{g}$ *à droite est prescrite par*

$$m \cdot g := mg - gm$$

pour tous m *dans* M^{ad} *et* g *dans* $\mathfrak{g}$.

Ainsi, deux invariants semblent associés à la paire $(\mathfrak{g}, M)$: $H_*(\mathfrak{g}; M^{ad})$ et $HH_*(U\mathfrak{g}; M)$. Il s'avère que ces deux modules gradués coïncident, c'est en substance ce que dit le théorème 5.1 du chapitre XIII de [CE56] que nous rappelons maintenant sous une forme particulière, adaptée à notre contexte :

Théorème 1.1.9 ([CE56])**.** *Soit* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie libre sur* $\mathbb{K}$.

1. *Si* X_* *est une résolution projective de* $\mathbb{K}$ *comme* $U\mathfrak{g}$*-module, alors* $U\mathfrak{g}^e \otimes_{U\mathfrak{g}} X_*$ *est une résolution projective de* $U\mathfrak{g}$ *comme* $U\mathfrak{g}^e$*-module à gauche.*
2. *Par conséquent, l'application d'antisymétrisation* $F_* : C_*(\mathfrak{g}; M^{ad}) \to CH_*(U\mathfrak{g}; M)$ *définie en degré* n *par*

$$F_n(m \otimes g_1 \wedge g_2 \wedge \cdots \wedge g_n) := \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \mathrm{sgn}(\sigma) m \otimes g_{\sigma(1)} \otimes g_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes g_{\sigma(n)}$$

pour tous m *dans* M *et* g_1, ..., g_n *dans* $\mathfrak{g}$, *est un quasi-isomorphisme de complexes de chaînes.*

1. $\mathbb{K}$-plate suffit pour l'homologie.

La démonstration de ce théorème donnée dans [CE56] repose sur un principe général appelé "changement d'anneau" par les auteurs, qui permet de comparer les foncteurs dérivés $\mathrm{Tor}_*^A(-;Q_A)$ (resp. $\mathrm{Ext}_A^*(Q_A;-)$) et $\mathrm{Tor}_*^B(-;Q_B)$ (resp. $\mathrm{Ext}_B^*(Q_B;-)$), où A et B sont deux anneaux reliés par un diagramme commutatif de la forme

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, two heads] \arrow[d, "E"] & Q_A \arrow[d] \\ B \arrow[r] & Q_B \end{tikzcd} \tag{1.1.1}$$

et Q_A (resp. Q_B) est un A-module à gauche (resp. B-module à gauche). C'est en particulier ce qui permet de voir B comme un A-module via l'application E qui est un morphisme d'anneau. Dans la section suivante, nous allons brièvement rappeler certains points clé dans la démonstration du théorème 1.1.9 qui impliquent directement l'existence d'un quasi-isomorphisme inverse de l'application d'antisymétrisation, et permettent d'établir une stratégie de construction d'un tel inverse.

1.2 Sens réciproque : la nécessité d'une contraction

Le but de cette section est de comprendre les grandes lignes de la démonstration du théorème 1.1.9 donnée par H. Cartan et S. Eilenberg dans [CE56] afin d'en déduire une méthode de construction d'un quasi-inverse de F_*. Ici, $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie libre sur $\mathbb{K}$.

1.2.1 Foncteurs dérivés et résolutions projectives

Dans cette sous-section, A est un anneau, $\mathcal{M}$ est la catégorie des A-modules à gauche et $\mathcal{A}$ celle des groupes abéliens. Le calcul des foncteurs dérivés de foncteurs additifs dans les catégories de modules repose sur le lemme fondamental suivant, que nous nous contentons d'énoncer en renvoyant à [CE56] pour une démonstration :

Lemme 1.2.1 (Lemme fondamental.)**.** *Soient P et Q deux A-modules à gauche, $X_* \to P$ un complexe de chaînes de modules A-projectifs au-dessus de P et $Y_* \to Q$ une résolution (non nécéssairement projective) de Q. Alors toute application A-linéaire $f : P \to Q$ se relève en un morphisme de complexes de chaînes de A-modules $F_* : X_* \to Y_*$ au-dessus de $f : P \to Q$. De plus, F_* est unique à homotopie près.*

Pour tout foncteur additif et exact à droite $T : \mathcal{M} \to \mathcal{A}$, le n-ième foncteur dérivé à gauche de F évalué sur un A-module Q, noté $L^nT(Q)$, est le n-ième groupe d'homologie du complexe de groupes abéliens $(T(X_*), T(d^X))$ image par T d'une résolution projective quelconque (X_*, d^X) de Q. Le fait que tout A-module admette une résolution projective est établi dans [CE56]. Pour que $L^nT(Q)$ soit bien défini, il faut montrer que le groupe abélien obtenu ne dépend pas de la résolution choisie et c'est là qu'intervient le lemme 1.2.1 : si $(X_*, d^X) \to Q$ et $(Y_*, d^Y) \to Q$ sont deux résolutions projectives de Q, le lemme implique l'existence de morphismes de complexes de A-modules $F_*^X : X_* \to Y_*$ et $G_*^Y : Y_* \to X_*$ au-dessus de l'identité $Q \to Q$. Comme $F_*^X \circ G_*^Y$ et

Id_{Y_*} sont deux relèvements de l'application identité sur Q, ils doivent être homotopes c'est-à-dire qu'il existe une application $H_* : Y_* \to Y_*$, de degré $+1$, vérifiant $F^X_* \circ G^Y_* = Id_{Y_*} + d^Y H_* + H_* d^Y$ ce qui implique par fonctorialité et additivité de T :

$$H_*(T(F^X_*)) \circ H_*(T(G^Y_*)) = Id_{H_*(T(Y^*),T(d^Y))}$$

Le même raisonnement permet d'établir que $H_*(T(G^Y_*))$ est inverse à gauche de $H_*(T(F^X_*))$, ce qui prouve bien que les groupes abéliens gradués $H_*(T(X_*), T(d^X))$ et $H_*(T(Y_*), T(d^Y))$ sont isomorphes et que $L^*T(Q)$ est bien défini.

Définition 1.2.2. *Dans le cas où le foncteur T est de la forme $Q \mapsto P \otimes_A Q$, où P est un A-module à droite fixé, le n-ième foncteur dérivé de T évalué en un A-module Q se note*

$$\mathrm{Tor}^A_n(P, Q)$$

De même, si P est un A-module à gauche, les foncteurs dérivés du foncteur $Q \mapsto \mathrm{Hom}_A(P, Q)$ se notent $\mathrm{Ext}^*_A(P, Q)$.

1.2.2 Application au cas Hochschild/Chevalley-Eilenberg

Le but de cette sous-section est d'expliquer pourquoi la première partie du théorème 1.1.9 implique la seconde. Une résolution du $U\mathfrak{g}$-module à gauche $\mathbb{K}$ est donnée par la résolution de Chevalley-Eilenberg $C_*(\mathfrak{g})$. Le théorème nous dit qu'en tensorisant cette résolution avec $U\mathfrak{g}^e$ au-dessus de $U\mathfrak{g}$, le complexe obtenu est encore une résolution, mais cette fois-ci du $U\mathfrak{g}$-bimodule $U\mathfrak{g}$. Pour que cette opération [2] ait un sens, il nous faut préciser la structure de $U\mathfrak{g}$-module à droite sur $U\mathfrak{g}^e$ en se donnant un morphisme d'algèbre $E : U\mathfrak{g} \to U\mathfrak{g}^e$ et un carré commutatif de la forme (1.1.1) avec $A = U\mathfrak{g}$, $B = U\mathfrak{g}^e$, $Q_A = \mathbb{K}$ et $Q_B = U\mathfrak{g}$. C'est l'objet de la sous-section suivante.

La structure d'algèbre de Hopf sur $U\mathfrak{g}$

Le lecteur désirant se familiariser avec la notion d'algèbre de Hopf pourra consulter [Kas95] pour un exposé complet, ou se référer à l'appendice A. où sont rappelés les principaux résultats utilisés dans la suite.

Nous avons déja défini le morphisme d'augmentation $\epsilon : U\mathfrak{g} \to \mathbb{K}$ et le produit $\mu : U\mathfrak{g}^{\otimes 2} \to U\mathfrak{g}$ en section 1.1.1. Il reste à introduire le coproduit et l'antipode :

Définition 1.2.3. *Le coproduit de $\Delta : U\mathfrak{g} \to U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g}$ est l'unique morphisme d'algèbres vérifiant*

$$\Delta(g) := g \otimes 1 + 1 \otimes g$$

pour tout g dans $\mathfrak{g} \subset U\mathfrak{g}$. L'antipode $S : U\mathfrak{g} \to U\mathfrak{g}^{op}$ est l'unique morphisme d'algèbres vérifiant

$$S(g) = -g$$

pour tout g dans $\mathfrak{g}$. L'augmentation de l'algèbre $U\mathfrak{g}^e$ est le morphisme de $U\mathfrak{g}^e$-modules à gauche $\rho : U\mathfrak{g}^e \to U\mathfrak{g}$ défini par $\rho(x \otimes y) := \mu(x \otimes y)$ pour tout x dans $U\mathfrak{g}$ et y dans $U\mathfrak{g}^{op}$.

2. Et la première partie du théorème 1.1.9.

Notation 1.2.4. *Dans la suite, nous aurons souvent recours à la* ***notation de Sweedler*** *consistant à noter le coproduit itéré k-fois d'un élément x de $U\mathfrak{g}$ sous la forme*

$$\sum_{(x)} x^{(1)} \otimes x^{(2)} \otimes \cdots \otimes x^{(k+1)} := (\Delta \otimes \mathrm{Id}^{\otimes k-1}) \circ (\Delta \otimes \mathrm{Id}^{\otimes k-3}) \circ \cdots \circ (\Delta \otimes \mathrm{Id}) \circ \Delta(x) \in U\mathfrak{g}^{\otimes k+1}$$

En particulier,

$$\Delta(x) = \sum_{(x)} x^{(1)} \otimes x^{(2)}$$

Proposition 1.2.5. *Le sextuplet $(U\mathfrak{g}, \mu, \eta, \Delta, \epsilon, S)$ est une algèbre de Hopf cocomutative connexe*[3]*.*

Démonstration. Ce résultat est démontré dans [Kas95]. □

Il ne reste qu'à définir le morphisme de changement d'anneau E promis :

Définition 1.2.6. *Le morphisme d'algèbre $E : U\mathfrak{g} \to U\mathfrak{g}^e$ est défini par*

$$E := (Id \otimes S) \circ \Delta$$

Le changement de résolution

Nous disposons donc du carré commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} U\mathfrak{g} & \xrightarrow{\epsilon} & \mathbb{K} \\ {\scriptstyle E}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \eta} \\ U\mathfrak{g}^e & \xrightarrow{\rho} & U\mathfrak{g} \end{array} \tag{1.2.1}$$

qui vérifie les conditions E.1) et E.2) du théorème de changement d'anneau 6.1 de Cartan-Eilenberg et montre donc le point 1) du théorème 1.1.9. En particulier, le complexe de $U\mathfrak{g}$-bimodules $(U\mathfrak{g}^e \otimes_{U\mathfrak{g}} C_*(\mathfrak{g}), Id \otimes d^{CE})$ est une résolution projective de $U\mathfrak{g}$.

Définition 1.2.7. *Le résolution projective $(U\mathfrak{g}^e \otimes_{U\mathfrak{g}} C_*(\mathfrak{g}), Id \otimes d^{CE})$ est isomorphe au complexe de $U\mathfrak{g}$-bimodules $(CK_*(U\mathfrak{g}), d^K)$ défini en degré n par*

$$CK_n(U\mathfrak{g}) := U\mathfrak{g} \otimes \Lambda^n \mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g}$$

et

$$\begin{aligned} d^K(x \otimes g_1 \wedge \cdots \wedge g_n \otimes y) := & \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} (x g_i \otimes g_1 \wedge \cdots \wedge \hat{g}_i \wedge \cdots \wedge g_n \otimes y - x \otimes g_1 \wedge \cdots \wedge \hat{g}_i \wedge \cdots \wedge g_n \otimes g_i y) \\ & + \sum_{1 \leq i < j \leq n} (-1)^{j+1} x \otimes g_1 \wedge \cdots \wedge [g_i, g_j] \wedge g_{i+1} \wedge \cdots \wedge \hat{g}_j \wedge \cdots \wedge g_n \otimes y \end{aligned}$$

pour tous x, y dans $U\mathfrak{g}$ et g_1, ..., g_n dans $\mathfrak{g}$. Ce complexe est appelé ***résolution de Koszul*** *de $U\mathfrak{g}$.*

3. Voir [Qui69] pour une définition de connexité.

Ainsi, nous disposons d'un complexe “plus petit” pour calculer l'homologie de Hochschild de $U\mathfrak{g}$, obtenu en tensorisant la résolution de Koszul avec M au-dessus de $U\mathfrak{g}^e$ et dont il est facile de voir qu'il est isomorphe[4] au complexe de Chevalley-Eilenberg à coefficients dans le $\mathfrak{g}$-module M^{ad}. De plus, le lemme 1.2.1 et les considérations qui le suivent affirment l'existence de morphisme de complexes $F_*^K : CK_*(U\mathfrak{g}) \to B_*(U\mathfrak{g})$ et $G_*^B : B_*(U\mathfrak{g}) \to CK_*(U\mathfrak{g})$ relevant l'application identité de $U\mathfrak{g}$, et induisant des quasi-isomorphismes $F_* : C_*(\mathfrak{g}; M^{ad}) \to CH_*(U\mathfrak{g}; M)$ et $G_* : CH_*(U\mathfrak{g}; M) \to C_*(\mathfrak{g}; M^{ad})$ inverses l'un de l'autre en homologie. En fait, il est possible de donner explicitement un tel F_*^K :

Proposition 1.2.8. *L'application $F_*^K : CK_*(U\mathfrak{g}) \to B_*(U\mathfrak{g})$ défnie en degré n par*

$$F_*^K(x \otimes g_1 \wedge g_2 \wedge \cdots \wedge g_n \otimes y) := \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \operatorname{sgn}(\sigma) x \otimes g_{\sigma(1)} \otimes g_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes g_{\sigma(n)} \otimes y$$

pour tous x, y dans $U\mathfrak{g}$ et g_1, ..., g_n dans $\mathfrak{g}$ est un morphisme de complexes de $U\mathfrak{g}$-bimodules au-dessus de $U\mathfrak{g}$ relevant l'application identité $U\mathfrak{g} \to U\mathfrak{g}$. De plus, le quasi-isomorphisme F_* : $C_*(\mathfrak{g}; M^{ad}) \to CH_*(U\mathfrak{g}; M)$ induit par F_*^K est l'application d'antisymétrisation du théorème 1.1.9.

Démonstration. Il est immédiat de vérifier qu'en transportant F_*^K via les isomorphismes de complexes de chaînes

$$\begin{array}{rcl} \theta : C_*(\mathfrak{g}; M^{ad}) & \overset{\cong}{\to} & M \otimes_{U\mathfrak{g}^e} CK_*(U\mathfrak{g}) \\ m \otimes g_1 \wedge g_2 \wedge \cdots \wedge g_n & \mapsto & m \otimes 1 \otimes g_1 \wedge \cdots \wedge g_n \otimes 1 \end{array} \tag{1.2.2}$$

et

$$\begin{array}{rcl} \theta' : CH_*(U\mathfrak{g}; M) & \to & M \otimes_{U\mathfrak{g}^e} B_*(U\mathfrak{g}) \\ m \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_n & \mapsto & m \otimes 1 \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \otimes 1 \end{array} \tag{1.2.3}$$

l'application $F_* := (\theta')^{-1} \circ (Id \otimes F_*^K) \circ \theta : C_*(\mathfrak{g}; M^{ad}) \to CH_*(U\mathfrak{g}; M)$ est bien l'application d'antisymétrisation de Cartan-Eilenberg F_* introduite au théorème 1.1.9.

Il reste à démontrer que F_*^K commute au différentielles, ce que nous faisons par un calcul direct, analogue à Feng-Tsygan. Commençons par remarquer que comme toutes les applications en jeu sont des morphismes de $U\mathfrak{g}$-bimodules, il suffit de vérifier l'équation

$$d^B F_n^K = F_{n-1}^K d^K \quad , \quad n \geq 1$$

sur les éléments de la forme $1 \otimes g_1 \wedge \cdots \wedge g_n \otimes 1$, avec g_1, ..., g_n dans $\mathfrak{g}$. Le terme de gauche de l'équation donne, en utilisant le changement de variable $\sigma \mapsto \sigma \circ (i, i+1)$ dans la dernière

4. Voir la preuve de la proposition 1.2.8 suivante.

somme de l'avant dernière ligne :

$$
\begin{aligned}
d^B F_n^K(1\otimes g_1\wedge\cdots\wedge g_n\otimes 1) = &\sum_{\sigma\in\Sigma_n}\operatorname{sgn}(\sigma)\big(g_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes g_{\sigma(n)}\otimes 1+(-1)^n 1\otimes g_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes g_{\sigma(n)}\\
&+\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i 1\otimes g_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes g_{\sigma(i-1)}\otimes g_{\sigma(i)}g_{\sigma(i+1)}\otimes\cdots\otimes g_{\sigma(n)}\otimes 1\big)\\
=&\sum_{\sigma\in\Sigma_n}\operatorname{sgn}(\sigma)\big(g_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes g_{\sigma(n)}\otimes 1+(-1)^n 1\otimes g_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes g_{\sigma(n)}\big)\\
&+\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i\sum_{\substack{\sigma\in\Sigma_n\\ \sigma(i)<\sigma(i+1)}}\operatorname{sgn}(\sigma)1\otimes g_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes g_{\sigma(i-1)}\otimes g_{\sigma(i)}g_{\sigma(i+1)}\otimes\cdots\otimes g_{\sigma(n)}\otimes 1\\
&+\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i\sum_{\substack{\sigma\in\Sigma_n\\ \sigma(i)>\sigma(i+1)}}\operatorname{sgn}(\sigma)1\otimes g_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes g_{\sigma(i-1)}\otimes g_{\sigma(i)}g_{\sigma(i+1)}\otimes\cdots\otimes g_{\sigma(n)}\otimes 1\\
=&\overbrace{\sum_{\sigma\in\Sigma_n}\operatorname{sgn}(\sigma)\, g_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes g_{\sigma(n)}\otimes 1}^{(A')}+\overbrace{(-1)^n\sum_{\sigma\in\Sigma_n}\operatorname{sgn}(\sigma)1\otimes g_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes g_{\sigma(n)}}^{(B')}\\
&+\overbrace{\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i\sum_{\substack{\sigma\in\Sigma_n\\ \sigma(i)<\sigma(i+1)}}\operatorname{sgn}(\sigma)1\otimes g_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes g_{\sigma(i-1)}\otimes[g_{\sigma(i)},g_{\sigma(i+1)}]\otimes\cdots\otimes g_{\sigma(n)}\otimes 1}^{(C')}
\end{aligned}
$$

et celui de droite

$$
\begin{aligned}
F_{n-1}^K d^K(1\otimes g_1\wedge\cdots\wedge g_n\otimes 1) = &\overbrace{\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\sum_{\sigma\in\Sigma_n,\sigma(i)=i}\operatorname{sgn}(\sigma)\big(g_{\sigma(i)}\otimes g_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes\hat g_{\sigma(i)}\otimes\cdots\otimes g_{\sigma(n)}\otimes 1\big)}^{(A)}\\
&-\overbrace{\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\sum_{\sigma\in\Sigma_n,\sigma(i)=i}\operatorname{sgn}(\sigma)\big(1\otimes g_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes\hat g_{\sigma(i)}\otimes\cdots\otimes g_{\sigma(n)}\otimes g_{\sigma(i)}\big)}^{(B)}\\
&+\overbrace{\sum_{\substack{1\le k\le n\\ 1\le\sigma(k)<j\le n\\ \sigma\in\Sigma_n\\ \sigma(j)=j}}(-1)^{j+1}\operatorname{sgn}(\sigma)1\otimes g_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes g_{\sigma(k-1)}\otimes[g_{\sigma(k)},g_{\sigma(j)}]\otimes\cdots\otimes\hat g_{\sigma(j)}\otimes\cdots\otimes g_{\sigma(n)}\otimes 1}^{(C)}
\end{aligned}
$$

Notons l'abus de notation dans la dernière somme (C) où l'on a passé sous silence, pour le moment, le fait que k puisse être plus grand que j.

Soit i entre 1 et n. La précomposition par le i-cycle $(1, 2, \cdots, i-1, i)$ de signature $(-1)^{i+1}$ fournit une bijection

$$\begin{array}{rcl} \{\sigma \in \Sigma_n / \sigma(1) = i\} & \overset{\cong}{\to} & \{\sigma \in \Sigma_n / \sigma(i) = i\} \\ \sigma & \mapsto & \sigma \circ (1, 2, \cdots, i-1, i) \end{array}$$

qui permet de récrire le premier terme de l'expression précédente, noté (A), grâce à la multiplicativité du morphisme signature sgn :

$$\begin{aligned} (A) &= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \sum_{\sigma \in \Sigma_n, \sigma(i)=i} \operatorname{sgn}(\sigma) \left(g_{\sigma(i)} \otimes g_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \hat{g}_{\sigma(i)} \otimes \cdots \otimes g_{\sigma(n)} \otimes 1 \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sum_{\sigma \in \Sigma_n, \sigma(1)=i} \operatorname{sgn}(\sigma) \left(g_{\sigma(1)} \otimes g_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes \cdots \otimes g_{\sigma(n)} \otimes 1 \right) \\ &= \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \left(g_{\sigma(1)} \otimes g_{\sigma(2)} \otimes \cdots \otimes \cdots \otimes g_{\sigma(n)} \otimes 1 \right) \\ &= (A') \end{aligned}$$

De même, le second terme (B) se transforme à l'aide du changement de variable $\sigma \mapsto \sigma \circ (n, n-1, \cdots, i+1, i)$:

$$\begin{aligned} (B) &= -\sum_{\substack{1 \le i \le n \\ \sigma \in \Sigma_n, \\ \sigma(i)=i}} (-1)^{i+1} \operatorname{sgn}(\sigma) \left(1 \otimes g_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes \hat{g}_{\sigma(i)} \otimes \cdots \otimes g_{\sigma(n)} \otimes g_{\sigma(i)} \right) \\ &= (-1)^n \sum_{\substack{1 \le i \le n \\ \sigma \in \Sigma_n \\ \sigma(n)=i}} \operatorname{sgn}(\sigma) \left(1 \otimes g_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes g_{\sigma(n-1)} \otimes g_{\sigma(n)} \right) \\ &= (-1)^n \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \left(1 \otimes g_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes g_{\sigma(n-1)} \otimes g_{\sigma(n)} \right) \\ &= (B') \end{aligned}$$

Pour simplifier (C), utilisons d'abord le changement de variable $\sigma \mapsto \sigma \circ (k+1, k+2, \cdots, j-1, j)$

lorsque $k < j$, et $\sigma \mapsto \sigma \circ (j, j+1, \cdots, k-1)$ quand $j < k$:

$$\begin{aligned}
(C) &= \sum_{\substack{1\leq k\leq n\\ 1\leq \sigma(k)<j\leq n\\ \sigma\in\Sigma_n\\ \sigma(j)=j}} (-1)^{j+1}\mathrm{sgn}(\sigma) 1\otimes g_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes g_{\sigma(k-1)}\otimes[g_{\sigma(k)}, g_{\sigma(j)}]\otimes\cdots\otimes \hat{g}_{\sigma(j)}\otimes\cdots\otimes g_{\sigma(n)}\otimes 1\\
&= \sum_{\substack{1\leq k\leq n\\ 1\leq \sigma(k)<j\leq n\\ \sigma\in\Sigma_n\\ \sigma(j)=j\\ k\leq j}} (-1)^{j+1}\mathrm{sgn}(\sigma) 1\otimes g_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes g_{\sigma(k-1)}\otimes[g_{\sigma(k)}, g_{\sigma(j)}]\otimes\cdots\otimes \hat{g}_{\sigma(j)}\otimes\cdots\otimes g_{\sigma(n)}\otimes 1\\
&+ \sum_{\substack{1\leq k\leq n\\ 1\leq \sigma(k)<j\leq n\\ \sigma\in\Sigma_n\\ \sigma(j)=j\\ k>j}} (-1)^{j+1}\mathrm{sgn}(\sigma) 1\otimes g_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes \hat{g}_{\sigma(j)}\otimes\cdots\otimes g_{\sigma(k-1)}\otimes[g_{\sigma(k)}, g_{\sigma(j)}]\otimes\cdots\otimes g_{\sigma(n)}\otimes 1\\
&= \sum_{\substack{1\leq k\leq n-1\\ \sigma\in\sigma_n\\ \sigma(k)<\sigma(k+1)\\ k\leq\sigma(k+1)}} (-1)^{k}\mathrm{sgn}(\sigma) 1\otimes g_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes g_{\sigma(k-1)}\otimes[g_{\sigma(k)}, g_{\sigma(k+1)}]\otimes g_{\sigma(k+2)}\otimes\cdots\otimes g_{\sigma(n)}\otimes 1\\
&+ \sum_{\substack{2\leq k\leq n\\ \sigma\in\sigma_n\\ \sigma(k)<\sigma(k-1)\\ k>\sigma(k-1)}} (-1)^{k}\mathrm{sgn}(\sigma) 1\otimes g_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes g_{\sigma(k-2)}\otimes[g_{\sigma(k)}, g_{\sigma(k-1)}]\otimes g_{\sigma(k+1)}\otimes\cdots\otimes g_{\sigma(n)}\otimes 1
\end{aligned}$$

Ensuite, le changement de variable $k = j+1$ suivi de la précomposition par la permutation $(j, j+1)$ dans la deuxième somme donne

$$\begin{aligned}
(C) &= \sum_{\substack{1\leq k\leq n-1\\ \sigma\in\sigma_n\\ \sigma(k)<\sigma(k+1)\\ k\leq\sigma(k+1)}} (-1)^{k}\mathrm{sgn}(\sigma) 1\otimes g_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes g_{\sigma(k-1)}\otimes[g_{\sigma(k)}, g_{\sigma(k+1)}]\otimes g_{\sigma(k+2)}\otimes\cdots\otimes g_{\sigma(n)}\otimes 1\\
&+ \sum_{\substack{1\leq j\leq n-1\\ \sigma\in\sigma_n\\ \sigma(j)<\sigma(j+1)\\ j>\sigma(j+1)}} (-1)^{k}\mathrm{sgn}(\sigma) 1\otimes g_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes g_{\sigma(j-1)}\otimes[g_{\sigma(j)}, g_{\sigma(j+1)}]\otimes g_{\sigma(j+2)}\otimes\cdots\otimes g_{\sigma(n)}\otimes 1\\
&= \sum_{\substack{1\leq k\leq n-1\\ \sigma\in\sigma_n\\ \sigma(k)<\sigma(k+1)}} (-1)^{k}\mathrm{sgn}(\sigma) 1\otimes g_{\sigma(1)}\otimes\cdots\otimes g_{\sigma(k-1)}\otimes[g_{\sigma(k)}, g_{\sigma(k+1)}]\otimes g_{\sigma(k+2)}\otimes\cdots\otimes g_{\sigma(n)}\otimes 1\\
&= (C')
\end{aligned}$$

Pour conclure il suffit d'observer que

$$F^K_{n-1} d^K(1\otimes g_1\wedge\cdots\wedge g_n\otimes 1) = (A)+(B)+(C) = (A')+(B')+(C') = d^B F^K_n(1\otimes g_1\wedge\cdots\wedge g_n\otimes 1)$$

$\square$

Remarque 1.2.9. *Une démonstration par récurrence de la commutation de l'application d'antisymétrisation aux différentielles de Hochschild et de Chevalley-Eilenberg se trouve dans Loday-Cyclic-Homology. Elle utilise le fait que l'endomorphisme adjoint ad_g de $CH_*(U\mathfrak{g}; M)$ associé à tout élement g de $\mathfrak{g}$ est homotope à l'application nulle.*

Nous venons d'établir que l'application d'antisymétrisation F_* de Cartan-Eilenberg provient d'un relèvement, au-dessus du morphisme identité de $U\mathfrak{g}$, de la résolution de Koszul vers la bar-résolution. Par conséquent le lemme fondamental 1.2.1 implique que F_* un quasi-isomorphisme, ce qui prouve le point 2. du théorème 1.1.9. Une autre conséquence "gratuite" du lemme est l'existence d'un quasi-isomorphisme $G_* : CH_*(U\mathfrak{g}; M) \to C_*(\mathfrak{g}; M^{ad})$, inverse de F_* en homologie, constructible de la même façon à partir d'un relèvement de l'identité, cette fois-ci de la bar-résolution en direction de celle de Koszul. Ceci répond par positivement à la première partie question 0.0.1, mais toute la difficulté est de construire un tel relèvement : la sous-section qui suit explique comment y remédier si l'on admet l'existence d'une contraction de la résolution de Koszul.

1.2.3 Stratégie de construction d'un quasi-inverse

Dans cette sous-section, $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie $\mathbb{K}$-libre, de sorte que toutes les considérations précédentes s'appliquent. Plus particulièrement, tout relèvement $G_*^B : B_*(U\mathfrak{g}) \to CK_*(U\mathfrak{g})$ au-dessus de l'application identité de $U\mathfrak{g}$ induira le quasi-isomorphisme $G_* : CH_*(U\mathfrak{g}; M) \xrightarrow{\simeq} C_*(\mathfrak{g}; M^{ad})$ quasi-inverse de F_* recherché. De plus, comme $CK_*(U\mathfrak{g})$ est une résolution de $U\mathfrak{g}$, nous savons que c'est un complexe acyclique. Afin de construire G_*, nous allons admettre que la résolution de Koszul possède une proprieté plus forte que l'acyclicité : la contractibilité.

Ainsi, supposons l'existence d'une contraction [5] $h : CK_*(U\mathfrak{g}) \to CK_*(U\mathfrak{g})$ de degré $+1$ et vérifiant l'équation

$$hd^K + d^K h = Id_{CK_*(U\mathfrak{g})} \tag{1.2.4}$$

Alors il est tentant de définir un morphisme de complexes $\tilde{G}_* : B_*(U\mathfrak{g}) \to CK_*(U\mathfrak{g})$ par récurrence sur le degré faisant commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} B_n(U\mathfrak{g}) \arrow[r, "\tilde{G}_n"] \arrow[d, "d^B"] & CK_n(U\mathfrak{g}) \\ B_{n-1}(U\mathfrak{g}) \arrow[r, "\tilde{G}_{n-1}"'] & CK_{n-1}(U\mathfrak{g}) \arrow[u, "h"'] \end{tikzcd}$$

pour tout entier $n > 0$, c'est-à-dire en posant

$$\tilde{G}_0 := Id : U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g} \to U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g}$$

et

$$\tilde{G}_n := h \circ \tilde{G}_{n-1} \circ d^B \quad , \quad n > 0 \tag{1.2.5}$$

5. Nous renvoyons à l'appendice A pour les définitions de complexe contractile et de complexe acyclique.

Comme d^B est de carré nul, $\tilde{G}_n = 0$ pour tout $n > 1$ et $d^K\tilde{G}_1 = \tilde{G}_0 d^B$, donc $\tilde{G}_*$ est un morphisme de complexes de $\mathbb{K}$-modules. Mais un problème subsiste : la contraction h n'étant pas, à priori, $U\mathfrak{g}^e$-linéaire [6], il n'y aucune raison pour que $\tilde{G}_1 = hd^B$ le soit, ce qui montre que $\tilde{G}_*$ **ne convient pas**. Cependant, il est possible de forcer la $U\mathfrak{g}^e$-linéarité de la manière suivante pour obtenir le quasi-inverse de F_* recherché :

Proposition 1.2.10. *L'application linéaire graduée $G^B_* : B_*(U\mathfrak{g}) \to CK_*(U\mathfrak{g})$ définie par récurrence sur le degré n par*

$$G^B_0 := \mathrm{Id} : U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g} \to U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g}$$

et

$$G^B_n(x \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \otimes y) := x \left(hG_{n-1}d^B(1 \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \otimes 1\right) y \quad , \quad \forall n > 1 \qquad (1.2.6)$$

pour tous x, y, x_1, ..., x_n dans $U\mathfrak{g}$, est un morphisme de complexes de $U\mathfrak{g}$-bimodules qui induit, en le tensorisant avec l'application identité de M au-dessus de $U\mathfrak{g}^e$ et en utilisant les identifications θ et θ' données par (1.2.2) et (1.2.3), un quasi-isomorphisme

$$G_* : CH_*(U\mathfrak{g}; M) \to C_*(\mathfrak{g}; M^{ad})$$

inverse de F_* en homologie. De la même manière, G^B_* induit un quasi-inverse de l'application F^* au niveau des complexes de cohomologie :

$$G^* : C^*(\mathfrak{g}; M^{ad}) \to CH^*(U\mathfrak{g}; M)$$

Démonstration. Comme G^B_* est un relèvement de l'identité de $U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g}$, cela implique que G_* est nécéssairement un quasi-isomorphisme. Le fait que ce dernier soit bien défini vient de la $U\mathfrak{g}^e$-linéarité de G^B_*. Montrons par récurrence sur n que G^B_* commute aux différentielles. Posons $d^B_{-1} = \mu : U\mathfrak{g} \otimes U\mathfrak{g} \to U\mathfrak{g}$ et $G^B_{-1} := \mathrm{Id}_{U\mathfrak{g}}$.

- Initialisation : Il est clair que $G^B_0 = \mathrm{Id}_{U\mathfrak{g}^{\otimes 2}}$ et G^B_{-1} vérifient

$$d^K G^B_0 = G^B_{-1} d^B$$

- Hérédité : Supposons que pour un certain entier n,

$$d^K G^B_n = G^B_{n-1} d^B$$

Alors, pour tous x, y, x_1, ..., x_{n+1} dans $U\mathfrak{g}$, la linéarité des différentielles et l'égalité (1.2.4) impliquent :

$$\begin{aligned} d^K G^B_{n+1}(x \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n+1} \otimes y) :=& x \left(d^K h G^B_n d^B(1 \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n+1} \otimes 1)\right) y \\ =& x \left((\mathrm{Id} - hd^K) G^B_n d^B(1 \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n+1} \otimes 1)\right) y \\ =& x\Big((G^B_n d^B - hG^B_{n-1}\underbrace{(d^B)^2}_{=0})(1 \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n+1})\Big)y \\ =& G^B_n d^B(x \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n+1} \otimes y) \end{aligned}$$

ce qui prouve que la commutation de G^B_* aux différentielles est héréditaire.

6. Si elle l'était, cela impliquerait que l'algèbre $U\mathfrak{g}$ n'aurait pas d'homologie ni de cohomologie en degrés strictement positifs quels que soient les coefficients choisis.

□

Nous voyons donc que pour construire “explicitement” un quasi-inverse de l’application d’antisymétrisation, il suffit de connaître un contraction du complexe de Koszul de $U\mathfrak{g}$. Le chapitre suivant s’attache donc à produire une telle contraction.

Chapitre 2

Contraction du complexe de Koszul

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au cas au cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, pour lequel l'existence d'un quasi-inverse G_* à F_* est garantie du fait que $\mathbb{R}$ est un corps. La seconde partie de la question 0.0.1 reste cependant non triviale ce qui motive notre étude.

2.1 Contraction du complexe de Chevalley-Eilenberg

Dans toute cette section $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie de dimension finie[1] m sur $\mathbb{R}$. G est un groupe de Lie[2] dont l'élément neutre est noté e, le produit $\mu_G : G \times G \to G$, et dont l'espace tangent en l'élément neutre T_eG s'identifie à $\mathfrak{g}$. L'existence d'un tel groupe est assurée par le troisième théorème de Lie. La diagonale de G est l'application $\Delta_G : G \to G \times G$ qui envoie z dans G sur (z, z) dans $G \times G$.

Afin d'obtenir la contraction h de la résolution de Koszul de $U\mathfrak{g}$ évoquée au chapitre précédent, nous allons dans un premier temps contracter la résolution de Chevalley-Eilenberg de $\mathfrak{g}$. A cette fin, il est utile d'interpréter "géométriquement" $C_*(\mathfrak{g})$, en l'exhibant comme sous-complexe du complexe des courants sur le groupe de Lie G.

2.1.1 Interprétation géométrique de $C_*(\mathfrak{g})$

Il est bien connu (voir [Lod98], [FOT08] et [Nee04] pour des coéfficients arbitraires) que le *complexe* de cohomologie de Chevalley-Eilenberg à coefficients triviaux (i.e dans $\mathbb{R}$) est isomorphe au complexe des formes de De Rham sur G invariantes à gauche. C'est pourquoi il est légitime de chercher une interprétation analogue de la *résolution* de Chevalley-Eilenberg comme sous-complexe d'un complexe de chaînes géométrique. Or, comme les "coefficients" de $C_*(\mathfrak{g})$ sont $U\mathfrak{g}$ et non pas $\mathcal{C}^\infty(G)$, l'approche naïve qui consiste à tenter de voir la résolution de Chevalley-Eilenberg comme un complexe de champs de multi-vecteurs, dont les formes différentielles sont duales, ne semble pas pertinente, alors que la notion de courant, duale de celle de forme

1. Sauf mention explicite du contraire.
2. Un germe de groupe de Lie suffit.

différentielle, paraît mieux adaptée dans la mesure où un 0-courant ponctuel semble vivre naturellement dans $U\mathfrak{g}$. Le but de cette sous-section est de donner un sens précis à ce qui vient d'être dit.

Distributions et opérateurs différentiels invariants à gauche

L'algèbre enveloppante $U\mathfrak{g}$ est une algèbre de Hopf qui possède plusieurs interprétations géométriques, dont une en termes de distributions ponctuelles et une autre en termes d'opérateurs différentiels invariants à gauche, que nous rappelons ici. À cette fin, nous noterons $\mathcal{C}_e^\infty(G)$ l'espace vectoriel des germes de fonctions en e sur G obtenu en quotientant l'espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ définies sur un voisinage de e par la relation d'équivalence qui consiste à coïncider sur un voisinage éventuellement plus petit de e. L'idéal (maximal) de $\mathcal{C}_e^\infty(G)$ engendré par les germes de fonction s'annulant en e sera noté $\mathfrak{m}$. Rappelons que multiplication à gauche par un élément de z de G est un difféomorphisme de G dans lui-même que nous écrirons $L_z : G \to G$.

Définition 2.1.1. *Une* ***distribution ponctuelle en*** *e sur G est une forme linéaire D, continue pour la topologie $\mathfrak{m}$-adique, sur l'espace des germes de fonctions en e, c'est-à-dire qu'il existe un entier r tel que D s'annule sur $\mathfrak{m}^r$. L'ensemble des distributions ponctuelles en e, provisoirement noté U, est une bigèbre pour le* ***produit de convolution des distributions*** *$\cdot$ défini par*

$$D \cdot D'(\bar{f}) = D \otimes D'(f \circ \mu_G) := D(z \mapsto D'(f \circ L_z))$$

pour tout germe de fonction $\bar{f}$ en e, et pour toutes distributions D et D'. Le coproduit $\delta : U \to U \otimes U$ est défini par

$$\delta(D)(\bar{f}) = D(f \circ \Delta_G)$$

pour tout germe f en (e, e) sur $G \times G$ et toute distribution ponctuelle D sur G. Pour que l'égalité précédente définisse $\delta(D)$, il faut voir que $U \otimes U$ s'identifie aux distributions ponctuelles supportées en (e, e) sur $G \times G$. On pourra consulter [Ser06] à cet effet.

Proposition 2.1.2. *Les bigèbres $U\mathfrak{g}$ et U sont isomorphes et seront identifiées par la suite.*

Démonstration. Une démonstration de ce résultat est donnée dans [Ser06]. L'isomorphisme est induit par l'application $\mathfrak{g} \to U$ qui à un vecteur tangent associe lui même vu comme dérivation ponctuelle de l'algèbre des germes de fonctions en e. □

Il existe une autre interprétation de l'algèbre enveloppante comme algèbre des opérateurs différentiels invariants à gauche.

Définition 2.1.3. *Soit g un vecteur de $\mathfrak{g}$. Le* ***champ de vecteurs invariant à gauche engendré par*** *g, noté X_g, est le champ de vecteurs sur G défini par*

$$X_g(a) := T_e L_a(g)$$

pour tout a dans G.

On note U' la sous-algèbre de $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathcal{C}^\infty(G))$ (dont le produit est la composition des endomorphismes $\mathbb{R}$-linéaires de l'espace vectoriel $\mathcal{C}^\infty(G)$) engendrée par les champs de vecteurs invariants à gauche, i.e de la forme X_g pour un certain g dans $\mathfrak{g}$.

*Un **opérateur différentiel** est une somme de composées de champs de vecteurs. U' est donc l'algèbre des opérateurs différentiels invariants à gauche sur G.*

Remarque 2.1.4. *Une définition plus précise des opérateurs différentiels se trouve, par exemple, dans [God04].*

Proposition 2.1.5. *L'application $U\mathfrak{g} \to U'$ qui à une classe de monôme $g_1 g_2 \cdots g_n$ dans $U\mathfrak{g}$ associe l'opérateur différentiel invariant à gauche $X_{g_1} \circ X_{g_2} \circ \cdots \circ X_{g_n}$ est un isomorphisme d'algèbres.*

Démonstration. Voir [God04]. □

Le lemme technique suivant sera utilisé par la suite. Il lie les deux interprétations du produit sur $U\mathfrak{g}$:

Lemme 2.1.6. *Soient x un élément de $U\mathfrak{g}$, g dans $\mathfrak{g}$ et f un germe de fonction en e sur G. Alors, en utilisant la proposition 2.1.2*

$$x(X_g f) = xg(f)$$

Démonstration.

$$xg(f) = x \otimes g(f \circ \mu_G) = x(a \mapsto g(b \mapsto f(ab))) = x(a \mapsto (X_g f)(a)) = x(X_g f)$$

□

Inclusion dans le complexe des courants

Notons $\Omega^n_e(G)$ l'espace des germes de n-formes en e sur G.

Définition 2.1.7. *Un n-**courant supporté en** e est une forme linéaire sur $\Omega^n_e(G)$. Le **complexe des courants (supportés en** e**) sur** G est le $\mathbb{R}$-espace vectoriel gradué $\Lambda^* G := \Omega^*_e(G)^\vee := \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\Omega^*_e(G), \mathbb{R})$ muni de la différentielle $d^\vee_{DR}$, duale de celle de De Rham existant sur les formes différentielles.*

Le complexe de Chevalley-Eilenberg associé à $\mathfrak{g}$ peut être vu comme sous-complexe du complexe des courants supportés en e : Soit $x \otimes g_1 \wedge \cdots \wedge g_n$ un tenseur élémentaire dans $U\mathfrak{g} \otimes \Lambda^n \mathfrak{g}$. Posons

$$R(x \otimes g_1 \wedge \cdots \wedge g_n)(\bar{\omega}) := x\left(z \mapsto \omega_z(X_{g_1}(z), \cdots X_{g_n}(z))\right)$$

pour tout germe de n-forme $\bar{\omega}$. Ici, $x \in U\mathfrak{g}$ est vu comme distribution ponctuelle en e sur G. Il est clair que ce nombre ne dépend pas du représentant ω choisi.

Proposition 2.1.8. *L'application*

$$\begin{array}{rcl} R : C_*(\mathfrak{g}) & \to & \Lambda_*(G) \\ x \otimes g_1 \wedge \cdots \wedge g_n & \mapsto & \big(\bar{\omega} \mapsto R(x \otimes g_1 \wedge \cdots \wedge g_n)(w)\big) \end{array}$$

est un morphisme injectif de complexes de chaînes.

Démonstration. Commençons par vérifier que R commute aux différentielles. Il suffit d'utiliser la formule intrinsèque du bord de De Rham :

$$\begin{aligned} d_{DR}\omega(X_1, X_2, \cdots, X_n) = & \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}X_i\omega(X_1, \cdots, \hat{X}_i, \cdots, X_n) \\ & + \sum_{1\leq i<j\leq n}(-1)^{j+1}\omega(X_1, \cdots, [X_i, X_j], \cdots, \hat{X}_j, \cdots, X_n) \end{aligned}$$

pour tout germe de $n-1$-forme $\bar{\omega}$. En effet, si x est dans $U\mathfrak{g}$ et g_1, ..., g_n dans $\mathfrak{g}$, le lemme 2.1.6 permet d'écrire :

$$\begin{aligned} d_{DR}^{\vee}R(x \otimes g_1 \wedge \cdots \wedge g_n)(\bar{\omega}) &:= x\left(d_{DR}\omega(X_{g_1}, \cdots, X_{g_n})\right) \\ &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}x(X_{g_i}\omega(X_{g_1}, \cdots, \hat{X}_{g_i}, \cdots, X_{g_n})) \\ &\quad + \sum_{1\leq i<j\leq n}(-1)^{j+1}x(\omega(X_{g_1}, \cdots, [X_{g_i}, X_{g_j}], \cdots, \hat{X}_{g_j}, \cdots, X_{g_n})) \\ &= \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}xg_i(\omega(X_{g_1}, \cdots, \hat{X}_{g_i}, \cdots, X_{g_n})) \\ &\quad + \sum_{1\leq i<j\leq n}(-1)^{j+1}x(\omega(X_{g_1}, \cdots, X_{[g_i,g_j]}, \cdots, \hat{X}_{g_j}, \cdots, X_{g_n})) \\ &= Rd^{CE}(x \otimes g_1 \wedge \cdots \wedge g_n)(\bar{w}) \end{aligned}$$

Pour démontrer l'injectivité, choisissons une carte $\psi := (x_1, \cdots, x_m)$ centrée en e et définie sur le voisinage ouvert U de e sur lequel le logarithme est également défini, notons $e_1 := \frac{\partial}{\partial x_1}$, ..., $e_m := \frac{\partial}{\partial x_m}$ la base de $\mathfrak{g}$ qui s'en déduit et e^1, ..., e^m la base duale de $\mathfrak{g}^{\vee}$ associée. Rappelons que le fibré cotangent de G se trivialise grâce aux translations à gauche :

$$\begin{array}{ccc} T^*G & \to & G \times \mathfrak{g}^{\vee} \\ (z, \omega) & \mapsto & (z, \omega \circ T_eL_z) \end{array}$$

pour tout z dans G et ω dans T_z^*G. Cette identification induit un isomorphisme

$$\Omega_e^n(G) \simeq \mathcal{C}_e^{\infty}(G) \otimes \Lambda^n\mathfrak{g}^{\vee}$$

Ainsi, tout germe de n-forme sur G a un représentant qui s'écrit, via l'isomorphisme précédent, sous la forme

$$\sum_{|I|=n} f_I \otimes e^I$$

où I parcourt tous les n-uplets ordonnés $(i_1 < i_2 < \cdots < i_n)$ dans $\{1, \cdots, m\}^n$, les f_I sont des fonctions sur G, et la notation e^I désigne le vecteur de base $e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \cdots \wedge e^{i_n}$ de $\Lambda^n\mathfrak{g}^{\vee}$ lorsque $I = (i_1, \cdots, i_n)$.

En notant e_J le n-polyvecteur $e_{j_1} \wedge e_{j_2} \wedge \cdots \wedge e_{j_n}$ associé à un multi-indice $J := (j_1, \cdots, j_n)$, il est clair que

$$R(x \otimes e_J)(\sum_{|I|=n} f_I \otimes e^I) = x(f_J) \tag{2.1.1}$$

Pour tout multi-indice $\alpha := (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m)$ de $\mathbb{N}^m$, soit D^α la distribution ponctuelle définie par

$$D^\alpha(\bar{f}) := \frac{1}{\alpha!} \frac{\partial^{|\alpha|}(f \circ \psi^{-1})}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_m^{\alpha_m}}(0, \cdots, 0)$$

pour tout germe de fonction $\bar{f}$ en e. Ici, $|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_m$ et $\alpha! := \alpha_1!\alpha_2! \cdots \alpha_m!$. Il est clair [3] que la famille $\{D^\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{N}^m}$ est une base de $U\mathfrak{g}$. Si f^β désigne la fonction $z \mapsto x_1(z)^{\beta_1} x_2(z)^{\beta_2} \cdots x_m(z)^{\beta_m}$ définie sur U pour tout multi-indice $\beta := (\beta_1, \cdots, \beta_m)$, alors

$$D^\alpha(f^\beta) = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = \beta \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En combinant l'égalité précédente et l'équation (2.1.1) avec $x := D^\alpha$, il vient

$$R(D^\alpha \otimes e_I)(f^\beta \otimes e^J) = \begin{cases} 1 & \text{si } (\alpha, I) = (\beta, J) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La famille $\{f^\beta \otimes e^J\}_{(\beta,J)}$ est donc duale à la base $\{(D^\alpha \otimes e_I\}_{(\alpha,I)}$ de $C_n(\mathfrak{g})$ via R, ce qui implique que les $R(D^\alpha \otimes e_I)$ sont linéairement indépendants, d'où l'injectivité de R. □

2.1.2 Transfert de l'homotopie de Poincaré

Dans cette sous-section, nous allons rappeler comment l'exactitude du complexe des courants ponctuels s'obtient en construisant l'homotopie de Poincaré sur les germes de formes différentielles, puis démontrer que cette dernière, ou plutôt son dual, se restreint au sous-complexe $C_*(\mathfrak{g})$ pour fournir une contraction du complexe de Chevalley-Eilenberg de $\mathfrak{g}$ qui s'exprime par une formule intrinsèque [4] grâce à la structure d'algèbre de Hopf sur $U\mathfrak{g}$.

Exactitude du complexe des courants ponctuels

Le complexe des germes de formes différentielles en un point p d'une varieté différentiable M est toujours exact : c'est le lemme dit "de Poincaré".

Lemme 2.1.9. *Soient M une varieté différentiable et U un ouvert de M. Supposons que U se contracte sur un de ses points p, c'est-à-dire qu'il existe une homotopie (différentiable, laissant fixe p) $\varphi : [0,1] \times U \to U$ entre l'application identité sur U et l'application constante et égale à p sur U. Posons*

$$s\omega = \int_0^1 dt\, \iota_{\frac{\partial}{\partial t}} \varphi^* \omega$$

3. On pourra consulter [God04] pour plus de détails.
4. C'est-à-dire n'utilisant pas le groupe de Lie G qui intègre $\mathfrak{g}$.

pour toute n-forme ω définie sur un ouvert V inclus dans U, où la notation ι_X désigne le produit intérieur avec le champ de vecteur X. Alors $s\omega$ est une $(n-1)$-forme définie sur U et l'application de degré -1

$$\begin{array}{rcl} s : \Omega_p^*(M) & \to & \Omega_p^*(M) \\ \bar{\omega} & \mapsto & \overline{s\omega} \end{array} \tag{2.1.2}$$

est une contraction du complexe $\Omega_p^*(M)$, c'est-à-dire qu'elle vérifie

$$sd_{DR} + d_{DR}s = Id_{\Omega_p^*(M)}$$

Le représentant ω du germe $\bar{\omega}$ apparaissant dans (2.1.2) est évidemment choisi défini sur un ouvert inclus dans U.

Comme tout point d'une varieté admet un voisinage contractile, il s'ensuit :

Corollaire 2.1.10. *Pour toute varieté M et tout point p de M, le complexe $\Omega_p^*(M)$ est contractile. Une homotopie est fournie par l'application s du lemme de Poincaré 2.1.9. De plus, le complexe des courants en p sur M est contractile et une homotopie est donnée par $s^\vee$, l'application duale à s, de degré $+1$.*

Dans le cas où $M = G$, il existe une contraction particulière donnée par l'application exponentielle. Soit V un ouvert de $\mathfrak{g}$ contenant 0 sur lequel l'exponentielle est injective et notons U l'ouvert (contenant e) image de V. Ainsi, $\exp : V \to U$ est un difféomorphisme, dont on note $\ln : U \to V$ l'inverse.

Définition 2.1.11. *La **contraction canonique** associée au groupe G est l'application φ : $[0,1] \times U \to U$ définie par*

$$\varphi(t,a) := \exp(t \ln a)$$

pour tous t dans $[0,1]$ et a dans U.

Contraction induite sur le complexe de Chevalley-Eilenberg

L'objectif de cette sous-section est de transférer la contraction du complexe des courants sur le sous-complexe $C_*(\mathfrak{g})$. La sous-section 2.1.1 permet de traduire l'application Δ_G (resp. μ_G) sur le groupe en coproduit Δ (resp. produit μ de convolution des distributions) sur $U\mathfrak{g}$. Afin de transporter l'homotopie $s^\vee$ sur le complexe de Chevalley-Eilenberg, il faut étendre ce dictionnaire, en particulier aux applications différentiables de G dans lui-même qui laissent stable e.

Définition 2.1.12. *Soit $f : V \to W$ une application différentiable entre deux ouverts V et W de deux varietés différentiables M et N. Si p est un point de V, **l'application induite en** p **par** f est l'application linéaire $f_* : \mathcal{C}_p(M)^\vee \to \mathcal{C}_{f(p)}(N)^\vee$ définie par*

$$f_*D(\bar{h}) := D(\overline{h \circ f})$$

pour toute forme linéaire D sur $\mathcal{C}_p(M)$ et pour tout germe de fonction $\bar{h}$ dans $\mathcal{C}_{f(p)}(N)$. Dans le cas où $M = N = G$ et $f(e) = e$, l'application f_* se restreint à $U\mathfrak{g}$ en un endomorphisme de cogèbre, encore noté f_*.

L'interprétation de la contraction canonique φ définie en 2.1.11 au niveau des distributions passe par l'introduction du produit de convolution sur les endomorphismes de $U\mathfrak{g}$:

Définition 2.1.13. *Soient f et g deux $\mathbb{R}$-endomorphismes de $U\mathfrak{g}$. Leur* ***produit de convolution*** *est l'endomorphisme $f \star g$ défini par*

$$f \star g := \mu(f \otimes g)\Delta$$

Il est clair que $(\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(U\mathfrak{g}), +, \star)$ est une algèbre associative et que l'élément neutre du produit de convolution est l'endomorphisme $\eta\epsilon$. La ***projection canonique*** *de $U\mathfrak{g}$ est l'application linéaire $\mathrm{pr} : U\mathfrak{g} \to U\mathfrak{g}$ définie par*

$$\mathrm{pr} := \sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}(Id - \eta\epsilon)^{\star k}$$

L'emploi du mot projection est justifié par la proposition suivante :

Proposition 2.1.14. *La projection canonique, est à valeur dans $\mathfrak{g} \subset U\mathfrak{g}$. Elle vérifie les identités*

$$\mathrm{pr}^{\star p} \circ \mathrm{pr}^{\star q} = \begin{cases} \mathrm{pr}^{\star p} & si\ p = q \\ 0 & sinon \end{cases} \tag{2.1.3}$$

pour tous p et q entiers, ainsi que

$$\mathrm{pr}_{|\mathfrak{g}} = Id_{\mathfrak{g}}$$

Démonstration. Consulter [Reu93]. □

Remarque 2.1.15. *Les $\mathrm{pr}^{\star p}$, lorsque p parcourt $\mathbb{N}$, forment une famille d'idempotents deux à deux orthogonaux et portent le nom* ***d'idempotents eulériens*** *dans [Lod98] et [Reu93].*

Proposition 2.1.16. *Soit t dans $[-1, 1]$. Alors*

1. *L'endomorphisme de cogèbre $(\varphi_t)_* : U\mathfrak{g} \to U\mathfrak{g}$ induit par l'application différentiable*

$$\begin{array}{rcl} \varphi_t : U & \to & U \\ a & \mapsto & \varphi(t, a) \end{array}$$

   où φ est la contraction canonique définie au 2.1.11, est l'endomorphisme de cogèbre ϕ_t défini par

$$\phi_t = \sum_{n\geq 0} \frac{t^n}{n!}\mathrm{pr}^{\star n}$$

2. *Pour tout s dans $[-1, 1]$,*

$$\phi_s \circ \phi_t = \phi_{st}$$

   En particulier, l'antipode $S = \phi_{-1}$ vérifie

$$S \circ \phi_t = \phi_{-t}$$

3. Pour tout s dans $[-1,1]$,

$$\phi_t \star \phi_s = \phi_{s+t}$$

Avant de démontrer la proposition, nous allons établir deux lemmes qui donnent les interprétations des applications $\ln : U \to V$ et $\exp : V \to U$ en termes de morphismes de cogèbres :

Lemme 2.1.17. *L'application* $\ln_* : U\mathfrak{g} \to S\mathfrak{g}$ *induite par le logarithme est donnée par*

$$\ln_* = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!}\mathrm{pr}^{\star k} \tag{2.1.4}$$

où la convolution $\star$ *est a comprendre dans* $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(U\mathfrak{g}, S\mathfrak{g})$.

Démonstration du lemme 2.1.17. Rappelons que $S\mathfrak{g}$ est la cogèbre cocommutative connexe (Voir [Qui69] et [Lod08] pour une définition générale de la connexité) colibre engendrée par $\mathfrak{g}$. Ainsi, tout morphisme $\mathbb{R}$-linéaire $f : U\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ (qui envoie 1 sur 0) se prolonge de manière unique en un morphisme de cogèbres $\hat{f} : U\mathfrak{g} \to S\mathfrak{g}$ faisant commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd} U\mathfrak{g} \arrow[r, "\hat{f}"] \arrow[dr, "f"'] & S\mathfrak{g} \arrow[d, "\mathrm{proj}"] \\ & \mathfrak{g} \end{tikzcd} \tag{2.1.5}$$

où $\mathrm{proj} : S\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ est la projection canonique sur le facteur de degré 1. De plus, $\hat{f}$ s'obtient en appliquant la formule (2.1.4) en remplacant pr par f.

En fait proj peut être comprise comme l'application induite par l'opérateur de différentiation au point 0 au niveau des germes de fonction sur $\mathfrak{g}$: Si est $\bar{h}$ est un germe de fonction dont h est un représentant défini sur V, la différentielle en 0 $d_0 h : T_0\mathfrak{g} = \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ est encore définie sur V, et même sur $\mathfrak{g}$ toute entière, et représente donc un germe en 0. Ceci permet de définir l'endomorphisme d_0 de $\mathcal{C}_0(\mathfrak{g})$, qui induit l'endomorphisme d_0^* de $S\mathfrak{g}$ au niveau des distributions. Il est facile de vérifier que d_0^* et proj coïncident (une application linéaire a pour différentielle seconde l'application nulle).

Ainsi, comme $\ln_*$ est un morphisme de cogèbres, démontrer le lemme revient à démontrer la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd} U\mathfrak{g} \arrow[r, "\ln_*"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}"'] & S\mathfrak{g} \arrow[d, "d_0^*"] \\ & \mathfrak{g} \end{tikzcd}$$

– CAS OÙ $\mathfrak{g} = M_p(\mathbb{R})$ EST UNE ALGÈBRE DE MATRICES :
Dans ce cas on choisit $G = GL_p(\mathbb{R})$. L'application logarithme est alors donnée par

$$\ln z = \sum_{i\geq 1} \frac{(-1)^{i+1}}{i}(z-e)^i = \sum_{i\geq 1} \frac{(-1)^{i+1}}{i} \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} (-1)^{i-k} z^k$$

pour toute matrice z de $GL_p(\mathbb{R})$, où le produit est celui des matrices et e la matrice identité. Ainsi, pour toute fonction h définie sur V et pour tout x dans $U\mathfrak{g}$, en notant inc l'inclusion de $GL_p(\mathbb{R})$ dans $M_p(\mathbb{R})$, il vient

$$\begin{aligned}
(d_0^*\ln_* x)(h) &= x(d_0 h \circ \ln) \\
&= \sum_{i\geq 1} \frac{(-1)^{i+1}}{i} \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} (-1)^{i-k} x(z \mapsto d_0 h(\mathrm{inc}\ z^k)) \\
&= \sum_{i\geq 1} \frac{(-1)^{i+1}}{i} \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} (-1)^{i-k} x(z \mapsto d_0 h \circ \mathrm{inc}\ z^k)
\end{aligned}$$

Or l'application $z \mapsto z^k$ n'est rien d'autre que la puissance k-ième de l'identité de $GL_p(\mathbb{R})$ pour le produit de convolution, d'où

$$\begin{aligned}
(d_0^*\ln_* x)(h) &= \sum_{i\geq 1} \frac{(-1)^{i+1}}{i} \sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} (-1)^{i-k} Id^{\star k}(x)(z \mapsto d_0 h \circ \mathrm{inc}\ z) \\
&= \mathrm{pr} x(d_0 h \circ \mathrm{inc}) \\
&= \mathrm{pr} x(d_0 h) \\
&= \mathrm{pr} x(h)
\end{aligned}$$

car, comme $\mathrm{pr}x$ est dans $\mathfrak{g}$ et $d_0 h : \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ est linéaire, $\mathrm{pr}x(d_0 h \circ \mathrm{inc}) = d_0 h(\mathrm{pr}x) = \mathrm{pr}x(h)$.

- Cas où $\mathfrak{g}$ est arbitraire :
  Par le théorème d'Ado [Jac62], $\mathfrak{g}$ s'identifie à une sous-algèbre de Lie d'une algèbre de matrices $M_p(\mathbb{R})$, c'est-à-dire qu'il existe un morphisme injectif d'algèbres de Lie $\rho : \mathfrak{g} \to M_p(\mathbb{R})$. L'ouvert $U \subset G$ peut être choisi assez petit pour être isomorphe, comme groupe de Lie local, à un ouvert (contenant la matrice identité e et que nous noterons encore U) du sous-groupe de $GL_p(\mathbb{R})$ qui intègre $\mathfrak{g} \overset{\rho}{\hookrightarrow} M_p(\mathbb{R})$. Ceci donne lieu à un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
U \subset G \arrow[r, "\ln"] \arrow[d, hook] & V \subset \mathfrak{g} \arrow[d, hook, "\rho_{|V}"] \\
GL_p(\mathbb{R}) \arrow[r, "\ln"] & M_p(\mathbb{R})
\end{tikzcd}$$

  où les flèches horizontales sont des injections (l'une de groupes et l'autre d'algèbres de Lie). En appliquant le foncteur “distributions supportées en l'élément neutre”, on en déduit le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{g} \arrow[d, "\rho"] & U\mathfrak{g} \arrow[l, two heads, "\mathrm{pr}"'] \arrow[r, "\ln_*"] \arrow[d, hook, "i"] & S\mathfrak{g} \arrow[d, hook, "j"] \\
M_p(\mathbb{R}) & UM_n(\mathbb{R}) \arrow[l, two heads, "\mathrm{pr}"'] \arrow[r, "\ln_*"] & SM_p(\mathbb{R})
\end{tikzcd} ,$$

où $i := U\rho$ et $j := S\rho$ sont des morphismes d'algèbres de Hopf injectifs et les flèches horizontales du carré de droite des isomorphismes de cogèbres. L'application $\ln_* : U\mathfrak{g} \to S\mathfrak{g}$ est la seule application linéaire faisant commuter le carré de droite du diagramme précédent. Or un calcul direct utilisant que $j_{|\mathfrak{g}} = i_{|\mathfrak{g}} = \rho$ nous montre que

$$j \circ \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!}\mathrm{pr}^{\star k} = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!}\mathrm{pr}^{\star k} \circ i = \ln_* \circ i$$

où la deuxième égalité se déduit du lemme appliqué aux algèbres de matrices, démontré précédemment. Par unicité,

$$\ln_* = \sum_{k\geq 0} \frac{1}{k!}\mathrm{pr}^{\star k}$$

sur $U\mathfrak{g}$.

□

De la même manière, une formule algébrique permet de calculer l'application $\exp_* : S\mathfrak{g} \to U\mathfrak{g}$ induite sur les disributions par l'exponentielle :

Lemme 2.1.18. *L'isomorphisme de cogèbres* $\exp_* : S\mathfrak{g} \to U\mathfrak{g}$ *induit par l'application exponentielle* $V \subset \mathfrak{g} \to U \subset G$ *est l'application de symétrisation de Poincaré-Birkhoff-Witt* $\beta : S\mathfrak{g} \to U\mathfrak{g}$ *: elle est donnée sur tout tenseur élémentaire* $g_1g_2\cdots g_p$ *de longueur* p *par*

$$\exp_*(g_1g_2\cdots g_p) = \sum_{\sigma\in\Sigma_p} g_{\sigma(1)}g_{\sigma(2)}\cdots g_{\sigma(p)} =: \beta(g_1g_2\cdots g_p) \tag{2.1.6}$$

où Σ_p *est le groupe des permutations de l'ensemble* $\{1, 2, \cdots, p\}$.

Démonstration du lemme 2.1.18. Comme $\exp \circ \ln = Id_U$ et $\ln \circ \exp = Id_V$, les isomorphismes de cogèbres $\exp_*$ et $\ln_*$ sont inverses l'un de l'autre. Il suffit donc de montrer que β est inverse à gauche de $\ln_*$ en utilisant l'égalité (2.1.4) du lemme précédent. Soit x un élément de $U\mathfrak{g}$. Comme $\mathrm{pr}^{\star k}(x)$ est une somme de tenseurs élémentaires de longueur k pour tout entier k, il vient

$$\beta \circ \ \ln_*(x) = \sum_{k\geq 0}\sum_{(x)}\sum_{\sigma\in\Sigma_k} \frac{1}{k!^2}\mathrm{pr}\, x^{(1)}\mathrm{pr}\, x^{(2)}\cdots \mathrm{pr}\, x^{(k)}$$

Soit p un entier. Par cocommutativité du coproduit sur $U\mathfrak{g}$, nous avons

$$\begin{aligned}\beta \circ \mathrm{pr}^{\star p}(x) &= \sum_{(x)} \beta(\mathrm{pr}(x^{(1)})\mathrm{pr}(x^{(2)})\cdots \mathrm{pr}(x^{(p)}))\\ &= \sum_{(x)} \frac{1}{p!}\sum_{\sigma\in\Sigma_p} \mathrm{pr}(x^{(\sigma(1))})\mathrm{pr}(x^{(\sigma(2))})\cdots \mathrm{pr}(x^{(\sigma(p))}) \ = \sum_{(x)} \mathrm{pr}(x^{(1)})\mathrm{pr}(x^{(2)})\cdots \mathrm{pr}(x^{(p)}) = \mathrm{pr}^{\star p}(x)\end{aligned}$$

où la première convolution s'effectue dans $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(U\mathfrak{g}, S\mathfrak{g})$ et la dernière dans $\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(U\mathfrak{g})$. Ainsi

$$\beta \circ \ln_* = \sum_{p\geq 0} \frac{1}{p!}\mathrm{pr}^{\star p}$$

Dans l'algèbre de convolution $(\mathrm{End}_{\mathbb{R}}(U\mathfrak{g}), \star, \eta\epsilon)$, l'élément $Id - \eta\epsilon$ est localement nilpotent ce qui permet de définir un morphisme d'algèbres

$$\begin{array}{rcl} \pi : \mathbb{Q}[[X]] & \to & \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(U\mathfrak{g}) \\ X & \mapsto & Id - \eta\epsilon \end{array}$$

qui commute aux opérations de composition. Il est clair que

$$\mathrm{pr} = \pi(\ln(1+X)) := \pi(\sum_{k\geq 1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} X^k)$$

$$\beta \circ \ln_* = \sum_{p\geq 0} \frac{1}{p!} \mathrm{pr}^{\star k} = \pi(\exp(\ln(1+X)))$$

Or $\exp(\ln(1+X)) = 1 + X$ dans $\mathbb{Q}[[X]]$, d'où

$$\beta \circ \ln_* = \eta\epsilon + Id - \eta\epsilon = Id$$

ce qui achève la démonstration du lemme. □

Démonstration de la proposition 2.1.16. En remarquant que l'application $\alpha_t : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ qui envoie tout g dans $\mathfrak{g}$ sur tg induit l'endomorphisme de bigèbre $(\alpha_t)_* : S\mathfrak{g} \to S\mathfrak{g}$ vérifiant

$$(\alpha_t)_*(g_1 g_2 \cdots g_n) = t^p g_1 g_2 \cdots g_p$$

pour tout tenseur élémentaire $g_1 g_2 \cdots g_p$ de longueur p dans $S\mathfrak{g}$, et en utilisant les lemmes 2.1.17 et 2.1.18, il est clair que

$$(\varphi_t)_* = (\exp \circ \alpha_t \circ \ln)_* = (\exp)_* \circ (\alpha_t)_* \circ (\ln)_* = \sum_{p\geq 0} \frac{t^p}{p!} \mathrm{pr}^{\star p} = \phi_t$$

ce qui démontre le point 1).

Les points 2. et 3. s'obtiennent par un calcul direct, faisant intervenir la relation (2.1.3) pour le 2.. □

Définition 2.1.19. *Pour tout réel t, $A_t : U\mathfrak{g}^{\otimes 2} \to U\mathfrak{g}$ est l'application (bi-)linéaire définie par*

$$A_t(x,y) := A_t(x \otimes y) := \sum_{(x)} \phi_{-t}(x^{(1)}) \phi_t(x^{(2)} y)$$

pour tous x et y sans $U\mathfrak{g}$.

Proposition 2.1.20. *Soient x dans $U\mathfrak{g}$ et g dans $\mathfrak{g}$. Alors*

$$A_t(x,g) \in \mathfrak{g}$$

pour tout réel t.

Démonstration. Soient x dans $U\mathfrak{g}$ et g dans $\mathfrak{g}$. En vertu de A.1.5, il suffit de montrer que $A_t(x,g)$ est primitif. Comme Δ est un morphisme d'algèbres, ϕ_t est un endomorphisme de cogèbre, et g est primitif, il vient

$$\begin{aligned}\Delta(A_t(x,g)) =&\Delta(\phi_{-t}(x^{(1)})\phi_t(x^{(2)}g))\\ =&\phi_{-t}(x^{(1)})\phi_t(x^{(2)}g)\otimes\phi_{-t}(x^{(3)})\phi_t(x^{(4)})+\phi_{-t}(x^{(1)})\phi_t(x^{(2)})\otimes\phi_{-t}(x^{(3)})\phi_t(x^{(4)}g)\\ =&A_t(x,g)\otimes 1+1\otimes A_t(x,g)\end{aligned}$$

□

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le théorème de transfert de l'homotopie de Poincaré :

Théorème 2.1.21. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie sur $\mathbb{R}$ et G un groupe de Lie dont l'espace tangent en l'élément neutre est $\mathfrak{g}$. L'homotopie $s^\vee$ du complexe des courants ponctuels sur G du 2.1.10 associée à la contraction canonique φ de G définie en 2.1.11 se restreint au sous-complexe de Chevalley-Eilenberg en une contraction notée s. De plus, s est donnée sur les chaînes de $C_p(\mathfrak{g})$ par*

$$s(x\otimes g_1\wedge g_2\wedge\cdots\wedge g_p)=\sum_{(x)}\int_0^1 dt\,\phi_t(x^{(1)})\otimes\mathrm{pr}(x^{(2)})\wedge A_t(x^{(3)},g_1)\wedge\cdots\wedge A_t(x^{(p+2)},g_p) \quad (2.1.7)$$

pour tous x dans $U\mathfrak{g}$ et g_1, ..., g_p dans $\mathfrak{g}$.

Démonstration. Les notations sont les mêmes que celles de la proposition 2.1.8. Il s'agit de montrer que $R\circ s=s^\vee\circ R$. Soient g_1, ..., g_p dans $\mathfrak{g}$, x dans $U\mathfrak{g}$, et $\bar\omega$ une $p-1$-forme définie sur l'ouvert V sur lequel ln est un difféomorphisme. Alors

$$\begin{aligned}s^\vee\circ R(x\otimes g_1\wedge\cdots\wedge g_p)(\bar\omega) &= \int_0^1 dt\, x\left(z\mapsto \omega_{\varphi_t(z)}(T_{(t,z)}\varphi\,\frac{\partial}{\partial t},T_{(t,z)}\varphi\,X_{g_1}(z),\cdots,T_{(t,z)}\varphi\,X_{g_p}(z))\right)\\ &= \int_0^1 dt\, x\left(z\mapsto \omega_{\varphi_t(z)}(\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t,z),T_{(t,z)}\varphi\,T_eL_zg_1,\cdots,T_{(t,z)}\varphi T_eL_zg_p)\right)\end{aligned}$$

où la notation $f(z_1,\cdots,z_{p+2})$ désigne la fonction $(z_1,z_2,\cdots,z_{p+2})\mapsto f(z_1,z_2,\cdots,z_{p+2})$ pour toute fonction f de $U^{\times(p+2)}$ dans $\mathbb{R}$. Or, pour tout (t,z) dans $[0,1]\times U$, d'une part

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}(t,z)=T_eL_{\varphi(t,z)}\mathrm{ln}z$$

et d'autre part, vu que $\varphi_t^{-1}(z)=\varphi_{-t}(z)$ pour tout z dans U :

$$T_{(t,z)}\varphi\,T_eL_z=T_e\varphi_t\circ L_z=T_eL_{\varphi_t(z)}T_{\varphi_t(z)}L_{\varphi_{-t}(z)}T_e\varphi_t\circ L_z=T_eL_{\varphi_t(z)}T_eL_{\varphi_{-t}(z)}\circ\varphi_t\circ L_z$$

Ainsi

$$s^\vee \circ R(x \otimes g_1 \wedge \cdots \wedge g_p)(\bar{\omega}) = \int_0^1 dt\, x^{(1)} \big(\omega_{\varphi_t(z_1)}\big(T_eL_{\varphi_t(z_1)}x^{(2)}(\ln z_2), T_eL_{\varphi_t(z_1)}x^{(3)}(T_eL_{\varphi_{-t}(z_3)} \circ \varphi_t \circ L_z g_1), \cdots$$
$$\cdots, T_eL_{\varphi_t(z_1)}x^{(p+2)}(T_eL_{\varphi_{-t}(z_{p+2})} \circ \varphi_t \circ L_z g_p)\big)\big)$$

Comme $\mathfrak{g}$ est un espace vectoriel, l'action des éléments de $U\mathfrak{g}$ sur les germes de fonction s'étend en une action sur les applications à valeurs dans $\mathfrak{g}$: c'est le sens de l'abus de notation $x^{(3)}(T_eL_{\varphi_{-t}(z_3)} \circ \varphi_t \circ L_z g_1)$ dans l'égalité précédente, qui désigne le vecteur $x^{(3)}(z_3 \mapsto T_eL_{\varphi_{-t}(z_3)} \circ \varphi_t \circ L_z g_1)$ de $\mathfrak{g} = T_eG$. Or, pour tout y dans $U\mathfrak{g}$, le lemme 2.1.17 nous donne :

$$y(z_2 \mapsto T_eL_{\varphi_t(z_1)}\ln) = T_eL_{\varphi_t(z_1)}\mathrm{pr}\, y = X_{\mathrm{pr}\, y} \circ \varphi_t(z_1) \tag{2.1.8}$$

De même, pour chaque i entre 1 et p :

$$y(z_{i+2} \mapsto T_eL_{\varphi_t(z_1)}T_eL_{\varphi_t(z_{i+2})} \circ \varphi_t \circ L_{z_{i+2}}g_i) = T_eL_{\varphi_t(z_1)}y(z_{i+2} \mapsto T_eL_{\varphi_t(z_{i+2})} \circ \varphi_t \circ L_{z_{i+2}}g_i)$$

Afin de calculer $y(z_{i+2} \mapsto T_eL_{\varphi_t(z_{i+2})} \circ \varphi_t \circ L_{z_{i+2}}g_i)$, considérons des coordonnées ξ_1, ..., ξ_m au voisinage de e et notons $\frac{\partial}{\partial \xi_1}$, ..., $\frac{\partial}{\partial \xi_m}$ la base de $\mathfrak{g}$ associée. Alors, en utilisant les propositions 2.1.2 et 2.1.16 pour obtenir la troisième et la quatrième égalité :

$$\begin{aligned}
y(z_{i+2} \mapsto T_eL_{\varphi_t(z_{i+2})}\circ\varphi_t\circ L_{z_{i+2}}g_i) &= \sum_{j=1}^m y\left(z_{i+2} \mapsto g_i(a \mapsto \xi_j \circ L_{\varphi_t(z_{i+2})} \circ \varphi_t \circ L_{z_{i+2}}(a))\right) \frac{\partial}{\partial \xi_j} \\
&= \sum_{j=1}^m \sum_{(y)} y^{(1)} \otimes y^{(2)} \otimes g_i \left((z'_{i+2}, z''_{i+2}, a) \mapsto \xi_j \circ L_{\varphi_t(z'_{i+2})}\circ\varphi_t \circ L_{z''_{i+2}}(a)\right) \frac{\partial}{\partial \xi_j} \\
&= \sum_{j=1}^m \sum_{(y)} y^{(1)} \otimes y^{(2)} g_i \left((z_{i+2}, a) \mapsto \xi_j \circ L_{\varphi_t(z_{i+2})} \circ \varphi_t(a)\right) \\
&= \sum_{j=1}^m \sum_{(y)} \phi_{-t}(y^{(1)})\phi_t(y^{(2)}g_i)(\xi_j) \frac{\partial}{\partial \xi_j} \\
&= A_t(y, g_i)
\end{aligned}$$

D'où

$$y(z_{i+2} \mapsto T_eL_{\varphi_t(z_1)}T_eL_{\varphi_t(z_{i+2})} \circ \varphi_t \circ L_{z_{i+2}}g_i) = T_eL_{\varphi_t(z_1)}A_t(y, g_i) = X_{A_t(y,g_i)} \circ \varphi_t(z_1) \tag{2.1.9}$$

A l'aide des équations (2.1.8) et (2.1.9), il vient

$$\begin{aligned}
s^\vee \circ R(x \otimes g_1 \wedge \cdots \wedge g_p)(\bar{\omega}) &= \sum_{(x)} \int_0^1 dt\, x^{(1)} \big(\omega_{\varphi_t(z_1)}\big(X_{\mathrm{pr}\, x^{(2)}} \circ \varphi_t(z_1), X_{A_t(x^{(3)},g_1)} \circ \varphi_t(z_1), \cdots, X_{A_t(x^{(p+2)},g_p)} \circ \varphi_t(z_1)\big)\big) \\
&= \sum_{(x)} \int_0^1 dt\, \phi_t(x^{(1)}) \big(\omega_z\big(X_{\mathrm{pr}\, x^{(2)}}(z), X_{A_t(x^{(3)},g_1)}(z), \cdots, X_{A_t(x^{(p+2)},g_p)}(z)\big)\big) \\
&= R \circ s(x \otimes g_1 \wedge \cdots \wedge g_p)(\bar{\omega})
\end{aligned}$$

ce qui montre que $s^\vee$ se restreint à $C_*(\mathfrak{g})$ et que cette restriction est bien s. Pour vérifier que s est une contraction, il suffit d'utiliser le fait que $s^\vee$ en est une :

$$R(d^{CE}s + sd^{CE}) = (d^\vee_{DR}s^\vee + s^\vee d_{DR})R = R$$

en effet, comme R est injective, cela implique que

$$d^{CE}s + sd^{CE} = Id_{C_*(\mathfrak{g})}$$

et termine la démonstration du théorème. □

Ainsi, nous disponsons d'une contraction s de $C_*(\mathfrak{g})$. La section suivante a pour but de montrer comment déduire de s une autre contraction, cette fois-ci pour le complexe de Koszul $CK_*(U\mathfrak{g})$ de $\mathfrak{g}$ introduit au chapitre 1.

2.2 Contraction du complexe de Koszul

Dans cette section, nous allons construire une contraction $h : CK_*(U\mathfrak{g}) \to CK_{*+1}(U\mathfrak{g})$ du complexe de Koszul de $\mathfrak{g}$ à l'aide de la contraction s du complexe de Chevalley-Eilenberg introduite en (2.1.7). Ensuite, nous verrons comment passer outre l'hypothèse de finitude de la dimension de $\mathfrak{g}$, montrant ainsi l'existence d'une contraction bien définie de $CK_*(U\mathfrak{g})$ dès lors que le corps de base est $\mathbb{R}$.

2.2.1 Transfert de la contraction au complexe de Koszul

Les notations sont les mêmes qu'au 1.2.2. En particulier, l'application $E : U\mathfrak{g} \to U\mathfrak{g}^e$ est définie par $E := (Id \otimes S)\Delta$, fait commuter le diagramme (1.2.1), et détermine la structure de $U\mathfrak{g}$-module à droite sur $U\mathfrak{g}^e$. De plus, comme l'application

$$\begin{array}{rcl} \theta'' : CK_*(U\mathfrak{g}) & \to & U\mathfrak{g}^e \otimes_{U\mathfrak{g}} C_*(\mathfrak{g}) \\ x \otimes g_1 \wedge \cdots \wedge g_n \otimes y & \mapsto & x \otimes y \otimes 1 \otimes g_1 \wedge \cdots \wedge g_n \end{array} \tag{2.2.1}$$

est un isomorphisme de complexes de $U\mathfrak{g}$-bimodules, ce qui est sous-entendu dans la définition 1.2.7, il pourrait sembler naturel de définir la contraction h du complexe de Koszul recherchée en transportant l'application $Id_{U\mathfrak{g}^e} \otimes s$ sur $CK_*(U\mathfrak{g})$ via θ''. Malheureusement, $Id_{U\mathfrak{g}^e} \otimes s$ n'est pas bien définie sur $U\mathfrak{g}^e \otimes_{U\mathfrak{g}} C_*(\mathfrak{g})$ car s n'est pas $U\mathfrak{g}$-linéaire. Pour y remédier, procédons de manière analogue à ce qui a été fait en 1.2.3 pour forcer la $U\mathfrak{g}^e$-linéarité de l'application G_*^B : Commençons par définir l'application de degré +1 $\tilde{h} : U\mathfrak{g}^e \otimes_{U\mathfrak{g}} C_*(\mathfrak{g}) \to U\mathfrak{g}^e \otimes_{U\mathfrak{g}} C_*(\mathfrak{g})$ en degré n en posant

$$\tilde{h}(x \otimes y \otimes z \otimes g_1 \wedge \cdots \wedge g_n) := \sum_{(x)} 1 \otimes x^{(1)}y \otimes s(x^{(2)}z \otimes g_1 \wedge \cdots \wedge g_n) \tag{2.2.2}$$

pour tous x, y, z, w dans $U\mathfrak{g}$ et g_1, ..., g_n dans $\mathfrak{g}$.

Proposition 2.2.1. *L'application $\tilde{h}$ est une contraction bien définie du complexe $U\mathfrak{g}^e \otimes_{U\mathfrak{g}} C_*(\mathfrak{g})$.*

Démonstration. Soient n un entier, x, y, z, w dans $U\mathfrak{g}$ et g_1, ..., g_n dans $\mathfrak{g}$. Il est clair que la formule (2.2.2) défini a priori une application sur $U\mathfrak{g}^e \otimes C_n(\mathfrak{g})$. Pour voir que $\tilde{h}$ est bien définie sur $U\mathfrak{g}^e \otimes_{U\mathfrak{g}} C_n(\mathfrak{g})$, il faut vérifier que $(x \otimes y)E(w) \otimes z \otimes g_1 \wedge \cdots \wedge g_n$ et $x \otimes y \otimes wz \otimes g_1 \wedge \cdots \wedge g_n$ ont même image par $\tilde{h}$. En utilisant notamment la structure d'algèbre de Hopf cocommutative sur $U\mathfrak{g}$, il vient

$$\begin{aligned}\tilde{h}((x \otimes y)E(w) \otimes z \otimes g_1 \wedge \cdots \wedge g_n) &= \sum_{(w)} \tilde{h}(xw^{(1)} \otimes S(w^{(2)})y \otimes z \otimes g_1 \wedge \cdots \wedge g_n) \\ &= \sum_{(w)} \sum_{(x)} 1 \otimes x^{(1)} w^{(1)} S(w^{(2)}) y \otimes x^{(2)} w^{(3)} z \otimes g_1 \wedge \cdots \wedge g_n \\ &= \sum_{(w)} \sum_{(x)} 1 \otimes x^{(1)} y \otimes x^{(2)} wz \otimes g_1 \wedge \cdots \wedge g_n \\ &= \tilde{h}(x \otimes y \otimes wz \otimes g_1 \wedge \cdots \wedge g_n)\end{aligned}$$

ce qui prouve que $\tilde{h}$ est bien définie.

D'autre part, nous savons par le théorème 2.1.21 que s est une contraction de la résolution de Chevalley-Eilenberg donc

$$\begin{aligned}\Big((Id \otimes d^{CE})\tilde{h} + \tilde{h}(Id \otimes d^{CE})\Big)(x \otimes y \otimes z \otimes g_1 \wedge \cdots \wedge g_n) &= \sum_{(x)} Id \otimes (sd^{CE} + d^{CE}s)\big(1 \otimes x^{(1)} y \otimes x^{(2)} z \otimes g_1 \wedge \cdots \wedge g_n\big) \\ &= \sum_{(x)} 1 \otimes x^{(1)} y \otimes x^{(2)} z \otimes g_1 \wedge \cdots \wedge g_n \\ &= \sum_{(x)} (1 \otimes x^{(1)} y) E(x^{(2)}) \otimes z \otimes g_1 \wedge \cdots \wedge g_n \\ &= \sum_{(x)} x^{(1)} \otimes S(x^{(2)}) x^{(3)} y \otimes z \otimes g_1 \wedge \cdots \wedge g_n \\ &= x \otimes y \otimes z \otimes g_1 \wedge \cdots \wedge g_n\end{aligned}$$

d'où l'identité de contraction voulue :

$$(Id \otimes d^{CE})\tilde{h} + \tilde{h}(Id \otimes d^{CE}) = Id_{U\mathfrak{g}^e \otimes_{U\mathfrak{g}} C_*(\mathfrak{g})}$$

□

Nous en déduisons la contraction h du complexe de Koszul recherchée :

Corollaire 2.2.2. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie de dimension finie sur $\mathbb{R}$. L'application linéaire graduée de degré $+1$ $h : CK_*(U\mathfrak{g}) \to CK_*(U\mathfrak{g})$ définie en degré n par*

$$h(x \otimes g_1 \wedge \cdots \wedge g_n \otimes y) := \int_0^1 dt\, \phi_t(x^{(1)}) \otimes \mathrm{pr}\, x^{(2)} \wedge A_t(x^{(3)}, g_1) \wedge \cdots \wedge A_t(x^{(n+2)}, g_n) \otimes \phi_{1-t}(x^{(n+3)}) y \tag{2.2.3}$$

pour tous x, y dans $U\mathfrak{g}$ et g_1, ..., g_n dans $\mathfrak{g}$ est une contraction du complexe de Koszul de $\mathfrak{g}$.

Démonstration. Il suffit de montrer que h s'obtient en transportant $\tilde{h}$ à l'aide de l'isomorphisme de complexes θ'' défini en (2.2.1), i.e

$$\theta'' h = \tilde{h}\theta''$$

Ce qui se fait par un calcul direct : pour x, y dans $U\mathfrak{g}$ et g_1, ..., g_n dans $\mathfrak{g}$, la proposition 2.1.16 permet d'écrire, en remarquant que $\phi_1 = Id$:

$$\begin{aligned}
\tilde{h}\theta''(x \otimes g_1 \wedge \cdots \wedge g_n \otimes y) &= \sum_{(x)} \int_0^1 dt\ 1 \otimes x^{(n+3)} y \otimes \phi_t(x^{(1)}) \otimes \mathrm{pr}\, x^{(2)} \wedge A_t(x^{(3)}, g_1) \wedge \cdots \wedge A_t(x^{(n+2)}, g_n) \\
&= \sum_{(x)} \int_0^1 dt\ \phi_t(x^{(1)}) \otimes S(\phi_t(x^{(n+4)})) x^{(n+3)} y \otimes 1 \otimes \mathrm{pr}\, x^{(2)} \wedge A_t(x^{(3)}, g_1) \wedge \cdots \\
&\qquad \cdots \wedge A_t(x^{(n+2)}, g_n) \\
&= \sum_{(x)} \int_0^1 dt\ \phi_t(x^{(1)}) \otimes \phi_{1-t}(x^{(n+3)}) y \otimes 1 \otimes \mathrm{pr}\, x^{(2)} \wedge A_t(x^{(3)}, g_1) \wedge \cdots \wedge A_t(x^{(n+2)}, g_n) \\
&= \theta'' h(x \otimes g_1 \wedge \cdots \wedge g_n \otimes y)
\end{aligned}$$

□

2.2.2 Supression de l'hypothèse de finitude de la dimension

Dans tout le deuxième chapitre, nous avons supposé que l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ était de dimension finie sur $\mathbb{R}$, ce qui a permis d'interpréter l'algèbre enveloppante $U\mathfrak{g}$ comme l'espace des distributions ponctuelles supportées en l'élément neutre e d'un groupe de Lie G intégrant $\mathfrak{g}$, et le complexe de Chevalley-Eilenberg comme sous-complexe du complexe des courants ponctuels sur G. L'existence du difféomorphisme local exponentielle impliquant celle d'une contraction “canonique” φ d'un voisinage de e, nous avons ensuite pu restreindre l'homotopie de Poincaré qui lui est associée afin de construire la contraction s de $C_*(\mathfrak{g})$ voulue. Le fait que s soit une homotopie est alors une conséquence directe du lemme de Poincaré, mais la formule (2.1.7) faisant sens en dimension quelconque, puisqu'elle n'utilise [5] que la structure d'algèbre de Hopf cocommutative connexe de $U\mathfrak{g}$, il est naturel de se demander si elle définit toujours une contraction de la résolution de Chevalley-Eilenberg. Nous allons voir que c'est bien le cas, en démontrant directement que s vérifie la formule de contraction, ce qui impliquera au passage(il suffit en effet de reprendre mot pour mot la démonstration de la proposition 2.2.1) que la formule (2.2.3) définit une contraction h du complexe de Koszul sans hypothèse sur la dimension de $\mathfrak{g}$, et permettra alors d'appliquer la stratégie de contruction du quasi-inverse de l'application d'antisymétrisation annoncée au 1.2.10 dans le cas où l'anneau de base est $\mathbb{R}$.

Commençons par quelques lemmes qui seront utiles pour démontrer que la formule (2.1.7) définit bien une contraction.

5. Alors que l'interprétation géométrique de $C_*(\mathfrak{g})$ permet de voir qu'elle provient de l'homotopie de Poincaré. En particulier, la contraction ϕ de $U\mathfrak{g}$ provient de la contraction φ dont la construction nécéssite la bijectivité locale de l'exponentielle qui n'a pas de raison d'être satisfaite en dimension infinie même si il est possible de donner un sens au groupe G dans ce cadre.

Lemme 2.2.3. *Soient t dans $[-1,1]$, g dans $\mathfrak{g}$ et x dans $U\mathfrak{g}$. Alors*

1. $$\frac{d}{dt}\phi_t = \phi_t \star \mathrm{pr} = \mathrm{pr} \star \phi_t$$

2. $$\frac{d}{dt}A_t(x,g) = \mathrm{pr}(xg) + \sum_{(x)} [A_t(x^{(1)}, g), \mathrm{pr}\, x^{(2)}]$$

Démonstration. Le point 1. s'obtient par un calcul direct. Pour le point 2. il suffit de remarquer que pour tout y dans $U\mathfrak{g}$, comme Δ est un morphisme d'algèbres,

$$\Delta(yg) = \sum_{(y)} y^{(1)}g \otimes y^{(2)} + y^{(1)} \otimes y^{(2)}g\ ,$$

puis d'écrire, en utilisant le point 1. et le point 3. de la proposition 2.1.16 associé à la cocommutativité du coproduit dans l'avant-dernière ligne :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}A_t(x,g) &= \frac{d}{dt}\sum_{(x)} \phi_{-t}(x^{(1)})\phi_t(x^{(2)}g) \\
&= \sum_{(x)} \frac{d}{dt}\left(\phi_{-t}(x^{(1)})\right)\phi_t(x^{(2)}g) + \phi_{-t}(x^{(1)})\frac{d}{dt}\left(\phi_t(x^{(2)}g)\right) \\
&= -\sum_{(x)} \mathrm{pr}\, x^{(1)}\phi_{-t}(x^{(2)})\phi_t(x^{(3)}g) + \sum_{(x)} \phi_{-t}(x^{(1)})\ (\phi_t \star \mathrm{pr})(x^{(2)}g) \\
&= -\sum_{(x)} \mathrm{pr}\, x^{(1)}A_t(x^{(2)},g) + \sum_{(x)} \phi_{-t}(x^{(1)})\phi_t(x^{(2)}g)\mathrm{pr}\, x^{(3)} + \sum_{(x)} \phi_{-t}(x^{(1)})\phi_t(x^{(2)})\mathrm{pr}(x^{(3)}g) \\
&= -\sum_{(x)} \mathrm{pr}\, x^{(1)}A_t(x^{(2)},g) + \sum_{(x)} A_t(x^{(1)},g)\mathrm{pr}(x^{(2)}) + \sum_{(x)} \underbrace{\phi_{-t}\star\phi_t}_{=\eta\epsilon}(x^{(1)})\mathrm{pr}(x^{(2)}g) \\
&= \sum_{(x)} [A_t(x^{(1)},g), \mathrm{pr}\, x^{(2)}] + \mathrm{pr}(xg)
\end{aligned}$$

□

Lemme 2.2.4. *Soient g, h deux éléments de $\mathfrak{g}$, et x dans $U\mathfrak{g}$. Alors, pour tout réel t :*

$$-\sum_{(x)} [A_t(x^{(1)},g), A_t(x^{(2)},h)] = A_t(xg,h) - A_t(xh,g) - A_t(x,[g,h])$$

Démonstration. En premier lieu, remarquons que

$$A_t(xg,h) = \sum_{(xg)} \phi_{-t}((xg)^{(1)})\phi_t((xg)^{(2)}h) = \sum_{(x)} \phi_{-t}(x^{(1)}g)\phi_t(x^{(2)}h) + \phi_{-t}(x^{(1)})\phi_t(x^{(2)}gh)$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
A_t(xg,h) - A_t(xh,g) &= \sum_{(x)} \phi_{-t}(x^{(1)}g)\phi_t(x^{(2)}h) + \phi_{-t}(x^{(1)})\phi_t(x^{(2)}gh) \\
&\quad - \sum_{(x)} \phi_{-t}(x^{(1)}h)\phi_t(x^{(2)}g) - \phi_{-t}(x^{(1)})\phi_t(x^{(2)}hg) \\
&= \sum_{(x)} \phi_{-t}(x^{(1)}g)\phi_t(x^{(2)}h) - \sum_{(x)} \phi_{-t}(x^{(1)}h)\phi_t(x^{(2)}g) + A_t(x,[g,h])
\end{aligned}$$

i.e

$$A_t(gx,h) - A_t(hx,g) - A_t(x,[g,h]) = \sum_{(x)} \phi_{-t}(x^{(1)}g)\phi_t(x^{(2)}h) - \sum_{(x)} \phi_{-t}(x^{(1)}h)\phi_t(x^{(2)}g) \quad (2.2.4)$$

D'autre part, pour tout y dans $U\mathfrak{g}$ et tout k dans $\mathfrak{g}$

$$0 = \eta\epsilon(yk) = \sum_{(y)} \phi_{-t}(y^{(1)}k)\phi_t(y^{(2)}) + \phi_{-t}(y^{(1)})\phi_t(y^{(2)}k) = \sum_{(y)} \phi_{-t}(y^{(1)}k)\phi_t(y^{(2)}) + A_t(y,k)$$

d'où

$$A_t(y,k) = -\sum_{(y)} \phi_{-t}(y^{(1)}k)\phi_t(y^{(2)})$$

ce qui permet d'écrire, avec $(y,k) = (x^{(1)},g)$ et $(y,k) = (x^{(1)},h)$:

$$\begin{aligned}
\sum_{(x)}[A_t(x^{(1)},g), A_t(x^{(2)},h)] &= \sum_{(x)} A_t(x^{(1)},g)A_t(x^{(2)},h) - A_t(x^{(1)},h), A_t(x^{(2)},g) \\
&= \sum_{(x)} -\phi_{-t}(x^{(1)}g)\phi_t(x^{(2)})\phi_{-t}(x^{(3)})\phi_t(x^{(4)}h) + \phi_{-t}(x^{(1)}h)\phi_t(x^{(2)})\phi_{-t}(x^{(3)})\phi_t(x^{(4)}g) \\
&= -\sum_{(x)} \phi_{-t}(x^{(1)}g)\underbrace{\phi_t \star \phi_{-t}}_{=\eta\epsilon}(x^{(2)})\phi_t(x^{(3)}h) + \sum_{(x)} \phi_{-t}(x^{(1)}h)\underbrace{\phi_t \star \phi_{-t}}_{=\eta\epsilon}(x^{(2)})\phi_t(x^{(3)}g) \\
&= -\sum_{(x)} \phi_{-t}(x^{(1)}g)\phi_t(x^{(2)}h) + \sum_{(x)} \phi_{-t}(x^{(1)}h)\phi_t(x^{(2)}g)
\end{aligned}$$

prouvant ainsi que le second membre de l'égalité (2.2.4) est précisément $-\sum_{(x)}[A_t(x^{(1)},g), A_t(x^{(2)},h)]$.

□

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer et de démontrer la version générale, i.e ne nécessitant pas de supposer $\mathfrak{g}$ de dimension finie, du théorème 2.1.21 :

Théorème 2.2.5. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur $\mathbb{R}$. Le résolution de Chevalley-Eilenberg $C_*(\mathfrak{g})$ est contractile, et une contraction de ce complexe est donnée par l'application linéaire (graduée de degré $+1$) $s : C_*(\mathfrak{g}) \to C_*(\mathfrak{g})$, définie par*

$$s(x \otimes g_1 \wedge \cdots \wedge g_n) := \sum_{(x)} \int_0^1 dt\, \phi_t(x^{(1)}) \otimes \mathrm{pr}\, x^{(2)} \wedge A_t(x^{(3)},g_1) \wedge \cdots \wedge A_t(x^{(n+2)},g_n)$$

pour tous x dans $U\mathfrak{g}$ et g_1, ..., g_n dans $\mathfrak{g}$.

qui a pour corollaire immédiat

Corollaire 2.2.6. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur $\mathbb{R}$. La formule (2.2.3) défini une contraction h du complexe de Koszul $CK_*(U\mathfrak{g})$.*

Remarque 2.2.7. *Le corollaire précédent a pour conséquence immédiate l'acyclicité du complexe de Koszul sans faire appel au point* 1. *du théorème 1.1.9.*

Notation 2.2.8. *Afin d'alleger les calculs,* ***nous n'écrirons plus le signe $\sum$ intervenant dans les coproduits itérés*** *d'un élément de $U\mathfrak{g}$. Par exemple le copoduit itéré deux fois appliqué sur x $(\Delta \otimes \mathrm{Id})\Delta(x)$ s'écrira simplement $x^{(1)} \otimes x^{(2)} \otimes x^{(3)}$ au lieu de $\sum_{(x)} x^{(1)} \otimes x^{(2)} \otimes x^{(3)}$ en notation de Sweedler traditionnelle.*

Démonstration du théorème 2.2.5. Il nous faut montrer que s et d^{CE} vérifient la relation

$$sd^{CE} + d^{CE}s = \mathrm{Id}_{C_*(\mathfrak{g})} \tag{2.2.5}$$

en tout degré.

Soient x dans $U\mathfrak{g}$ et g_1, ..., g_n dans $\mathfrak{g}$.

– **Calcul et simplification de** $sd^{CE}(x \otimes g_1 \wedge \cdots \wedge g_n)$ **:** Appliquons tout d'abord les définitions de s et d^{CE} :

$$\begin{aligned}
sd^{CE}(x \otimes g_1 \wedge \cdots \wedge g_n) = \int_0^1 dt \Big(& \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} \phi_t((xg_i)^{(1)}) \otimes \mathrm{pr}(xg_i)^{(2)} \wedge A_t((xg_i)^{(3)}, g_1) \wedge \cdots \\
& \cdots \wedge A_t((xg_i)^{(i+1)}, g_{i-1}) \wedge A_t((xg_i)^{(i+2)}, g_{i+1}) \wedge \cdots \wedge A_t((xg_i)^{(n+1)}, g_n) \\
& + \sum_{i<j} (-1)^{j+1} \phi_t(x^{(1)}) \otimes \mathrm{pr}(x)^{(2)} \wedge A_t(x^{(3)}, g_1) \wedge \cdots \wedge A_t(x^{(i+2)}, [g_i, g_j]) \wedge \cdots \\
& \cdots \wedge A_t(x^{(j+1)}, g_{j-1}) \wedge A_t(x^{(j+2)}, g_{j+1}) \wedge \cdots \wedge A_t((xg_i)^{(n+1)}, g_n) \Big)
\end{aligned}$$

Or, pour tout g dans $\mathfrak{g}$

$$(xg)^{(1)} \otimes \cdots \otimes (xg)^{(n+1)} = \sum_{k=1}^{n} x^{(1)} \otimes \cdots \otimes x^{(k-1)} \otimes x^{(k)} g \otimes x^{(k+1)} \otimes \cdots \otimes x^{(n+1)}$$

Donc

$$
\begin{aligned}
sd^{CE}(x\otimes g_1\wedge\cdots\wedge g_n) = \int_0^1 dt\Bigg(& \overbrace{\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\phi_t(x^{(1)}g_i)\otimes \mathrm{pr}\, x^{(2)}\wedge A_t(x^{(3)},g_1)\wedge\cdots}^{A} \\
&\cdots\wedge A_t(x^{(i+1)},g_{i-1})\wedge A_t(x^{(i+2)},g_{i+1})\wedge\cdots\wedge A_t(x^{(n+1)},g_n) \\
&+\overbrace{\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+1}\phi_t(x^{(1)})\otimes \mathrm{pr}(x^{(2)}g_i)\wedge A_t(x^{(3)},g_1)\wedge\cdots}^{B} \\
&\cdots\wedge A_t(x^{(i+1)},g_{i-1})\wedge A_t(x^{(i+2)},g_{i+1})\wedge\cdots\wedge A_t(x^{(n+1)},g_n) \\
&+\overbrace{\sum_{j<i}(-1)^{i+1}\phi_t(x^{(1)})\otimes \mathrm{pr}\, x^{(2)}\wedge A_t(x^{(3)},g_1)\wedge\cdots\wedge A_t(x^{(j+2)}g_i,g_j)\wedge\cdots}^{C} \\
&\cdots\wedge A_t(x^{(i+1)},g_{i-1})\wedge A_t(x^{(i+2)},g_{i+1})\wedge\cdots\wedge A_t(x^{(n+1)},g_n) \\
&+\overbrace{\sum_{j>i}(-1)^{i+1}\phi_t(x^{(1)})\otimes \mathrm{pr}\, x^{(2)}\wedge A_t(x^{(3)},g_1)\wedge\cdots\wedge A_t(x^{(i+1)},g_{i-1})\wedge}^{D} \\
&\wedge A_t(x^{(i+2)},g_{i+1})\wedge\cdots\wedge A_t(x^{(j+1)}g_i,g_j)\wedge\cdots\wedge A_t(x^{(n+1)},g_n) \\
&+\overbrace{\sum_{i<j}(-1)^{j+1}\phi_t(x^{(1)})\otimes \mathrm{pr}(x)^{(2)}\wedge A_t(x^{(3)},g_1)\wedge\cdots\wedge A_t(x^{(i+2)},[g_i,g_j])\wedge\cdots}^{E} \\
&\cdots\wedge A_t(x^{(j+1)},g_{j-1})\wedge A_t(x^{(j+2)},g_{j+1})\wedge\cdots\wedge A_t(x^{(n+2)},g_n)\Bigg)
\end{aligned}
$$

Échangeons le rôle des indices i et j dans le terme C et observons que le facteur $A_t(x^{(i+2)},g_j)$ est alors en $i+1$-ème position dans le produit exterieur de longeur n :

$$
\begin{aligned}
C = \sum_{i<j}(-1)^{j+1}\phi_t(x^{(1)})\otimes \mathrm{pr}\, x^{(2)}\wedge A_t(x^{(3)},g_1)\wedge\cdots\wedge A_t(x^{(i+2)}g_j,g_i)\wedge\cdots \\
\cdots\wedge A_t(x^{(j+1)},g_{j-1})\wedge A_t(x^{(j+2)},g_{j+1})\wedge\cdots\wedge A_t(x^{(n+1)},g_n)
\end{aligned}
$$

Pour chaque couple (i,j) apparaissant dans la somme D, faisons agir [6] le $(j-i)$-cycle $(i+1,i+2,\cdots j)$ de signature $(-1)^{i+j+1}$, ce qui a pour effet d'amener le facteur $A_t(x^{(j+1)}g_i,g_j)$ en $i+1$-ème position :

6. L'action à gauche de Σ_n sur $C_n(\mathfrak{g})$ est définie par $\sigma(x\otimes h_1\wedge\cdots\wedge h_n):=x\otimes h_{\sigma^{-1}(1)}\wedge\cdots\wedge h_{\sigma^{-1}(n)}$ pour tous σ dans Σ_n, x dans $U\mathfrak{g}$ et h_1, ..., h_n dans $\mathfrak{g}$. Elle vérifie l'identité $\mathrm{sgn}(\sigma)\sigma(x\otimes h_1\wedge\cdots\wedge h_n)=x\otimes h_1\wedge\cdots\wedge h_n$.

$$D = \sum_{i<j} (-1)^j \phi_t(x^{(1)}) \otimes \mathrm{pr}\, x^{(2)} \wedge A_t(x^{(3)}, g_1) \wedge \cdots \wedge A_t(x^{(i+2)} g_i, g_j) \wedge \cdots$$
$$\cdots \wedge A_t(x^{(j+1)}, g_{j-1}) \wedge A_t(x^{(j+2)}, g_{j+1}) \wedge \cdots \wedge A_t(x^{(n+1)}, g_n)$$

Ainsi, nous pouvons appliquer le lemme 2.2.4 pour obtenir

$$C + D + E = -\sum_{i<j} (-1)^j \phi_t(x^{(1)}) \otimes \mathrm{pr} x^{(2)} \wedge A_t(x^{(3)}, g_1) \wedge \cdots \wedge [A_t(x^{(i+2)}, g_i), A_t(x^{(i+3)}, g_j)] \wedge \cdots$$
$$\cdots \wedge A_t(x^{(j+2)}, g_{j-1}) \wedge A_t(x^{(j+3)}, g_{j+1}) \wedge \cdots \wedge A_t(x^{(n+2)}, g_n) \tag{2.2.6}$$

– **Calcul et simplification de $d^{CE} s(x \otimes g_1 \wedge \cdots \wedge g_n)$:** De même que précédemment, commençons par appliquer les définitions de s et d^{CE} :

$$d^{CE} s(x \otimes g_1 \wedge \cdots \wedge g_n) = \int_0^1 dt \Bigg(\overbrace{\phi_t(x^{(1)}) \mathrm{pr}\, x^{(2)} \otimes A_t(x^{(3)}, g_1) \wedge \cdots \wedge A_t(x^{(n+2)}, g_n)}^{A'}$$
$$+ \overbrace{\sum_{i=1}^{n} (-1)^i \phi_t(x^{(1)}) A_t(x^{(2)}, g_i) \otimes \mathrm{pr}\, x^{(3)} \otimes A_t(x^{(4)}, g_1) \wedge \cdots}^{B'}$$
$$\cdots \wedge A_t(x^{(i+2)}, g_{i-1}) \wedge A_t(x^{(i+3)}, g_{i+1}) \wedge \cdots \wedge A_t(x^{(n+2)}, g_n)$$
$$+ \overbrace{\sum_{i=1}^{n} (-1)^i \phi_t(x^{(1)}) \otimes [\mathrm{pr}\, x^{(2)}, A_t(x^{(3)}, g_i)] \wedge A_t(x^{(4)}, g_1) \wedge \cdots}^{C'}$$
$$\cdots \wedge A_t(x^{(i+2)}, g_{i-1}) \wedge A_t(x^{(i+3)}, g_{i+1}) \wedge \cdots \wedge A_t(x^{(n+2)}, g_n)$$
$$+ \overbrace{\sum_{i<j} (-1)^j \phi_t(x^{(1)}) \otimes \mathrm{pr}\, x^{(2)} \wedge A_t(x^{(3)}, g_1) \wedge [A_t(x^{(i+2)}, g_i), A_t(x^{(i+3)}, g_j)] \wedge \cdots}^{D'}$$
$$\cdots \wedge A_t(x^{(j+2)}, g_{j-1}) \wedge A_t(x^{(j+3)}, g_{j+1}) \wedge \cdots \wedge A_t(x^{(n+2)}, g_n)$$

L'identité

$$\phi_t(y^{(1)}) A_t(y^{(2)}, h) = \phi_t(yh)\ ,$$

aisément démontrable pour tous y dans $U\mathfrak{g}$ et h dans $\mathfrak{g}$, et l'égalité (2.2.6) impliquent que

$$B' = -A \quad \text{et} \quad D' = -C - D - E$$

De plus, le point 1. du lemme 2.2.3 permet de récrire le terme A' :

$$A' = \frac{d}{dt}\left(\phi_t(x^{(1)})\right) \otimes A_t(x^{(2)}, g_1) \wedge \cdots \wedge A_t(x^{(n+1)}, g_n) \tag{2.2.7}$$

– **Synthèse :** Calculons $(sd^{CE}+d^{CE}s)(x\otimes g_1\wedge\cdots\wedge g_n)$ à l'aide des deux premiers points :

$$\begin{aligned}(sd^{CE}+d^{CE}s)(x\otimes g_1\wedge\cdots\wedge g_n) &= \int_0^1 dt\, A+B+C+D+E+A'+B'+C'+D'\\ &= \int_0^1 dt\, A+B+C+D+E+A'-A+C'-C-D-E\\ &= \int_0^1 dt\, A'+B+C'\end{aligned}$$

Simplifions $B+C'$ à l'aide du point 2. du lemme 2.2.3 suivi de l'action du i-cycle $(i,i-1,\cdots,2,1)$:

$$\begin{aligned}B+C' = \sum_{i=1}^{n} \phi_t(x^{(1)})\otimes A_t(x^{(2)},g_1)\wedge\cdots\wedge A_t(x^{(i)},g_{i-1})\wedge \frac{d}{dt}\big(A_t(x^{(i+1)},g_i)\big)\wedge\\ \wedge A_t(x^{(i+2)},g_{i+1})\wedge\cdots\wedge A_t(x^{(n+1)},g_n)\end{aligned}$$

Ceci, combiné avec l'égalité (2.2.7), nous conduit à

$$\begin{aligned}(sd^{CE}+d^{CE}s)(x\otimes g_1\wedge\cdots\wedge g_n) &= \int_0^1 dt\, \frac{d}{dt}\big(\phi_t(x^{(1)})\big)\otimes A_t(x^{(2)},g_1)\wedge\cdots\wedge A_t(x^{(n+1)},g_n)\\ &\quad+\sum_{i=1}^{n}\phi_t(x^{(1)})\otimes A_t(x^{(2)},g_1)\wedge\cdots\wedge A_t(x^{(i)},g_{i-1})\wedge\\ &\quad\wedge\frac{d}{dt}\big(A_t(x^{(i+1)},g_i)\big)\wedge A_t(x^{(i+2)},g_{i+1})\wedge\cdots A_t(x^{(n+1)},g_n)\\ &= \int_0^1 dt\,\frac{d}{dt}\big(\phi_t(x^{(1)})\otimes A_t(x^{(2)},g_1)\wedge\cdots\wedge A_t(x^{(n+1)},g_n)\big)\end{aligned}$$

Et comme $\phi_1=\mathrm{Id}$, $A_0(y,g)=0$ et $A_1(y,g)=\epsilon(y)g$ pour tous y dans $U\mathfrak{g}$ et g dans $\mathfrak{g}$, il s'ensuit que

$$(sd^{CE}+d^{CE}s)(x\otimes g_1\wedge\cdots\wedge g_n)=x\otimes g_1\wedge\cdots\wedge g_n$$

prouvant ainsi que l'égalité (2.2.5) vérifiée sur tous les tenseurs élémentaires donc sur $C_*(\mathfrak{g})$ par linéarité.

□

Ainsi, lorsque l'anneau de base est le corps $\mathbb{R}$, nous disposons d'une contraction h du complexe de Koszul permettant d'appliquer les considérations du 1.2.3 pour obtenir le quasi-inverse de l'application d'antisymétrisation de Cartan-Eilenberg voulu, ce que nous allons détailler dans la première section du chapitre suivant.

Chapitre 3

Inversion de l'isomorphisme de Cartan- Eilenberg

Ce chapitre se divise en deux sections : Dans la première, nous allons détailler, en degrés 1 et 2, la construction du quasi-inverse G_* de l'application d'antisymétrisation de Cartan-Eilenberg obtenu au 1.2.10 à partir de la contraction h du chapitre précédent en appliquant la méthode proposée au 1.2.3. La seconde section a pour but d'expliquer comment le relèvement de cocycles d'algèbre Lie en cocycles de Hochschild fourni par G_* peut s'interpréter comme un procédé d'intégration analogue à celui utilisé dans [Nee04] et [Cov10], pour intégrer des cocycles d'algèbre de Lie en cocycles de groupe locaux. L'obstruction à globaliser un cocycle de groupe local a été étudiée dans le cas de la dimension finie par P.A Smith dans [Smi52] et [Smi51] puis van Est dans [vEa] et [vE62], le cas de la dimension infinie étant, lui, traité par K-H Neeb dans [Nee04] (via l'étude du morphisme de période). En particulier, elle s'anihile dès lors que les groupes d'homotopie $\pi_1(G)$ et $\pi_2(G)$ sont nuls, ce qui est le cas lorsque G est un groupe de Lie connexe et simplement connexe. Notons que cette absence d'obstruction en dimension finie est un fait majeur sur lequel repose la démonstration du troisième théorème de Lie par E. Cartan donnée dans [vEb]. Dans ce qui suit, $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie sur $\mathbb{R}$ et M est un $U\mathfrak{g}$-bimodule.

3.1 Construction du quasi-inverse en degré 1 et 2

Afin de construire $G_* : CH_*(U\mathfrak{g}; M) \to C_*(\mathfrak{g}; M^{ad})$, il faut commencer par expliciter le morphisme de résolutions $G_*^B : B_*(U\mathfrak{g}) \to CK_*(U\mathfrak{g})$ de la proposition 1.2.10.

3.1.1 Calcul de G_*^B en petits degrés

Les définitions de G_*^B et G_* sont celles du 1.2.3 et la contraction $h : CK_*(U\mathfrak{g}) \to CK_*(U\mathfrak{g})$ est définie par la formule (2.2.3). Rappelons que $G_0^B := \mathrm{Id}_{U\mathfrak{g}\otimes U\mathfrak{g}}$. Soient x, y, z et w dans $U\mathfrak{g}$. L'image de $x \otimes y \otimes z$ par G_1^B s'obtient en appliquant la formule (1.2.6) :

$$\begin{aligned}
G_1^B(x\otimes y\otimes x) :=& x(hG_0 d^B(1\otimes y\otimes 1))z \\
=& x(h(y\otimes 1 - 1\otimes y))z \\
=& \int_0^1 dt\, x\phi_t(y^{(1)})\otimes \mathrm{pr}\, y^{(2)} \otimes \phi_{1-t}(y^{(3)})z - x\otimes \mathrm{pr}\, 1\otimes yz
\end{aligned}$$

d'où, en notant que $\mathrm{pr}\, 1 = 0$:

$$G_1^B(x\otimes y\otimes z) = \int_0^1 dt\, x\phi_t(y^{(1)})\otimes \mathrm{pr}\, y^{(2)} \otimes \phi_{1-t}(y^{(3)})z \tag{3.1.1}$$

De même, le calcul en degré 2 s'effectue en commençant par appliquer les définitions et la formule (3.1.1) :

$$\begin{aligned}
G_2^B(x\otimes y\otimes z\otimes w) =& x\left(hG_1^B d^B(1\otimes y\otimes z\otimes 1)\right)w \\
=& x\left(hG_1^B\left(y\otimes z\otimes 1 - 1\otimes yz\otimes 1 + 1\otimes y\otimes z\right)\right)w \\
=& \int_0^1 dt\, x\Bigg(h\big(y\phi_t(z^{(1)})\otimes \mathrm{pr}\, z^{(2)}\otimes\phi_{1-t}(z^{(3)})\big) \\
& - \overbrace{h\big(\phi_t((yz)^{(1)})\otimes \mathrm{pr}((yz)^{(2)})\otimes\phi_{1-t}((yz)^{(3)})\big)}^{A} \\
& + \overbrace{h\big(\phi_t(y^{(1)})\otimes \mathrm{pr}\, y^{(2)}\otimes\phi_{1-t}(y^{(3)})z\big)}^{B}\Bigg)w
\end{aligned}$$

Montrons que les termes A et B à l'intérieur de l'intégrale sont nuls. Pour ce faire, notons que la relation d'orthogonalité des idempotents eulériens (2.1.3) a pour conséquence directe l'égalité

$$\phi_t\circ \mathrm{pr} = \mathrm{pr}\circ\phi_t = \mathrm{pr}$$

qui implique, grâce au point 1. du lemme 2.2.3, aux points 2. et 3. de la proposition 2.1.16, et en utilisant que ϕ_t est un endomorphisme de cogèbre :

$$\begin{aligned}
A =& \int_0^1 ds\, \phi_{st}((yz)^{(1)})\otimes \mathrm{pr}((yz)^{(2)})\wedge A_s\left(\phi_t((yz)^{(3)}), \mathrm{pr}((yz)^{(4)}\right)\otimes\phi_{1-t}((yz)^{(5)}) \\
=& \int_0^1 ds\, \phi_{st}((yz)^{(1)})\otimes \mathrm{pr}((yz)^{(2)})\wedge \phi_{-st}((yz)^{(3)})\phi_s(\frac{d}{dt}\phi_t((yz)^{(4)}))\otimes\phi_{1-t}((yz)^{(5)}) \\
=& \int_0^1 ds\, \phi_{st}((yz)^{(1)})\otimes \mathrm{pr}((yz)^{(2)})\wedge \frac{d}{du}\phi_{s(u-t)}((yz)^{(3)})_{|u=t}\otimes\phi_{1-t}((yz)^{(4)}) \\
=& \int_0^1 sds\, \phi_{st}((yz)^{(1)})\otimes \mathrm{pr}((yz)^{(2)})\wedge \mathrm{pr}((yz)^{(3)})\otimes\phi_{1-t}((yz)^{(4)})
\end{aligned}$$

Comme le coproduit Δ est cocommutatif, A est invariant par l'action de la transposition $(12) \in \Sigma_2$ donc

$$-A = \mathrm{sgn}\,((1\,2))\,A = (1\,2)A = A$$

d'où

$$A = 0$$

La nullité de B s'obtient de la même façon en remplaçant yz par y. Ainsi,

$$\begin{aligned} G_2^B(x \otimes y \otimes z \otimes w) &= \int_0^1 dt\, x\Big(h\big(y\phi_t(z^{(1)}) \otimes \mathrm{pr}\, z^{(2)} \otimes \phi_{1-t}(z^{(3)})\big)\Big)w \\ &= \int_0^1 \int_0^1 ds\, dt\, x\phi_s(y^{(1)}\phi_t(z^{(1)})) \otimes \mathrm{pr}(y^{(2)}\phi_t(z^{(2)})) \wedge A_s(y^{(3)}\phi_t(z^{(3)}), \mathrm{pr}\, z^{(6)}) \otimes \\ &\quad \otimes \phi_{1-s}(y^{(4)}\phi_t(z^{(4)}))\phi_{1-t}(z^{(5)})w \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

3.1.2 Calcul de G_* et G^* en petits degrés

Le quasi-isomorphisme $G_* : CH_*(\mathfrak{g}; M) \to C_*(\mathfrak{g}; M^{ad})$ correspond à $\mathrm{Id} \otimes G^B : M \otimes_{U\mathfrak{g}^e} B_*(U\mathfrak{g}) \to M \otimes_{U\mathfrak{g}^e} CK_*(U\mathfrak{g})$ via les isomorphismes θ et θ' définis en (1.2.2) et (1.2.3). Un calcul direct à l'aide des égalités (3.1.1) et (3.1.2) permet d'exprimer G_1 et G_2 sur les tenseurs élémentaires :

Proposition 3.1.1. *Le quasi-inverse $G_* : CH_*(U\mathfrak{g}; M) \to C_*(\mathfrak{g}; M^{ad})$ de l'application d'antisymétrisation F_* du théorème 1.1.9 obtenu à partir de la contraction h du corollaire 2.2.2 vérifie*

$$G_1(m \otimes x) = \int_0^1 dt\, \phi_{1-t}(x^{(1)})m\phi_t(x^{(2)}) \otimes \mathrm{pr}\, x^{(3)}$$

et

$$G_2(m \otimes x \otimes y) = \int_0^1 \int_0^1 ds dt \phi_{1-s}(x^{(1)}\phi_t(y^{(1)}))\phi_{1-t}(y^{(5)})m\phi_s(x^{(2)}\phi_t(y^{(2)})) \otimes \mathrm{pr}(x^{(3)}\phi_t(y^{(3)})) \wedge A_s(x^{(4)}\phi_t(y^{(4)}), \mathrm{pr} y^{(6)})$$

pour tous m dans M, x et y dans $U\mathfrak{g}$.

La version cohomologique $G^* : C^*(\mathfrak{g}; M^{ad}) \to CH^*(U\mathfrak{g}; M)$, pour laquelle M^{ad} est vu comme un $U\mathfrak{g}$-module **à gauche**, s'obtient en transportant le quasi-isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}^*_{U\mathfrak{g}^e}(CK_*(U\mathfrak{g}), M) & \overset{\simeq}{\to} & \mathrm{Hom}^*_{U\mathfrak{g}^e}(B_*(U\mathfrak{g}), M) \\ f & \mapsto & f \circ G^B_* \end{array}$$

via les isomorphismes de complexes de $U\mathfrak{g}$-bimodules

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Hom}^*_{U\mathfrak{g}^e}(B_*(U\mathfrak{g}), M) & \overset{\cong}{\to} & CH^*(U\mathfrak{g}; M) := \{\mathrm{Hom}(U\mathfrak{g}^{\otimes n}, M)\}_{n \geq 0} \\ f & \mapsto & \big(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \mapsto f(1 \otimes x_1 \otimes \cdots \otimes x_n \otimes 1)\big) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} C^*(\mathfrak{g}; M^{ad}) := \{\mathrm{Hom}(U\mathfrak{g}^{\otimes n}, M)\}_{n\geq 0} & \stackrel{\cong}{\to} & \mathrm{Hom}^*_{U\mathfrak{g}^e}(CK_*(U\mathfrak{g}), M) \\ f & \mapsto & \big(x \otimes x_1 \wedge \cdots \wedge x_n \otimes y \mapsto x f(x_1 \wedge \cdots \wedge x_n) y\big) \end{array}$$

Il est alors possible d'expliciter G^* en petit degré, toujours grâce aux relations (3.1.1) et (3.1.2) :

Proposition 3.1.2. *Le morphisme de complexes $G^* : C^*(\mathfrak{g}; M^{ad}) \to CH^*(U\mathfrak{g}; M)$, quasi-inverse en cohomologie de l'application d'antisymétrisation des cochaînes F^* qui se déduit de l'isomorphisme de résolutions G^B_* défini précédemment, vérifie*

$$G^1(f_1)(x) := \int_0^1 dt\, \phi_t(x^{(1)}) f_1(x^{(2)}) \phi_{1-t}(x^{(3)})$$

et

$$G^2(f_2)(x\otimes y) = \int_0^1\int_0^1 ds dt \phi_s(x^{(1)}\phi_t(y^{(1)})) f\big(\mathrm{pr}(x^{(2)}\phi_t(y^{(2)})) \wedge A_s(x^{(3)}\phi_t(y^{(3)}), \mathrm{pr}\, y^{(6)})\big)\, \phi_{1-s}(x^{(4)}\phi_t(y^{(4)}))\phi_{1-t}(y^{(5)})$$

pour toute 1-cochaîne f_1 dans $C^1(\mathfrak{g}; M^{ad})$, pour toute 2-cochaîne f_2 dans $C^2(\mathfrak{g}; M^{ad})$, et pour tous x, y dans $U\mathfrak{g}$.

Remarque 3.1.3. *Soit $f : \mathfrak{g} \to M^{ad}$ un 1-cocycle d'algèbre de Lie. Dans [Dix74], J. Dixmier propose de lui associer le 1-cocycle de Hochschild $\hat{f} : U\mathfrak{g} \to M$ vérifiant les conditions définissantes :*

$$\hat{f}(xy) = xf(y) + f(x)y \quad , \quad \forall\, x,\ y \in U\mathfrak{g} \tag{3.1.3}$$

et

$$\hat{f}(g) = f(g) \quad , \quad \forall g \in \mathfrak{g}. \tag{3.1.4}$$

Le fait que $\hat{f}$ soit bien défini sur $U\mathfrak{g}$ est une conséquence directe de l'identité de cocycle de Lie vérifiée par f. D'autre part, il est clair que $\hat{f}$ est uniquement déterminée par (3.1.3), qui n'est rien d'autre que l'identité de cocycle de Hochschild pour $\hat{f}$, et (3.1.4). Or, le calcul de G^1 donné en 3.1.2 nous assure que $G^1(f)$ vérifie (3.1.4). De plus, puisque G^* est un morphisme de complexes de cochaînes, $G^1(f)$ est un cocycle de Hochschild et vérifie donc (3.1.3). Il s'ensuit que $\hat{f}$ et $G^1(f)$ coïncident sur tout $U\mathfrak{g}$ i.e

$$\hat{f} = G^2(f)$$

3.1.3 Calcul de G^2 dans le cas abélien

Dans cette sous-section, $\mathfrak{g}$ est supposée abélienne ($[x, y] = 0$ pour tous g et h dans $\mathfrak{g}$). Dans ce cas, l'algèbre enveloppante $U\mathfrak{g}$ s'identifie à l'algèbre symétrique $S\mathfrak{g}$ qui est graduée par la longueur des tenseurs. De plus, la projection pr, qui s'identifie alors à la projection canonique proj : $S\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ du 2.1.17, est une dérivation de l'algèbre $U\mathfrak{g}$ le long de ϵ i.e

$$\mathrm{pr}(xy) = \epsilon(x)\, \mathrm{pr}\, y + \epsilon(y)\, \mathrm{pr}\, x$$

pour tous x et y dans $U\mathfrak{g}$. En notant $|x|$ de degré d'un élément x de $U\mathfrak{g} = S\mathfrak{g}$, il est facile de voir que les opérateurs pr et ϕ_t vérifient

$$\mathrm{pr}x = \begin{cases} x & \text{si } |x| \in \mathfrak{g} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$\phi_t(x) = t^{|x|}x$$

pour tout x dans $U\mathfrak{g}$ et pour tout réel t. En particulier, grâce au point 3. de la proposition 2.1.16 :

$$t^{|x^{(1)}|}s^{|x^{(2)}|}x^{(1)}x^{(2)} = \phi_s \star \phi_t(x) = \phi_{s+t}(x) = (s+t)^{|x|}x$$

et, par la cocommutativité du coproduit et le fait que pr est une dérivation le long de ϵ,

$$\mathrm{pr}(u\,\phi_t(v^{(1)})) \wedge \mathrm{pr}(v^{(2)}) = \epsilon(u)\mathrm{pr}(\phi_t(v^{(1)})) \wedge \mathrm{pr}(v^{(2)}) + \epsilon(\phi_t(v^{(1)}))\mathrm{pr}(u) \wedge \mathrm{pr}(v^{(2)}) = \mathrm{pr}\, u \wedge \mathrm{pr}\, v$$

pour tous u et v dans $U\mathfrak{g}$. Ainsi, par 3.1.2,

$$\begin{aligned} G^2(f_2)(x\otimes y) =& \int_0^1\int_0^1 t^{|y^{(1)}|+|y^{(3)}|+|y^{(4)}|+|y^{(5)}|}(1-t)^{|y^{(6)}|}s^{|x^{(1)}|+|y^{(1)}|+|x^{(4)}|+|y^{(4)}|+1}(-s)^{|x^{(3)}|+|y^{(3)}|}(1-s)^{|x^{(5)}|+|y^{(5)}|} \\ & x^{(1)}y^{(1)}f\left(\mathrm{pr}(x^{(2)}\phi_t(y^{(2)})) \wedge x^{(3)}y^{(3)}x^{(4)}y^{(4)}\mathrm{pr}\,(y^{(7)})\right)x^{(5)}y^{(5)}y^{(6)}ds\,dt \\ =& \int_0^1\int_0^1 (st)^{|y^{(1)}|}s^{|x^{(1)}|+1}(1-s)^{|x^{(3)}|}(1-st)^{|y^{(3)}|}\,x^{(1)}y^{(1)}f\left(\mathrm{pr}(x^{(2)}) \wedge \mathrm{pr}\,(y^{(2)})\right)x^{(3)}y^{(3)}ds\,dt \end{aligned}$$

pour toute 2-cochaîne de Chevalley-Eilenberg $f : \Lambda^2\mathfrak{g} \to M^{ad}$ et pour tous x, y dans $S\mathfrak{g}$. Le changement de variable $u := st$ permet alors d'écrire

$$G^2(f)(x\otimes y) = \int_0^1 ds \int_0^s du\, u^{|y^{(1)}|}s^{|x^{(1)}|}(1-s)^{|x^{(3)}|}(1-u)^{|y^{(3)}|}\,x^{(1)}y^{(1)}f\left(\mathrm{pr}(x^{(2)}) \wedge \mathrm{pr}\,(y^{(2)})\right)x^{(3)}y^{(3)}$$

Comme, pour tous p et q entiers :

$$\int_0^s duu^p(1-u)^q = \frac{p!q!}{(p+q+1)!} - \sum_{i=0}^{p}\frac{p!q!}{(p-i)!(q+i+1)!}s^{p-i}(1-s)^{q+i+1}$$

il vient

$$
\begin{aligned}
G^2(f)(x\otimes y) =&\int_0^1 ds\Big(\frac{|y^{(1)}|!\,|y^{(3)}|!}{(|y|+1-|y^{(2)}|)!}\; s^{|x^{(1)}|}(1-s)^{|x^{(3)}|}\; x^{(1)}y^{(1)}f\big(\mathrm{pr}(x^{(2)})\wedge \mathrm{pr}\,(y^{(2)})\big)\,x^{(3)}y^{(3)}\\
&-\sum_{i=0}^{|y^{(1)}|}\frac{|y^{(1)}|!\,|y^{(3)}|!}{(|y^{(1)}|-i)!(|y^{(3)}|+1+i)!}s^{|x^{(1)}|+|y^{(1)}|-i}(1-s)^{|x^{(3)}|+|y^{(3)}|+1+i}x^{(1)}y^{(1)}f\big(\mathrm{pr}(x^{(2)})\wedge \mathrm{pr}\,(y^{(2)})\big)\,x^{(3)}y^{(3)}\Big)\\
=&\frac{|y^{(1)}|!\,|y^{(3)}|!\,|x^{(1)}|!\,|x^{(3)}|!}{(|y|+1-|y^{(2)}|)!(|x|+1-|x^{(2)}|)!}\;x^{(1)}y^{(1)}f\big(\mathrm{pr}(x^{(2)})\wedge \mathrm{pr}\,(y^{(2)})\big)\,x^{(3)}y^{(3)}\\
&-\sum_{i=0}^{|y^{(1)}|}\frac{|y^{(1)}|!\,|y^{(3)}|!(|x^{(1)}|+|y^{(1)}|-i)!(|x^{(3)}|+|y^{(3)}|+1+i)!}{(|y^{(1)}|-i)!(|y^{(3)}|+1+i)!(|x|+|y|+2-|x^{(2)}|-|y^{(2)}|)!}\;x^{(1)}y^{(1)}f\big(\mathrm{pr}(x^{(2)})\wedge \mathrm{pr}\,(y^{(2)})\big)\,x^{(3)}y^{(3)}\\
=&\Bigg(\frac{1}{(|y|+1-|y^{(2)}|)!(|x|+1-|x^{(2)}|)!}-\sum_{i=0}^{|y^{(1)}|}\frac{\binom{|x^{(1)}|+|y^{(1)}|-i}{|y^{(1)}|-i}\binom{|x^{(3)}|+|y^{(3)}|+1+i}{|y^{(3)}|+1+i}}{(|x|+|y|+2-|x^{(2)}|-|y^{(2)}|)!}\Bigg)\\
&\quad |y^{(1)}|!\,|y^{(3)}|!\,|x^{(1)}|!\,|x^{(3)}|!\;x^{(1)}y^{(1)}f\big(\mathrm{pr}(x^{(2)})\wedge \mathrm{pr}\,(y^{(2)})\big)\,x^{(3)}y^{(3)}
\end{aligned}
$$

Comme pr s'annule sur les éléments de longueur différente de 1, nous pouvons sans perte de généralité supposer que $|x^{(2)}|=|y^{(2)}|=1$ dans l'égalité précédente, ce qui conduit à :

$$
\begin{aligned}
G^2(f)(x\otimes y) =&\Bigg(\frac{1}{|y|!\,|x|!}-\sum_{i=0}^{|y^{(1)}|}\frac{\binom{|x^{(1)}|+|y^{(1)}|-i}{|y^{(1)}|-i}\binom{|x^{(3)}|+|y^{(3)}|+1+i}{|y^{(3)}|+1+i}}{(|x|+|y|)!}\Bigg)|y^{(1)}|!\,|y^{(3)}|!\,|x^{(1)}|!\,|x^{(3)}|!\\
&x^{(1)}y^{(1)}f\big(\mathrm{pr}\,x^{(2)}\wedge \mathrm{pr}\,y^{(2)}\big)\,x^{(3)}y^{(3)}
\end{aligned}
$$

Comme $|y^{(1)}|+|y^{(3)}|+1=|y|$ et $|x^{(1)}|+|x^{(3)}|+1=|x|$, le changement de variable $j:=|y^{(1)}|-i$ donne :

$$
G^2(f)(x\otimes y) =\Bigg(\frac{1}{|y|!\,|x|!}-\sum_{j=0}^{|y^{(1)}|}\frac{\binom{|x^{(1)}|+j}{j}\binom{|x^{(3)}|+|y|-j}{|y|-j}}{(|x|+|y|)!}\Bigg)|y^{(1)}|!\,|y^{(3)}|!\,|x^{(1)}|!\,|x^{(3)}|!\;x^{(1)}y^{(1)}f\big(\mathrm{pr}\,x^{(2)}\wedge \mathrm{pr}y^{(2)}\big)\,x^{(3)}y^{(3)}
$$

D'où la proposition suivante :

Proposition 3.1.4. *Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie abélienne sur $\mathbb{R}$, M un $U\mathfrak{g}$-bimodule, et $f : \Lambda^2\mathfrak{g}\to M^{ad}$ une 2-cochaîne de Lie. Alors*

$$
G^2(f)(x\otimes y) =\Bigg(\frac{1}{|y|!\,|x|!}-\sum_{j=0}^{|y^{(1)}|}\frac{\binom{|x^{(1)}|+j}{j}\binom{|x^{(3)}|+|y|-j}{|y|-j}}{(|x|+|y|)!}\Bigg)|y^{(1)}|!\,|y^{(3)}|!\,|x^{(1)}|!\,|x^{(3)}|!\;x^{(1)}y^{(1)}f\big(\mathrm{pr}\,x^{(2)}\wedge\mathrm{pr}\,y^{(2)}\big)\,x^{(3)}y^{(3)}
$$

pour tous x et y dans $U\mathfrak{g}=S\mathfrak{g}$.

Corollaire 3.1.5. *Sous les hypothèses de la proposition précédente, si de plus la structure de bimodule sur M est triviale ($xm = mx = \epsilon(x)m$ pour tous x dans $S\mathfrak{g}$ et m dans M), alors*

$$G^2(f)(x \otimes y) = \begin{cases} \frac{1}{2} f(x \wedge y) & si\ |x| = |y| = 1 \\ 0 & sinon. \end{cases} \tag{3.1.5}$$

pour tous x et y dans $U\mathfrak{g} = S\mathfrak{g}$.

Exemple de l'algèbre de Heisenberg : Il est bien connu ([Wei95], [Lod98], [CE56]) qu'à chaque 2-cocycle d'algèbre de Lie $f : \Lambda^2 \to M^{ad}$ est associée une extension abélienne d'algèbres de Lie

$$0 \to M^{ad} \to \mathfrak{h} \to \mathfrak{g} \to 0$$

telle que le crochet sur $H \cong M^{ad} \oplus \mathfrak{g}$ soit donné par

$$[(0, X), (0, Y)] := (f(X \wedge Y), [X, Y])$$

pour tous X et Y dans $\mathfrak{g}$. De la même manière ([Lan75]), le deuxième groupe de cohomologie de Hochschild $HH^2(U\mathfrak{g}; M)$ classifie les extensions singulières (toujours scindées sur $\mathbb{R}$) de la forme

$$0 \to M \to H \to U\mathfrak{g} \to 0$$

Nous allons expliciter l'extension correspondant au 2-cocycle de Hochschild $G^2(f) : U\mathfrak{g}^{\otimes 2} \to M$ associé à un cocycle d'algèbre de Lie f bien particulier. Dans ce qui suit, $\mathfrak{g} :=< X, Y >$ est l'algèbre de Lie abélienne de dimension 2 engendrée par X et Y, et $M = \mathbb{R}Z$ est le bimodule trivial de dimension 1 engendré par Z.

Définition 3.1.6. *Le* ***cocycle de Heisenberg*** *est le cocycle d'algèbre de Lie $c_H : \Lambda^2\mathfrak{g} \to M = \mathbb{R}Z$ défini par*

$$c_H(X \wedge Y) = Z$$

Il lui correspond une extension centrale d'algèbre de Lie

$$0 \to \mathbb{R}Z \to \mathfrak{h} \to \mathfrak{g} \to 0$$

dont le terme central $\mathfrak{h}$ est appelé ***algèbre de Heisenberg (de dimension** 3**)**.

Notons $H := \mathbb{R}Z \oplus S\mathfrak{g}$ l'extension de $S\mathfrak{g} = U\mathfrak{g}$ par $\mathbb{R}Z$ correspondant à $G^2(c_H)$. La famille $(X^\alpha Y^\beta)_{\alpha,\beta \geq 0}$ étant une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $S\mathfrak{g}$, le produit sur H est déterminé par les valeurs de $G^2(c_H)$ sur de tels monômes. Grâce à (3.1.5), il vient

$$G^2(c_H)(X^\alpha Y^\beta \otimes X^\gamma Y^\delta) = \begin{cases} \frac{1}{2}Z & \text{si } (\alpha, \beta) = (1, 0) \text{ et } (\gamma, \delta) = (0, 1) \\ -\frac{1}{2}Z & \text{si } (\alpha, \beta) = (0, 1) \text{ et } (\gamma, \delta) = (1, 0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

pour tous α, β, γ et δ dans $\mathbb{N}$. Pour λ et μ dans $\mathbb{R}$, notons $\lambda Z + \mu X^\alpha Y^\beta$ l'élément $(Z, X^\alpha Y^\beta)$ de $H = \mathbb{R}Z \oplus S\mathfrak{g}$ et $\cdot$ le produit de l'algèbre H. Alors

$$(\lambda Z + \mu X^\alpha Y^\beta) \cdot (X^\gamma Y^\delta) = \begin{cases} \lambda Z + \mu X^\alpha Y^\beta & \text{si } \gamma + \delta = 0 \\ \frac{\lambda}{2} Z + \mu XY & \text{si } (\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (1,0,0,1) \\ \frac{\lambda}{2} Z + \mu XY & \text{si } (\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (0,1,1,0) \\ \mu X^{\alpha+\gamma} Y^{\beta+\delta} & \text{dans les autres cas.} \end{cases} \tag{3.1.6}$$

Il est aisé de vérifier que l'injection $\mathbb{R}$-linéaire $i : \mathfrak{h} \to H$ définie par

$$i(X) = X \quad , \quad i(Y) = Y \quad , \text{et} \quad i(Z) = Z$$

est un morphisme d'algèbres de Lie (le crochet sur H étant le commutateur associé au produit $\cdot$) qui, par propriété universelle de l'algèbre enveloppante, induit un morphisme *surjectif* d'algèbres associatives

$$p : U\mathfrak{h} \twoheadrightarrow H$$

Déterminons le noyau de p. Pour ce faire, remarquons que d'après le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt, la famille $(Z^\alpha X^\beta Y^\gamma)_{\alpha,\beta,\gamma \geq 0}$ est une base du $\mathbb{R}$ espace vectoriel $U\mathfrak{h}$. Un élément arbitraire B de $U\mathfrak{g}$ s'écrit donc de manière unique comme combinaison linéaire

$$B := \sum_{\alpha,\beta,\gamma \geq 0} B_{\alpha,\beta,\gamma} Z^\alpha X^\beta Y^\gamma \,,$$

où $(B_{\alpha,\beta,\gamma})_{\alpha,\beta,\gamma \geq 0}$ est une famille presque nulle de réels. Supposons que $p(B) = 0$. Alors

$$p(B) = \sum_{\alpha,\beta,\gamma \geq 0} B_{\alpha,\beta,\gamma} p(Z^\alpha X^\beta Y^\gamma) = \sum_{\alpha,\beta,\gamma \geq 0} B_{\alpha,\beta,\gamma} \overbrace{Z \cdot Z \cdots Z}^{\alpha \text{ fois}} \cdot \overbrace{X \cdot X \cdots X}^{\beta \text{ fois}} \cdot \overbrace{Y \cdot Y \cdots Y}^{\gamma \text{ fois}} = 0$$

Or, d'après (3.1.6), $Z \cdot A = 0$ pour tout A dans l'idéal d'augmentation $\bar{S}\mathfrak{g} \subset H$ de $S\mathfrak{g}$. Ainsi,

$$\sum_{\beta,\gamma \geq 0} B_{0,\beta,\gamma} \overbrace{X \cdot X \cdots X}^{\beta \text{ fois}} \cdot \overbrace{Y \cdot Y \cdots Y}^{\gamma \text{ fois}} + \sum_{\alpha \geq 1} B_{\alpha,0,0} \overbrace{Z \cdot Z \cdots Z}^{\alpha \text{ fois}} = 0$$

En appliquant de nouveau (3.1.6), il vient

$$\sum_{\beta,\gamma \geq 0} B_{0,\beta,\gamma} X^\beta Y^\gamma + \frac{1}{2}(B_{0,2,0} + B_{0,1,1} + B_{0,0,2} + 2B_{1,0,0}) Z = 0$$

ce qui implique que $B_{1,0,0} = 0$ et

$$B_{0,\beta,\gamma} = 0 \quad , \quad \forall \beta, \gamma \geq 0 \,.$$

Donc, $p(B) = 0$ si et seulement si B est dans l'idéal de $U\mathfrak{h}$ engendré par ZX et ZY, noté $< ZX, ZY >$. Par conséquent $\operatorname{Ker} p =< ZX, ZY >$, ce qui démontre le résultat suivant :

Proposition 3.1.7. *L'extension H de l'algèbre associative $S\mathfrak{g}$ associée au cocycle de Hochschild $G^2(c_H)$, où c_H est le cocycle de Heisenberg défini en 3.1.6, est isomorphe au quotient de $U\mathfrak{h}$ par l'idéal engendré par ZX et ZY :*

$$H \cong U\mathfrak{h} /_{< ZX, ZY >}$$

3.2 Une interprétation possible en termes d'intégration

Dans cette section, nous allons expliquer comment le quasi-isomorphisme de complexes $G^* : C^*(\mathfrak{g}; M^{ad}) \to CH^2(U\mathfrak{g}; M)$ de la proposition 3.1.2 peut être vu comme un procédé d'intégration de cochaines de Chevalley-Eilenberg en cochaînes de Hochschild, analogue à celui décrit dans [Nee04] et [Cov10], expliquant comment construire un 2-cocycle de groupe différentiable $I_s(\omega) : G^{\times 2} \to \mathbb{R}$ à partir d'un 2-cocycle d'algèbre de Lie $\omega : \Lambda^2\mathfrak{g} \to \mathbb{R}$, tel que la "dérivée seconde" antisymétrisée de $I_s(\omega)$ en l'élément neutre de G soit ω. Ici, G désigne un groupe de Lie (ou de Fréchet) connexe simplement connexe dont l'espace tangent en l'élément neutre est $\mathfrak{g}$.

Pour simplifier les formules, nous allons nous restreindre au cas où $M = \mathbb{R}$ muni de la structure de $U\mathfrak{g}$-bimodule triviale donnée par

$$xm = mx = \epsilon(x)m$$

pour tous x dans $U\mathfrak{g}$ et m dans $\mathbb{R}$. La structure de $\mathfrak{g}$-module à gauche sur $\mathbb{R}^{ad}$ qui s'en déduit vérifie alors

$$g \cdot m = 0$$

pour tous g dans $\mathfrak{g}$ et m dans $\mathbb{R}$.

Nous allons décrire le procédé d'intégration simpliciale de 2-cocycles "à la van Est" lorsque $\mathfrak{g}$ est de dimension finie par souci de clarté. Il va sans dire que la construction qui suit se généralise en dimension quelconque, pour un $\mathfrak{g}$-module M non nécessairement trivial, en se plaçant sous de bonnes hypothèses que le lecteur pourra par exemple trouver dans [Nee04].

3.2.1 Intégration des cocycles d'algèbre Lie en cocycles de groupes

Soit G un groupe de Lie qui intègre $\mathfrak{g}$, d'élément neutre e. Pour $n \geq 1$, notons $C^n_{loc}(\mathfrak{g}; \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des n-cochaînes lisses du groupe G définies au voisinage de e, à valeurs dans le module trivial $\mathbb{R}$. Une définition de cohomologie de groupe locale lisse et de la différentielle d_G associée est donnée en appendice, nous renvoyons à l'appendice B. de [Nee04] pour plus de précisions. Il existe alors une application de différentiation $T : C^n_s(G; \mathbb{R}) \to C^n(\mathfrak{g}; \mathbb{R})$ définie par

$$T(f)(g_1 \wedge \cdots \wedge g_n) := \sum_{\sigma \in \Sigma_n} \mathrm{sgn}(\sigma)(g_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes g_{\sigma(n)})(f)$$

pour toute n-cochaîne de groupe lisse $f : G \times G \to \mathbb{R}$, et pour tous g_1, ..., g_n dans $\mathfrak{g} \subset U\mathfrak{g}$. Ici la notation $(g_1 \otimes g_2 \otimes \cdots g_n)$ provient de l'identification entre les distributions ponctuelles supportées en $(e, \cdots, e)$ sur $G^{\times n}$ et la n-ième puissance tensorielle de $U\mathfrak{g}$:

$$U(\mathfrak{g}^{\oplus n}) \cong (U\mathfrak{g})^{\otimes n}$$

Par exemple, si f est une 2-cochaîne dans $C^2(\mathfrak{g}; \mathbb{R})$:

$$T(f)(g_1 \wedge g_2) = (g_1 \otimes g_2 - g_2 \otimes g_1)(f) = d^2_{(e,e)} f((g_1, 0), (0, g_2)) - d^2_{(e,e)} f((g_2, 0), (0, g_1))$$

Proposition 3.2.1. *L'application $T : (C^n_{loc}(G; \mathbb{R}), d_G)_{n>0} \to (C^n(\mathfrak{g}; \mathbb{R}), d_{CE})_{n>0}$ est un morphisme de complexes de cochaînes.*

Démonstration. Une démonstration de ce résultat dans le cas de cochaînes de groupe globales localement lisses, utilisant le complexe d'Alexander-Spanier, se trouve dans l'appendice B. de [Nee04]. Celle que nous donnons ici est sensiblement identique, mais a l'avantage de ne pas introduire ce nouveau complexe, l'essentiel du travail ayant été effectué à la proposition 1.2.8 où il est établi que l'application d'antisymétrisation $F^* : CH^*(U\mathfrak{g};\mathbb{R}) \to C^*(\mathfrak{g};\mathbb{R})$ commute aux différentielles. En effet, soit $T' : C^*_{loc}(G;\mathbb{R}) \to CH^*(U\mathfrak{g};\mathbb{R})$ définie en degré n par

$$T'(f)(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) := (x_1 \otimes \cdots \otimes x_n)(f)$$

pour tous x_1, ..., x_n dans $U\mathfrak{g}$ et pour toute n-cochaîne de groupe localement lisse $f : G^{\times n} \to \mathbb{R}$. Précisons que l'action de $x_1 \otimes \cdots \otimes x_n$ sur f est donnée par

$$(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n)(f) := x_1(z_1 \mapsto x_2(z_2 \mapsto (\cdots \mapsto (x_{n-1}(z_{n-1} \mapsto x_n(z_n \mapsto f(z_1, \cdots, z_n)))) \cdots)))$$

En utilisant la définition du produit sur $U\mathfrak{g}$ en termes de précomposition par la multiplication μ_G du groupe G introduite à la définition 2.1.1 il est aisé de voir que T' est un morphisme de complexes. De plus

$$T = F^* \circ T' ,$$

ce qui prouve que T est un morphisme de complexes de cochaînes puisque composé de morphisme de complexes de cochaînes. □

Il est alors naturel d'essayer de décrire l'image de T : est-il possible, pour toute n-cochaîne de Chevalley-Eilenberg $f : \Lambda^n\mathfrak{g} \to \mathbb{R}$, de construire une n-cochaîne de groupe localement lisse $\tilde{G}^n(f) : G^{\times n} \to \mathbb{R}$ dont l'image par T est f ? La réponse à cette question en degré $n = 2$ est donnée par la méthode de van Est en dimension finie / Neeb en dimension infinie, que nous allons décrire brièvement ici.

La version duale de l'isomorphisme $R : C_*(\mathfrak{g}) \to \Lambda^*G$ de la proposition 2.1.8, que l'on trouve dans [Nee04] et [FOT08], est l'isomorphisme de complexes de cochaînes $R' : C^*(\mathfrak{g};\mathbb{R}) \xrightarrow{\cong} \Omega^*_{inv}(G)$ défini par

$$R'(\omega)_z(X_1(z), X_2(z), \cdots, X_n(z)) := \omega^{inv}_z(X_1(z), X_2(z), \cdots, X_n(z)) := \omega(T_zL_{z^{-1}}X_1(z), \cdots, T_zL_{z^{-1}}X_n(z))$$

pour tout z dans U, pour tous X_1, ..., X_n champs de vecteurs sur G, et pour toute 2-cochaîne de Chevalley-Eilenberg $\omega : \mathfrak{g}\wedge\mathfrak{g} \to \mathbb{R}$. Ici, $\Omega^*_{inv}(G)$ désigne le complexe des formes différentielles invariantes [1] via l'action à gauche du groupe G. L'inverse R n'est rien d'autre que l'évaluation ev_e des formes invariantes sur G en l'élément neutre e. Soit maintenant V est un ouvert convexe de $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^n$ contenant 0 muni d'une carte $\varphi : U \to V$ centrée en 0, où U est un ouvert de G contenant e. L'existence d'un tel U est assurée, en dimension finie, par le fait que l'application exponentielle soit un homéomorphisme local. Le lemme fondamental suivant fournit une section de T :

1. i.e des formes différentielles ω vérifiant $L^*_z\omega = \omega$ pour tout z dans G.

Lemme 3.2.2. [Lemme V.2 de [Nee04], version simpliciale] *Si U' est un ouvert inclus dans U tel que $U'U' \subset U$ et $\varphi^{-1}(U)$ est un ouvert convexe de $\mathfrak{g}$ contenant 0, et si $T_0\varphi^{-1} = \mathrm{Id}_{\mathfrak{g}}$, alors l'application*

$$\begin{array}{rcl} I_s : C^2(\mathfrak{g};\mathbb{R}) & \to & C^2_{loc}(G;\mathbb{R}) \\ \omega & \mapsto & \left((z_1,z_2) \mapsto \int_{\Delta^2} \gamma^*_{z_1,z_2}\omega^{inv}\right) \end{array}$$

où pour tout (z_1,z_2) dans $U' \times U'$, $\gamma_{z_1,z_2} : \Delta^2 \to U \subset G$ est le 2-simplexe lisse défini par

$$\gamma_{z_1,z_2}(s,t) := \varphi\left(s\,\varphi^{-1}\left(z_1\varphi(t\varphi^{-1}(z_2))\right) \;+\; t\,\varphi^{-1}\left(z_1\varphi((1-s)\varphi^{-1}(z_2))\right)\right)$$

est un inverse à droite de T i.e

$$T \circ I_s = \mathrm{Id}_{C^*(\mathfrak{g};\mathbb{R})}$$

qui envoie tout 2-cocycle de Lie sur un 2-cocyle de groupe, et tout 2-cobord de Lie sur un cobord de groupe.

Nous renvoyons à [Nee04] ou [Cov10] pour une démonstration de ce lemme, dont l'idée générale est la même que celle de la version cubique qui va suivre, valable pour tout ouvert de carte étoilé U. Celle-ci est basée sur l'utilisation de n-cubes lisses particuliers :

Définition 3.2.3. *Soit $U_n \subset U$ un ouvert dont l'image réciproque par φ est un ouvert étoilé de $\mathfrak{g}$ contenant 0 et vérifiant de surcroît $\overbrace{U_nU_n\cdots U_n}^{n\ fois} \subset U$. Pour tout $(z_1,\cdots,z_n)$ dans $U_n^{\times n}$, $\gamma^n_{z_1,\cdots,z_n} : [0,1]^n \to U \subset G$ est le n-cube lisse défini par récurrence sur n par*

$$\gamma^n_{z_1,\cdots,z_n}(t_1,\cdots,t_n) := \varphi_{t_1}\left(z_1\gamma^{n-1}_{z_1,\cdots,z_{n-1}\varphi_{t_n}(z_n)}(t_1,\cdots,t_{n-1}\right) \quad n>1 \tag{3.2.1}$$

et

$$\gamma^1_z(t) := \varphi_t(z) \tag{3.2.2}$$

où, pour tout réel $0 \le t \le 1$, $\varphi_t : U \to U$ est l'application différentiable définie par

$$\varphi_t(z) := \varphi^{-1}(t\varphi(z)) \tag{3.2.3}$$

pour tout z dans U.

Remarque 3.2.4. *L'application φ_t définie en (3.2.3) coïncide avec l'application φ_t de la proposition 2.1.16 lorsque l'on choisit pour φ la carte donnée par le logarithme associé à une boule V centrée en 0 dans $\mathfrak{g}$, assez petite pour que la restriction de l'exponentielle à V soit un difféomorphisme sur son image U. Il est facile de voir qu'elle vérifie le point 2. de la proposition 2.1.16.*

Lemme 3.2.5. [Lemme V.2 de [Nee04], version cubique en degré quelconque] *L'application*

$$\begin{array}{rcl} I_c : C^*(\mathfrak{g};\mathbb{R}) & \to & C^*_{loc}(G;\mathbb{R}) \\ \omega \in C^n(\mathfrak{g};\mathbb{R}) & \mapsto & \left((z_1,\cdots,z_n) \mapsto \int_{[0,1]^n}(\gamma^n_{z_1,\cdots,z_n})^*\omega^{inv}\right) \in C^n_{loc}(G;\mathbb{R}) \end{array}$$

est un morphisme de complexes de cochaînes inverse à droite de T i.e

$$I_c \circ d_{CE} = d_G \circ I_c \tag{3.2.4}$$

et

$$T \circ I_c = \mathrm{Id}_{C^*(\mathfrak{g};\mathbb{R})} \tag{3.2.5}$$

Démonstration. Commençons par établir l'égalité (3.2.5) en décomposant T sous la forme $T = F^* \circ T'$. Pour toute n-cochaîne de Chevalley-Eilenberg $\omega : \Lambda^n \mathfrak{g} \to \mathbb{R}$ et pour tous g_1, ..., g_n dans $\mathfrak{g}$ l'application des définitions de T' et I_c donne :

$$T' \circ I_c(\omega)(g_1 \otimes \cdots \otimes g_n) := \int_{[0,1]^n} \frac{\partial^n}{\partial u_1 \cdots \partial u_n}\bigg|_{u_1=\cdots=u_n=0} \omega^{inv}_{\gamma^n_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n}(t_1,\cdots,t_n)}\big(\frac{\partial}{\partial t_1}\gamma'_{\alpha_1\cdots,\alpha_n}(t_1,\cdots,t_n),\cdots$$
$$\cdots, \frac{\partial}{\partial t_n}\gamma^n_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n}(t_1,\cdots,t_n)\big)\, dt_n \cdots dt_n$$

où pour tout i entre 1 et n, $\alpha_i := \alpha_i(u_i) := \varphi^{-1}(u_i\, g_i)$. Il est facile de voir que l'arc différentiable $u_i \mapsto \alpha_i(u_i)$ passe par e en $u_i = 0$ et que sa dérivée en 0 est g_i. Pour tout $J := \{j_1, \cdots, j_p\} \subset \{1, \cdots, n\}$, notons ∂_J l'opérateur $\frac{\partial^p}{\partial u_{j_1} \cdots \partial u_{j_p}}\Big|_{u_1=\cdots=u_n=0}$. Alors

$$T' \circ I_c(\omega)(g_1 \otimes \cdots \otimes g_n) := \int_{[0,1]^n} \sum_{(J_0,\cdots,J_n)} \partial_{J_0}\omega^{inv}_{\gamma^n_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n}(t_1,\cdots,t_n)}\big(\partial_{J_1}\frac{\partial}{\partial t_1}\gamma^n_{\alpha_1\cdots,\alpha_n}(t_1,\cdots,t_n),\cdots$$
$$\cdots, \partial_{J_n}\frac{\partial}{\partial t_n}\gamma^n_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n}(t_1,\cdots,t_n)\big)\, dt_1 \cdots dt_n \tag{3.2.6}$$

où $(J_0, \cdots, J_n)$ parcourt pous les $n+1$-uplets de sous-ensembles de $\{1, \cdots, n\}$ deux à deux disjoints dont la réunion est $\{1, \cdots, n\}$ (c'est-à-dire les partitions ordonnées de l'ensemble $\{1, \cdots, n\}$). La notation $\partial_{J_0}\omega^{inv}_{\gamma^n_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n}(t_1,\cdots,t_n)}$ correspond à la dérivation par rapport aux u_j tels que $j \in J_0$ des fonctions coefficients de la forme ω^{inv} écrite dans une carte[2], précomposées par γ^n.

Soit $(J_0, \cdots, J_n)$ une partition ordonnée, et un n-uplet de réels $(t_1, \cdots, t_n)$ dans $[0,1]^n$. Montrons par récurrence descendante sur $i \in \{1, \cdots, n\}$, la proprieté $(P_{n,i})$ suivante

$$\left(\partial_{J_0}\omega^{inv}_{\gamma^n_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n}}\big(\partial_{J_1}\frac{\partial}{\partial t_1}\gamma^n_{\alpha_1\cdots,\alpha_n}, \cdots, \partial_{J_n}\frac{\partial}{\partial t_n}\gamma^n_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n}\big)_{|u_1=\cdots=u_n=0} \neq 0\right) \Rightarrow i \in J_i \tag{$P_{n,i}$}$$

- **Initialisation :** La proprieté $P_{1,1}$ est clairement vraie. Il s'agit de vérifier $(P_{n,i})$ pour $i = n$, $n > 1$. Supposons que $n \notin J_n$. Comme $\varphi_{t_n}\alpha_n(0) = e$, l'égalité (3.2.1) permet d'écrire

$$\begin{aligned}\partial_{J_n}\frac{\partial}{\partial t_n}\gamma^n_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n}(t_1,\cdots,t_n) =& \partial_{J_n}\frac{\partial}{\partial t_n}\gamma^n_{\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1},e}(t_1,\cdots,t_n)\\ =& \partial_{J_n}\frac{\partial}{\partial t_n}\gamma^{n-1}_{\alpha_1,\cdots,\alpha_{n-1}}(t_1,\cdots,t_{n-1})\\ =& 0\end{aligned}$$

2. Voir la démonstration de la proposition 2.1.8 pour plus détails.

Ainsi $P_{n,n}$ est vraie pour tout entier $n > 0$.
- **Hérédité :** Soient $n > 1$ et $1 \leq i < N$. Supposons que $P_{n,j}$ est vraie pour $i < j \leq n$. Montrons que $(P_{n,i})$ est vraie. Pour tout $j > i$, comme $(P_{n,j})$ est vraie , $j \notin J_i$ car $j \in J_j$ et donc

$$\begin{aligned}\partial_{J_i} \frac{\partial}{\partial t_i} \gamma^n_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n}(t_1,\cdots,t_n) =& \partial_{J_i} \frac{\partial}{\partial t_i} \gamma^n_{\alpha_1,\cdots,\alpha_i,e,\cdots,e}(t_1,\cdots,t_n)\\ =& \partial_{J_i} \frac{\partial}{\partial t_i} \gamma^{n-i}_{\alpha_1,\cdots,\alpha_i}(t_1,\cdots,t_n)\end{aligned}$$

Si l'on suppose que $i \notin J_i$, alors $\alpha_i = e$ et par suite

$$\partial_{J_i} \frac{\partial}{\partial t_i} \gamma^n_{\alpha_1,\cdots,\alpha_n}(t_1,\cdots,t_n) = 0$$

ce qui implique que $(P_{n,i})$ est vraie. Ainsi

$$(P_{n,j}) \text{ vraie } \forall i < j \leq n \Rightarrow (P_{n,j}) \text{ vraie } \forall i \leq j \leq n \tag{3.2.7}$$

L'initialisation et (3.2.7) montrent que $(P_{n,i})$ est vraie pour tout $n > 1$ et pour tout $1 \leq i \leq n$. Ainsi le seul terme non nul dans la somme (3.2.6) est celui correspondant à la partition $(J_0, J_1, \cdots, J_n) = (\emptyset, \{1\}, \cdots, \{n\})$. Ainsi,

$$T'I_c(\omega)(g_1 \otimes \cdots \otimes g_n) = \int_{[0,1]^n} \omega_e^{inv} \left(\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial u_1}\bigg|_{u_1=0} \gamma^n_{\alpha_1,e,\cdots,e}(t_1,\cdots,t_n), \cdots , \frac{\partial^2}{\partial t_n \partial u_n}\bigg|_{|u_n=0} \gamma^n_{e,\cdots,e,\alpha_n}(t_1,\cdots,t_n) \right)$$

Or, pour tout i dans $\{1, \cdots, n\}$, comme $T_e\varphi_t = t\mathrm{Id}_{\mathfrak{g}}$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial t_i \partial u_i}_{|u_i=0} \gamma^n_{e,\cdots,e,\alpha_i(u_i),e,\cdots,e}(t_1,\cdots,t_n) =& \frac{\partial^2}{\partial t_i \partial u_i}_{|u_i=0} \varphi_{t_1} \circ \cdots \circ \varphi_{t_i} \circ \alpha_i(u_i)\\ =& \frac{\partial^2}{\partial t_i \partial u_i}_{|u_i=0} \varphi_{t_1 t_2 \cdots t_{i-1}} \circ \varphi^{-1}(t_i u_i g_i)\\ =& t_1 t_2 \cdots t_{i-1} g_i\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}T'I_c(\omega)(g_1 \otimes \cdots \otimes g_n) =& \omega(g_1 \wedge \cdots \wedge g_n) \int_{[0,1]^n} t_1^{n-1} t_2^{n-2} \cdots t_{n-1}\\ =& \frac{1}{n!} \omega(g_1 \wedge \cdots \wedge g_n)\end{aligned}$$

Ce qui donne, omme ω est invariante dous l'action du groupe symétrique définie par $(\sigma \cdot \omega)(g_1 \wedge \cdots \wedge g_n) := \mathrm{sgn}(\sigma)\omega(g_{\sigma(1)} \wedge \cdots \wedge g_{\sigma(n)})$ pour tout σ dans Σ_n,

$$TI_c(\omega) = F^n T'I_c(\omega) = \frac{1}{n!} F^n(\omega) = \omega$$

et achève de prouver (3.2.5).

Pour démontrer l'égalité (3.2.4), commençons par écrire d'une part

$$\begin{aligned}
d_G I_c(\omega)(z_1, \cdots, z_n, z_{n+1}) &= \int_{[0,1]^n} \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^i (\gamma^n_{z_1,\cdots,z_{i-1},z_i z_{i+1},z_{i+2},\cdots,z_{n+1}})^* \omega^{inv} + (\gamma^n_{z_2,\cdots,z_{n+1}})^* \omega^{inv} \\
&\quad + (-1)^{n+1} (\gamma^n_{z_1,\cdots,z_n})^* \omega^{inv} \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \int_{\gamma^n_{z_1,\cdots,z_i z_{i+1},z_{n+1}}} \omega^{inv} + \int_{\gamma^n_{z_2,\cdots,z_{n+1}}} \omega^{inv} \\
&\quad + (-1)^{n+1} \int_{\gamma^n_{z_1,\cdots,z_n}} \omega^{inv},
\end{aligned}$$

et d'autre part, d'après le théorème de Stokes

$$\begin{aligned}
I_c d_{CE}(\omega)(z_1, \cdots, z_{n+1}) &= \int_{\gamma^{n+1}_{z_1,\cdots,z_{n+1}}} d_{DR}\omega^{inv} \\
&= \int_{\partial\gamma^{n+1}_{z_1,\cdots,z_{n+1}}} \omega^{inv}
\end{aligned}$$

De plus, le bord du $(n+1)$-simplexe $\gamma^{n+1}_{z_1,\cdots,z_{n+1}}$ est la n-cochaîne singulière lisse vérifiant

$$\begin{aligned}
\partial\gamma^{n+1}_{z_1,\cdots,z_{n+1}}(t_1,\cdots,t_n) &= \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{j+1} (\gamma^{n+1}_{z_1,\cdots,z_{n+1}}(t_1,\cdots,t_{j-1},1,t_j,\cdots,t_n) - \gamma^{n+1}_{z_1,\cdots,z_{n+1}}(t_1,\cdots,t_{j-1},0,t_j,\cdots,t_n)) \\
&= \sum_{j=2}^{n} (-1)^{j+1} (\gamma^n_{z_1,\cdots,z_{j-1}z_j,\cdots,z_{n+1}}(t_1,\cdots,t_n) - \gamma^{j-1}_{z_1,\cdots,z_{j-1}}(t_1,\cdots,t_{j-1})) \\
&\quad + z_1 \gamma^n_{z_2,\cdots,z_{n+1}}(t_1,\cdots,t_n) - e + (-1)^n \gamma^n_{z_1,\cdots,z_n z_{n+1}}(t_1,\cdots,t_n) + (-1)^{n+1} \gamma^n_{z_1,\cdots,z_n}(t_1,\cdots,t_n)
\end{aligned}$$

et comme, pour j dans $\{2, \cdots, n\}$, l'intégrale de ω^{inv} sur les simplexes dégénérés $(t_1, \cdots, t_n) \mapsto \gamma_{z_1,\cdots,z_{j-1}}(t_1, \cdots, t_{j-1})$ et $(t_1, \cdots, t_n) \mapsto e$ est nulle, il vient, en utilisant l'invariance de ω^{inv} sous l'action à gauche de z_1, et le changement de variable $i := j - 1$:

$$\begin{aligned}
I_c d_{CE}(\omega)(z_1, \cdots, z_{n+1}) &= \sum_{j=2}^{n+1} (-1)^{j+1} \int_{\gamma^n_{z_1,\cdots,z_{j-1}z_j,z_{n+1}}} \omega^{inv} + \int_{z_1\gamma^n_{z_2,\cdots,z_{n+1}}} \omega^{inv} + (-1)^{n+1} \int_{\gamma^n_{z_1,\cdots,z_n}} \omega^{inv} \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^i \int_{\gamma^n_{z_1,\cdots,z_i z_{i+1},z_{n+1}}} \omega^{inv} + \int_{\gamma^n_{z_2,\cdots,z_{n+1}}} \omega^{inv} + (-1)^{n+1} \int_{\gamma^n_{z_1,\cdots,z_n}} \omega^{inv} \\
&= d_G I_c(\omega)(z_1, \cdots, z_{n+1})
\end{aligned}$$

ce qui prouve (3.2.4) et termine la démonstration du lemme. □

Afin de préciser le lien entre l'intégration de cocycles I_c et l'application G^* associée à l'homotopie h du (2.2.3) définie en 3.1.2 introduisons les opérateurs Γ et B définis comme suit :

Définition 3.2.6. *Soient n un entier, j dans $\{1, \cdots, n\}$, et t_1, ..., t_n dans $[0,1]$. Les opérateurs $\Gamma_{t_1,\cdots,t_n} : U\mathfrak{g}^{\otimes n} \to U\mathfrak{g}$ et $B^j_{t_1,\cdots,t_n} : U\mathfrak{g}^{\otimes n} \to U\mathfrak{g}$ sont définis par :*

$$\Gamma_{t_1,\cdots,t_n}(x_1, \cdots, x_n) := \Gamma_{t_1,\cdots,t_n}(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) := \phi_{t_1}\left(x_1\phi_{t_2}\big(x_2\phi_{t_3}(\cdots\phi_{t_{n-1}}(x_{n-1}\phi_{t_n}(x_n))\cdots)\big)\right) \tag{3.2.8}$$

pour tous x_1, ..., x_n dans $U\mathfrak{g}$, et

$$B^j_{t_1,\cdots,t_n} := \Gamma_{-t_1,t_2,\cdots,t_n} \star \frac{\partial}{\partial t_j}\Gamma_{t_1,\cdots,t_n} \tag{3.2.9}$$

Ici, le produit de convolution $\star$ sur $\mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(U\mathfrak{g}^{\otimes n}, , U\mathfrak{g})$ est associé au coproduit $x_1\otimes\cdots\otimes x_n \mapsto (x_1^{(1)} \otimes \cdots x_n^{(1)}) \otimes (x_1^{(2)} \otimes \cdots \otimes x_n^{(2)})$ sur $U\mathfrak{g}^{\otimes n}$.

Remarque 3.2.7. *L'opérateur $\Gamma_{t_1,\cdots,t_n}$ n'est autre que le morphisme de cogèbres de distributions ponctuelles $(\gamma^n(t_1, \cdots, t_n))_* : U\mathfrak{g}^{\otimes n} \to U\mathfrak{g}$ induite, au sens de la définition 2.1.12, par l'application différentiable $\gamma^n(t_1, \cdots, t_n) : U'^{\times n} \to U$ qui envoie $(z_1, \cdots, z_n)$ sur $\gamma^n_{z_1,\cdots,z_n}(t_1, \cdots, t_n)$.*

La proposition suivante, reliant les morphismes T', I_c et G^*, généralise le calcul de G^1 et G^2 effectué au 3.1.2 et permet d'obtenir une formule pour G^n quel que soit l'entier n.

Proposition 3.2.8. *Si $\varphi : U \to V$ est la carte logarithme associée à un ouvert convexe V sur lequel l'exponentielle est bijective sur son image U, alors*

$$G^* = T' \circ I_c \tag{3.2.10}$$

i.e l'image par G^n d'une n-cochaîne ω dans $C^n(\mathfrak{g};\mathbb{R})$ vérifie

$$G^n(\omega)(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) = \int_{[0,1]^n} dt_1 \cdots dt_n\, \omega\left(B^1_{t_1,\cdots,t_n}(x_1^{(1)}, \cdots, x_n^{(1)}), \cdots, B^n_{t_1,\cdots,t_n}(x_1^{(n)}, \cdots, x_n^{(n)})\right) \tag{3.2.11}$$

Avant de démontrer ce résultat, introduisons le lemme suivant, qui permet notamment le calcul de G^* en tout degré pour un bimodule M non nécessairement trivial :

Lemme 3.2.9. *Sous les hypothèses de la proposition 3.2.8, pour tout entier n et pour tous x, y, x_1, ..., x_n dans $U\mathfrak{g}$,*

$$\begin{aligned} G^B_n(x \otimes x_1\otimes\cdots\otimes x_n\otimes y) = \int_{[0,1]^n} dt_1\cdots dt_n\, x\Gamma_{t_1,\cdots,t_n}(x_1^{(1)},\cdots, x_n^{(1)}) \otimes B^1_{t_1,\cdots,t_n}(x_1^{(2)},\cdots, x_n^{(2)}) \wedge\cdots \\ \cdots\wedge B^n_{t_1,\cdots,t_n}(x_1^{(n+1)},\cdots, x_n^{(n+1)}) \otimes \Gamma_{-t_1,t_2,\cdots,t_n}(x_1^{(n+2)},\cdots, x_n^{(n+2)})x_1^{(n+3)}x_2^{(n+3)}\cdots x_n^{(n+3)}y \end{aligned} \tag{3.2.12}$$

Démonstration du lemme 3.2.9. Établissons l'égalité (3.2.12) par récurrence sur le degré $n \geq 0$:

– **Initialisation :** Le cas $n = 0$ (et même $n = 1$ et $n = 2$ grâce à (3.1.1) et (3.1.2)) est évident.
– **Hérédité :** Supposons que (3.2.11) soit vraie pour un dégré n donné, et soient x_1, ..., x_{n+1} dans $U\mathfrak{g}$. Par application de la définition de G^B_* donnée en (1.2.6) puis de l'hypothèse de récurrence, il vient

$$
\begin{aligned}
G^B_{n+1}(1\otimes x_1\otimes\cdots\otimes x_{n+1}\otimes 1) = \int_{[0,1]^n} dt_2\cdots dt_{n+1}
&\overbrace{h\big(x_1\Gamma_t(x_2^{(1)},\cdots,x_{n+1}^{(1)})\otimes B^1_t(x_2^{(2)},\cdots,x_{n+1}^{(2)})\wedge\cdots\wedge B^n_t(x_2^{(n+1)},\cdots,x_{n+1}^{(n+1)})\otimes
\otimes\Gamma_{-t_2,t_3,\cdots,t_{n+1}}(x_2^{(n+2)},\cdots,x_{n+1}^{(n+2)})x_2^{(n+3)}\cdots x_{n+1}^{(n+3)}\big)}^{A}\\
&\overbrace{+\sum_{i=1}^{n}(-1)^i h\big(\Gamma_t(x_1^{(1)},\cdots,x_i^{(1)}x_{i+1}^{(1)},\cdots,x_{n+1}^{(1)})\otimes B^1_t(x_1^{(2)},\cdots,x_i^{(2)}x_{i+1}^{(2)},\cdots,x_{n+1}^{(2)})\wedge\cdots
\cdots\wedge B^n_t(x_1^{(n+1)},\cdots,x_i^{(n+1)}x_{i+1}^{(n+1)},\cdots,x_{n+1}^{(n+1)})\otimes\Gamma_{-t_2,t_3,\cdots,t_{n+1}}(x_1^{(n+2)},\cdots,x_i^{(n+2)}x_{i+1}^{(n+2)},\cdots
\cdots,x_{n+1}^{(n+2)})x_1^{(n+3)}\cdots x_{n+1}^{(n+3)}\big)}^{B}\\
&+(-1)^{n+1}\overbrace{h\big(\Gamma_t(x_1^{(1)},\cdots,x_n^{(1)})\otimes B^1_t(x_1^{(2)},\cdots,x_n^{(2)})\wedge\cdots\wedge B^n_t(x_1^{(n+1)},\cdots,x_n^{(n+1)})\otimes
\otimes\Gamma_{-t_2,t_3,\cdots,t_{n+1}}(x_1^{(n+2)},\cdots,x_n^{(n+2)})x_1^{(n+3)}\cdots x_n^{(n+3)}x_{n+1}\big)}^{C}
\end{aligned}
$$

avec $t := (t_2,\cdots,t_{n+1})$, $\Gamma_t := \Gamma_{t_2,\cdots,t_n}$, et $B^i_t := B^i_{t_2,\cdots,t_{n+1}}$ $(i\in\{1\cdots,n\})$.
Montrons que les termes B et C sont nuls. Pour tous y_1, ..., y_n dans $U\mathfrak{g}$, s, et t_2, ..., t_{n+1} dans $[0,1]$, il est facile de voir, à l'aide de la proposition 2.1.16 et de l'orthogonalité des idempotents eulériens (2.1.3) qui implique que $\mathrm{pr}\circ\phi_s = s\mathrm{pr}$, que d'une part

$$\mathrm{pr}(\Gamma_t(y_1,\cdots,y_n)) = t_2\mathrm{pr}(y_1\Gamma_{t_3,\cdots,t_{n+1}}(y_2,\cdots,y_n))$$

et d'autre part, comme $\Gamma_t\star\Gamma_{-t_2,t_3,\cdots,t_{n+1}} = \eta\epsilon$ et $\frac{d}{dt}\phi_t = \phi_t\star\mathrm{pr}$,

$$
\begin{aligned}
A_s(\Gamma_t(y_1^{(1)},\cdots,y_n^{(1)}),B^1_t(y_1^{(2)},\cdots,y_n^{(2)})) =&\phi_{-s}\Gamma_t(y_1^{(1)},\cdots,y_n^{(1)})\phi_s(\frac{\partial}{\partial t_2}\Gamma_t(y_1^{(2)},\cdots,y_n^{(2)}))\\
=&\frac{d}{du}_{|u=0}\Gamma_{-st_2,t_3,\cdots,t_{n+1}}\star\Gamma_{s(t_2+u),t_3,\cdots,t_{n+1}}(y_1\otimes\cdots\otimes y_n)\\
=&\frac{d}{du}_{|u=0}\phi_{su}(y_1\Gamma_{,t_3,\cdots,t_{n+1}}(y_2,\cdots,y_n))\\
=&s\,\mathrm{pr}(y_1\Gamma_{t_3,\cdots,t_{n+1}}(y_2,\cdots,y_n))
\end{aligned}
$$

Ainsi, en utilisant (2.2.3) et l'invariance de C sous l'action de la permutation $(1,2)$ induite par la cocommutativité du coproduit Δ de manière analogue à ce qui a été fait lors du calcul de G_2^B effectué en 3.1.1 :

$$C := \int_0^1 ds\, \phi_s \Gamma_t(x_1^{(1)},\cdots,x_n^{(1)}) \otimes \mathrm{pr}(\Gamma_t(x_1^{(2)},\cdots,x_n^{(2)}) \wedge A_s(\Gamma_t({x_1^{(3)}}^{(1)},\cdots,{x_n^{(3)}}^{(1)}), B_t^1({x_1^{(3)}}^{(2)},\cdots,{x_n^{(3)}}^{(2)})) \wedge \cdots$$

$$\cdots \wedge A_s(\Gamma_t({x_1^{(n+1)}}^{(1)},\cdots,{x_n^{(n+1)}}^{(1)}), B_t^n({x_1^{(n+1)}}^{(2)},\cdots,{x_n^{(n+1)}}^{(2)})) \otimes \Gamma_{-t_2,t_3,\cdots,t_{n+1}}(x_1^{(n+2)},\cdots,x_n^{(n+2)}) x_1^{(n+3)}\cdots x_n^{(n+3)} x_{n+1}$$

$$= \int_0^1 ds\, st_2 \phi_s \Gamma_t(x_1^{(1)},\cdots,x_n^{(1)}) \otimes \overbrace{\mathrm{pr}(x_1^{(2)}\Gamma_{t_3,\cdots,t_{n+1}}(x_2^{(2)},\cdots,x_n^{(2)}) \wedge \mathrm{pr}(x_1^{(3)}\Gamma_{t_3,\cdots,t_{n+1}}(x_2^{(3)},\cdots,x_n^{(3)})}^{0} \wedge$$

$$\wedge A_s(\Gamma_t({x_1^{(4)}}^{(1)},\cdots,{x_n^{(4)}}^{(1)}), B_t^2({x_1^{(4)}}^{(2)},\cdots,{x_n^{(4)}}^{(2)})) \wedge \cdots \wedge A_s(\Gamma_t({x_1^{(n+1)}}^{(1)},\cdots,{x_n^{(n+1)}}^{(1)}), B_t^n({x_1^{(n+1)}}^{(2)},\cdots,{x_n^{(n+1)}}^{(2)})) \otimes$$

$$\otimes \Gamma_{-t_2,t_3,\cdots,t_{n+1}}(x_1^{(n+2)},\cdots,x_n^{(n+2)}) x_1^{(n+3)}\cdots x_n^{(n+3)} x_{n+1}$$

$$= 0$$

$B = 0$ s'obtient de manière tout à fait similaire.

Simplifions maintenant le terme A pour voir qu'il est égal au deuxième membre de (3.2.12) en degré $n+1$:

$$A = \int_0^1 dt_1\, \phi_{t_1}(x_1^{(1)}\Gamma_t(x_2^{(1)},\cdots,x_{n+1}^{(1)})) \otimes \mathrm{pr}(x_1^{(2)}\Gamma_t(x_2^{(2)},\cdots,x_{n+1}^{(2)})) \wedge A_{t_1}\big(x_1^{(3)}\Gamma_t({x_2^{(3)}}^{(1)},\cdots,{x_{n+1}^{(3)}}^{(1)}),$$

$$B_t^1({x_2^{(3)}}^{(2)},\cdots,{x_{n+1}^{(3)}}^{(2)})\big) \wedge \cdots \wedge A_{t_1}\big(x_1^{(n+2)}\Gamma_t({x_2^{(n+2)}}^{(1)},\cdots,{x_{n+1}^{(n+2)}}^{(1)}), B_t^n({x_2^{(n+2)}}^{(2)},\cdots,{x_{n+1}^{(n+2)}}^{(2)})\big) \otimes$$

$$\otimes \phi_{1-t_1}(x_1^{(n+3)}\Gamma_t(x_2^{(n+3)},\cdots,x_{n+1}^{(n+3)}))\Gamma_{-t_2,t_3,\cdots,t_{n+1}}(x_2^{(n+4)},\cdots,x_{n+1}^{(n+4)}) x_1^{(n+4)} x_2^{(n+5)}\cdots x_{n+1}^{(n+5)}$$

$$= \int_0^1 dt_1\, \Gamma_{t_1,t}(x_1^{(1)},\cdots,x_{n+1}^{(1)}) \otimes B_{t_1,t}^1(x_1^{(2)},\cdots,x_{n+1}^{(2)}) \wedge A_{t_1}\big(x_1^{(3)}\Gamma_t({x_2^{(3)}}^{(1)},\cdots,{x_{n+1}^{(3)}}^{(1)}), B_t^1({x_2^{(3)}}^{(2)},\cdots,{x_{n+1}^{(3)}}^{(2)})\big) \wedge \cdots$$

$$\cdots \wedge A_{t_1}\big(x_1^{(3)}\Gamma_t({x_2^{(n+2)}}^{(1)},\cdots,{x_{n+1}^{(n+2)}}^{(1)}), B_t^n({x_2^{(n+2)}}^{(2)},\cdots,{x_{n+1}^{(n+2)}}^{(2)})\big) \otimes$$

$$\otimes \Gamma_{-t_1,t}(x_1^{(n+3)},\cdots,x_{n+1}^{(n+3)}) x_1^{(n+4)}\cdots x_{n+1}^{(n+4)}$$

avec $\Gamma_{t_1,t} := \Gamma_{t_1,\cdots,t_{n+1}}$ et $B_{t_1,t}^i := B_{t_1,\cdots,t_{n+1}}^i$ pour tout i dans $\{1,\cdots,n\}$. Or

$$A_{t_1}(y_1\Gamma_t(y_2^{(1)},\cdots,y_{n+1}^{(1)}), B_t^i(y_2^{(2)},\cdots,y_{n+1}^{(2)})) = \big(\Gamma_{-t_1,t}\star\frac{\partial\Gamma_{t_1,t}}{\partial t_{i+1}}\big)(y_1,\cdots,y_{n+1}) = B_{t_1,t}^{i+1}(y_1,\cdots,y_{n+1})$$

pour tous y_1, ..., y_n dans $U\mathfrak{g}$. Ainsi

$$A = \int_0^1 dt_1\, \Gamma_{t_1,t}(x_1^{(1)},\cdots,x_{n+1}^{(1)}) \otimes B_{t_1,t}^1(x_1^{(2)},\cdots,x_{n+1}^{(2)}) \wedge \cdots \wedge B_{t_1,t}^{n+1}(x_1^{(n+2)},\cdots,x_{n+1}^{(n+2)}) \otimes$$

$$\otimes \Gamma_{-t_1,t}(x_1^{(n+3)},\cdots,x_{n+1}^{(n+3)}) x_1^{(n+4)}\cdots x_{n+1}^{(n+4)}$$

et par suite

$$\begin{aligned} G_{n+1}^B(1\otimes x_1\otimes\cdots\otimes x_{n+1}\otimes 1) &= \int_{[0,1]^n} dt_2\cdots dt_{n+1}\, A \\ &= \int_{[0,1]^{n+1}} dt_1\cdots dt_{n+1}\, \Gamma_{t_1,t}(x_1^{(1)},\cdots,x_{n+1}^{(1)}) \otimes B_{t_1,t}^1(x_1^{(2)},\cdots,x_{n+1}^{(2)}) \wedge \cdots \\ &\quad \cdots \wedge B_{t_1,t}^{n+1}(x_1^{(n+2)},\cdots,x_{n+1}^{(n+2)}) \otimes \Gamma_{-t_1,t}(x_1^{(n+3)},\cdots,x_{n+1}^{(n+3)}) x_1^{(n+4)}\cdots x_{n+1}^{(n+4)} \end{aligned}$$

ce qui montre, par $U\mathfrak{g}$-bilinéarité de G^B_{n+1}, que (3.2.12) est vraie en degré $n+1$.

$\square$

Démonstration de la proposition 3.2.8.

Ici, l'application $\varphi_t : U \to U$ coïncide avec celle définie à la proposition[3] 2.1.16. Rappelons qu'alors $(\varphi_t)_* = \phi_t : U\mathfrak{g} \to U\mathfrak{g}$ et $\phi_t \circ S = \phi_{-t}$, où S est l'antipode de $U\mathfrak{g}$ induite par l'application d'inversion $z \mapsto z^{-1}$ sur G.

Tout d'abord, calculons $T' \circ I_c(\omega)$ pour toute n-cochaîne de Chevalley-Eilenberg ω dans $C^n(\mathfrak{g};\mathbb{R})$ en utilisant la notation $\gamma^n(t_1, \cdots, t_n)$ de la remarque 3.2.7 :

$$\begin{aligned} T'I_c(\omega)(x_1\otimes\cdots\otimes x_n) =&(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n)\left((z_1,\cdots,z_n) \mapsto \int_{\gamma^n_{z_1,\cdots,z_n}} \omega^{inv}\right)\\ =&\int_{[0,1]^n}(x_1\otimes\cdots\otimes x_n)\Bigg((z_1,\cdots,z_n) \mapsto \omega\big(TL^{-1}_{\gamma^n_{z_1,\cdots,z_n}(t_1,\cdots,t_n)}\frac{\partial}{\partial t_1}\gamma^n_{z_1,\cdots,z_n}(t_1,\cdots,t_n),\cdots\\ &\cdots, TL^{-1}_{\gamma^n_{z_1,\cdots,z_n}(t_1,\cdots,t_n)}\frac{\partial}{\partial t_n}\gamma^n_{z_1,\cdots,z_n}(t_1,\cdots,t_n)\big)\Bigg)\, dt_1\cdots dt_n\\ =&\int_{[0,1]^n}\omega\Bigg(x^{(1)}\otimes\cdots\otimes x_n^{(1)}\big(T_{\gamma^n(t_1,\cdots,t_n)}L^{-1}_{\gamma^n(t_1,\cdots,t_n)}\frac{\partial}{\partial t_1}\gamma^n(t_1,\cdots,t_n)\big),\cdots\\ &\cdots, x_1^{(n)}\otimes\cdots\otimes x_n^{(n)}\big(T_{\gamma^n(t_1,\cdots,t_n)}L^{-1}_{\gamma^n(t_1,\cdots,t_n)}\frac{\partial}{\partial t_n}\gamma^n(t_1,\cdots,t_n)\big)\Bigg)\, dt_1\cdots, dt_n \end{aligned}$$

pour tous x_1, ..., x_n dans $U\mathfrak{g}$. Or, pour tous i dans $\{1,\cdots,n\}$, y_1,..., y_n dans $U\mathfrak{g}$, et t_1, ..., t_n dans $[0,1]$

$$T_{\gamma^n(t_1,\cdots,t_n)}L^{-1}_{\gamma^n(t_1,\cdots,t_n)}\frac{\partial}{\partial t_i}\gamma^n(t_1,\cdots,t_n) = \frac{\partial}{\partial u}_{|u=0}\big(\gamma^n(t_1,\cdots,t_n)^{-1}\gamma^n(t_1,\cdots,t_{i-1},t_i+u,t_{i+1},\cdots,t_n)\big)$$

et donc, par la remarque 3.2.7,

$$\begin{aligned} y_1\otimes\cdots\otimes y_n\left(T_{\gamma^n(t_1,\cdots,t_n)}L^{-1}_{\gamma^n(t_1,\cdots,t_n)}\frac{\partial}{\partial t_i}\gamma^n(t_1,\cdots,t_n)\right) =& \frac{\partial}{\partial u}\Big|_{|u=0}\Gamma_{-t_1,\cdots,t_n}(y_1^{(1)},\cdots,y_n^{(1)})\Gamma_{t_1,\cdots,t_i+u,\cdots,t_n}(y_1^{(2)},\cdots,y_n^{(2)})\\ =&B^i_{t_1,\cdots,t_n}(y_1,\cdots,y_n) \end{aligned}$$

D'où

$$T'I_c(\omega)(x_1\otimes\cdots\otimes x_n) = \int_{[0,1]^n} dt_1\cdots dt_n\, \omega\left(B^1_{t_1,\cdots,t_n}(x_1^{(1)},\cdots,x_n^{(1)}),\cdots,B^n_{t_1,\cdots,t_n}(x_1^{(n)},\cdots,x_n^{(n)})\right)$$

Ainsi, (3.2.11) implique (3.2.10). Il reste à voir que (3.2.11) est vraie en appliquant (3.2.12) à la définition de G^* dans le cas des coefficients triviaux. $\square$

3. Voir la remarque 3.2.4.

Concluons cette sous-section en en résumant les principaux résultats établis à la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd} C^*(\mathfrak{g};\mathbb{R}) \arrow[r, "I_c"] \arrow[rr, bend left, "\mathrm{Id}"] \arrow[dr, "G^*"'] & C^*_{loc}(G;\mathbb{R}) \arrow[r, "T"] \arrow[d, "T'"] & C^*(\mathfrak{g};\mathbb{R}) \\ & CH^*(U\mathfrak{g};\mathbb{R}) \arrow[ur, "F^*"'] & \end{tikzcd} \tag{3.2.13}$$

dans la catégorie des complexes de cochaînes. Celle-ci implique au passage :

Corollaire 3.2.10. *Le complexe de cochaînes $C^*(\mathfrak{g};\mathbb{R})$ est un rétract par déformation de $CH^*(U\mathfrak{g})$ i.e*

$$F^* \circ G^* = \mathrm{Id}_{C^*(\mathfrak{g};\mathbb{R})}$$

Notons que par construction, $CH^*(U\mathfrak{g};\mathbb{R}) \underset{G^*}{\overset{F^*}{\rightleftarrows}} C^*(\mathfrak{g};\mathbb{R})$ est déjà une équivalence d'homotopie.

3.2.2 Version algébrique de l'intégration de cocycles

Complétion de Malcev de $U\mathfrak{g}$ et grouplikes

Notons $I := \mathrm{Ker}\epsilon$ l'idéal d'augmentation de $U\mathfrak{g}$, I^n sa puissance n-ième pour tout entier n, et considérons le système inverse de projections

$$\mathbb{R} = U\mathfrak{g}/_I \twoheadleftarrow U\mathfrak{g}/_{I^2} \twoheadleftarrow U\mathfrak{g}/_{I^3} \twoheadleftarrow \cdots \twoheadleftarrow U\mathfrak{g}/_{I^n} \twoheadleftarrow U\mathfrak{g}/_{I^{n+1}} \twoheadleftarrow \cdots$$

Définition 3.2.11. *Le **complet** de $U\mathfrak{g}$, noté $\hat{U\mathfrak{g}}$, est défini par*

$$\hat{U\mathfrak{g}} := \lim_{\substack{\leftarrow \\ n}} U\mathfrak{g}/_{I^n}$$

Proposition 3.2.12. *La structure d'algèbre de Hopf cocommutative connexe $(\mu, \eta, \Delta, \epsilon, S)$ sur $U\mathfrak{g}$ induit sur $\hat{U\mathfrak{g}}$ une structure d'algèbre de Hopf cocommutative complète, notée de la même façon. Les primitifs de $\hat{U\mathfrak{g}}$ forment une sous-algèbre de Lie de $\hat{U\mathfrak{g}}$ contenant $\mathfrak{g}$, notée $\hat{\mathfrak{g}}$.*

Définition 3.2.13. *Le **groupe de Malcev** associé à $\mathfrak{g}$, noté $\hat{G}$, est le sous-ensemble de $1+\hat{I} \subset \hat{U\mathfrak{g}}$ constitué des éléments x **de type groupe**, i.e vérifiant*[4]

$$\Delta x = x \otimes x \in \hat{U\mathfrak{g}} \hat{\otimes} \hat{U\mathfrak{g}}$$

$\hat{G}$ est le "groupe de Lie associé" à $\hat{\mathfrak{g}}$ dans le sens suivant :

Proposition 3.2.14. *L'application exponentielle*

$$\begin{array}{rcl} \exp := \hat{\mathfrak{g}} & \to & \hat{G} \\ g & \mapsto & \exp(g) := e^g := \sum_{n\geq 0} \frac{1}{n!} g^n \end{array}$$

est une bijection.

4. Voir l'appendice A pour la définition du produit tensoriel completé $\hat{\otimes}$.

L'inclusion

$$\hat{G} \hookrightarrow \hat{U\mathfrak{g}}$$

induit, par proprieté universelle de l'algèbre de groupe, un morphisme d'algèbres

$$\mathbb{R}\hat{G} \to \hat{U\mathfrak{g}}$$

et donc un morphismes de complexes de cochaînes

$$Q : CH^*(\hat{U\mathfrak{g}};\mathbb{R}) \to C^*(\hat{G};\mathbb{R}) = CH^*(\mathbb{R}\hat{G};\mathbb{R})$$

L'application évidente $U\mathfrak{g} \to \hat{U\mathfrak{g}}$ induit pour sa part une application

$$P : CH^*(\hat{U\mathfrak{g}};\mathbb{R}) \to CH^*(U\mathfrak{g};\mathbb{R})$$

La situation est alors la suivante

$$\begin{tikzcd}
C^*(\hat{G};\mathbb{R}) & \\
CH^*(\hat{U\mathfrak{g}};\mathbb{R}) \arrow[u, "Q"] \arrow[d, "P"'] & C^*(\mathfrak{g};\mathbb{R}) \arrow[dl, shift left, "G^*"] \\
CH^*(U\mathfrak{g};\mathbb{R}) \arrow[ur, shift left, "F^*"] &
\end{tikzcd} \tag{3.2.14}$$

Afin de définir les applications T et I_c de la sous-section précédente nous avons dû nous restreindre au complexe des cochaînes de groupes localement lisses $C^*_{loc}(G;\mathbb{R})$. Pour définir I_c lorsque $\mathfrak{g}$ est de dimension quelconque, il nous aurait fallu également ne considérer que des cochaînes d'algèbre de Lie continues sur $\mathfrak{g}$, étant entendu que $\mathfrak{g}$ est elle même équipée d'une topologie adaptée ([Nee04]). L'objectif du paragraphe suivant est de donner un sens à une telle notion de continuité/lissité dans un cadre algébrique.

Cochaînes continues

Il est possible de définir une topologie sur $\mathfrak{g}$ et $U\mathfrak{g}$ rendant l'inclusion $\mathfrak{g} \hookrightarrow U\mathfrak{g}$ continue à l'aide de l'idéal d'augmentation I. Une base de voisinages de 0 dans $U\mathfrak{g}$ est donnée par les puissances I^k de I et l'on obtient une base de voisinages de tout autre point par translation. Le produit tensoriel $U\mathfrak{g}^{\otimes n}$ est alors équipée de la topologie "produit" dont une base de voisinage de 0 est donnée par les puissances J^k , $k \geq 0$ de l'idéal d'augmentation [5] J défini comme suit

$$J := I \otimes U\mathfrak{g}^{\otimes(n-1)} + U\mathfrak{g} \otimes I \otimes U\mathfrak{g}^{\otimes(n-2)} + \cdots + U\mathfrak{g}^{(n-1)} \otimes I \subset U\mathfrak{g}^{\otimes n} \tag{3.2.15}$$

Cette topologie sur $U\mathfrak{g}$ et sur ses puissances tensorielles sera appelée topologie **I-adique**.

5. Pour l'augmentation $\epsilon^{\otimes n} : U\mathfrak{g}^{\otimes n} \to \mathbb{R}^{\otimes n} \cong \mathbb{R}$.

Proposition 3.2.15. *Munissons $\mathbb{R}$ de la topologie usuelle. Alors, une n-cochaîne de Hochschild $\omega : U\mathfrak{g}^{\otimes n} \to \mathbb{R}$ est continue pour la topologie I-adique si et seulement si il existe un entier k tel que*

$$\omega(J^k) = \{0_{\mathbb{R}}\}$$

Remarque 3.2.16. *La proposition précédente peut être reformulée en disant qu'une cochaîne de Hochschild est continue pour la topologie usuelle sur l'espace d'arrivée $\mathbb{R}$ si et seulement si et seulement si elle l'est pour la topologie discrète. Nous voyons donc que la continuité est une proprieté forte des cochaînes.*

Dans le cas de $\mathfrak{g}$, il existe une suite décroissante d'idéaux toute indiquée :

Définition 3.2.17. *La **suite centrale descendante** de $\mathfrak{g}$ est la suite décroissante d'idéaux de $\mathfrak{g}$*

$$D_1(\mathfrak{g}) := [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \cdots \subset D_k(\mathfrak{g}) \subset D_{k+1}(\mathfrak{g}) \subset \cdots$$

vérifiant la condition définissante suivante

$$D_k(\mathfrak{g}) := [D_{k-1}(\mathfrak{g}), \mathfrak{g}]$$

pour tout $k \geq 2$.

*$\mathfrak{g}$ est dite **nilpotente** lorsqu'il existe un entier k tel que $D_k(\mathfrak{g} = \{0\}$.*

*La topologie la moins fine sur $\mathfrak{g}$ pour laquelle la famille $(D_k(\mathfrak{g}))_{k\geq 1}$ est une base de voisinage de 0 est appelée **topologie D-adique**. En étendant cette topologie à $\Lambda^n\mathfrak{g}$ de manière analogue à ce qui a été fait pour $U\mathfrak{g}^{\otimes n}$, nous pouvons définir le sous-espace vectoriel $C^n_c(\mathfrak{g}; \mathbb{R})$ du complexe de Chevalley-Eilenberg de $\mathfrak{g}$ constitué des cochaînes continues pour la topologie D-adique.*

Proposition 3.2.18. *Les différentielles d_H et d_{CE} se restreignent aux sous-espaces de cochaînes continues, faisant de $(CH^*_c(U\mathfrak{g}; \mathbb{R}), d_H)$ et $(C^*_c(\mathfrak{g}; \mathbb{R}), d_{CE})$ des sous-complexes respectifs de $(CH^*(U\mathfrak{g}; \mathbb{R}), d_H)$ et $(C^*(\mathfrak{g}, \mathbb{R}), d_{CE})$.*

Démonstration. Il suffit de voir que les différentielles $d^H : U\mathfrak{g}^{\otimes n} \to U\mathfrak{g}^{\otimes n-1}$ et $d^{CE} : \Lambda^n\mathfrak{g} \to \Lambda^{n-1}\mathfrak{g}$ sont continues, les différentielles cohomologiques étant obtenues par précomposition des cochaînes avec ces dernières. Ceci est une conséquence directe de la continuité évidente du produit de $U\mathfrak{g}$ et du crochet de $\mathfrak{g}$. □

Le lien entre la topologie de $U\mathfrak{g}$ et celle de $\mathfrak{g}$ est donnée par la proposition suivante :

Proposition 3.2.19. *La topologie D-adique est celle induite par la toplogie I-adique de $U\mathfrak{g}$ via l'inclusion $\mathfrak{g} \hookrightarrow U\mathfrak{g}$, ce qui montre en particulier la continuité de cette dernière.*

Démonstration. La topologie induite sur $\mathfrak{g}$ par la topologie I-adique est engendrée par la base de voisinages de 0

$$I^k \cap \mathfrak{g} \quad , \quad k \geq 0$$

Montrons que pour tout entier k,

$$I^k \cap \mathfrak{g} = D_k(\mathfrak{g})$$

L'inclusion $D_k(\mathfrak{g}) \subset I^k \cap \mathfrak{g}$ est évidente, il reste donc à établir l'autre. Soit x dans $I^k \cap \mathfrak{g}$. x s'écrit comme une somme de sommes s_i de monômes de longeur $i \geq k$

$$x = \sum_i s_i$$

De plus, par la proposition (2.1.3), $\mathrm{pr}\, x = x$ donc

$$x = \mathrm{pr}\, x = \sum_i \mathrm{pr}\, s_i$$

Or, d'après la formule (A.3.1) de l'appendice A., chaque $\mathrm{pr}\, s_i$ est stable par l'idempotent de Dynkin donc dans $D_k(\mathfrak{g})$ et par linéarité, s est également dans $D_k(\mathfrak{g})$ ce qui prouve l'inclusion $\mathfrak{g} \cap I^k \subset D_k(\mathfrak{g})$.

La continuité de l'inclusion est alors immédiate par définition de la topologie induite. Nous avons au passage montré que $\mathrm{pr}(I^k) \subset D_k(\mathfrak{g})$ ce qui implique

Lemme 3.2.20. *L'application* $\mathrm{pr} : U\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ *est continue. Par conséquent, vu que le coproduit de* $U\mathfrak{g}$ *est continu, l'application* $\phi_t : U\mathfrak{g} \to U\mathfrak{g}$ *et ses dérivées* $\frac{d^n}{dt^n}\phi_t$ *sont également continues.*

□

Avant de compléter partiellement la version "continue" du diagramme (3.2.14), vérifions que les morphismes F^* et G^* se restreignent correctement

Proposition 3.2.21. *Les morphismes* $F^* : CH^*(U\mathfrak{g};\mathbb{R}) \to C^*(\mathfrak{g};\mathbb{R})$ *et* $G^* : C^*(\mathfrak{g};\mathbb{R}) \to CH^*(U\mathfrak{g};\mathbb{R})$ *se restreignent aux sous-complexes de cochaînes continues en un rétract par déformation*

$$CH^*_c(U\mathfrak{g};\mathbb{R}) \underset{G^*}{\overset{F^*}{\rightleftarrows}} C^*_c(\mathfrak{g};\mathbb{R})$$

Démonstration. La continuité de l'image par F^* d'une cochaîne de Hochschild continue provient de la continuité de l'inculsion $\mathfrak{g} \hookrightarrow U\mathfrak{g}$ et de l'action du groupe symétrique. Il reste à montrer que si ω est une n-cochaîne de Lie continue, $G^n(\omega)$ est continue pour la topologie I-adique . Par définition [6], G^n se décompose sous la forme $G^n(\omega) := \omega \circ \bar{G}_B$, où $\bar{G}_B : U\mathfrak{g}^{\otimes n} \to \Lambda^n\mathfrak{g}$ est l'application linéaire définie par

$$\bar{G}_B(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) := \int_{[0,1]^n} dt_1 \cdots dt_n\, B^1_{t_1,\cdots,t_n}(x_1^{(1)}, \cdots, x_n^{(1)}) \wedge \cdots \wedge B^n_{t_1,\cdots,t_n}(x_1^{(n)}, \cdots, x_n^{(n)})$$

pour tous x_1, ..., x_n dans $U\mathfrak{g}$. Les B_i sont les opérateurs définis en (3.2.9). Il suffit donc d'établir la continuité de $\bar{G}_B$. Or il est clair, grâce au lemme 3.2.20, que chaque $B^j_{t_1,\cdots,t_n} : U\mathfrak{g}^{\otimes n} \to \mathfrak{g}$ est continu puisque convolé de composées de produits et d'applications ϕ_{t_j} et de leurs dérivées. Comme de surcroît le coproduit Δ sur $U\mathfrak{g}$ et l'application $g_1 \otimes \cdots \otimes g_n \mapsto g_1 \wedge \cdots \wedge g_n$ de $g^{\otimes n}$ dans $\Lambda^n\mathfrak{g}$ sont continus, il devient évident que $\bar{G}_B$ l'est aussi. □

6. Voir section 3.1.

Pour intégrer une cochaîne de Chevalley-Eilenberg en cochaîne de groupe, il reste à relever les cochaînes de Hochschild continues sur $U\mathfrak{g}$ en cochaînes sur son completé, ce qui nécessite de préciser la topologie sur $\hat{U\mathfrak{g}}$.

Définition 3.2.22. *La topologie $\hat{I}$-adique sur $U\mathfrak{g}$ est celle engendrée par la base de voisinage $\hat{I}^n$ des puissances de l'idéal d'augmentation $\hat{I}$ défini par*

$$\hat{I} := \lim_{\substack{\leftarrow \\ n}} I/_{I^n} \subset \hat{U\mathfrak{g}}$$

Les puissances tensorielles completées[7] $\hat{U\mathfrak{g}}^{\hat{\otimes} n}$ *de $\hat{U\mathfrak{g}}$ de $U\mathfrak{g}$ héritent de cette topologie. Les cochaînes de Hochschild continues $\omega : \hat{U\mathfrak{g}}^{\hat{\otimes} n} \to \mathbb{R}$ forment un complexe de $CH^*_c(\hat{U\mathfrak{g}};\mathbb{R})$ pour la différentielle d_H prolongée par continuité.*

Proposition 3.2.23. *Le morphisme de restriction $P : CH^*(\hat{U\mathfrak{g}};\mathbb{R}) \to C^*(U\mathfrak{g};\mathbb{R})$ induit un isomorphisme de complexes de cochaînes continues*

$$P : CH^*_c(\hat{U\mathfrak{g}};\mathbb{R}) \overset{\cong}{\to} C^*_c(U\mathfrak{g};\mathbb{R})$$

Démonstration. Toute application continue $f : U\mathfrak{g}^{\otimes n} \to \mathbb{R}$ se prolonge de manière unique en une application continue $P^{-1}(f) : \widehat{U\mathfrak{g}^{\otimes n}} = \hat{U\mathfrak{g}}^{\hat{\otimes} n} \to \mathbb{R}$. Cette proprieté de la complétion est démontrée dans [Trè67] pour les espaces vectoriel topologiques. Notons que les espaces vectoriels considérés dans cette section sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels topologiques lorsque l'on muni le corps $\mathbb{R}$ de la topologie discrète. $\square$

Ainsi, dans le cas continu, le diagramme (3.2.14) s'enrichit en un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
C^*(\hat{G};\mathbb{R}) & \\
CH^*_c(\hat{U\mathfrak{g}};\mathbb{R}) \arrow[u, "Q"] \arrow[d, shift left, "P"] & C^*_c(\mathfrak{g};\mathbb{R}) \arrow[dl, shift left, "G^*"] \\
CH^*_c(U\mathfrak{g};\mathbb{R}) \arrow[u, shift left, "P^{-1}"] \arrow[ur, shift left, "F^*"] &
\end{tikzcd} \tag{3.2.16}$$

La dernière étape avant d'achever la comparaison avec le cas différentiable (3.2.13) est l'introduction de la notion de cochaîne de groupe lisse en $1 \in \hat{G}$:

Définition 3.2.24. *Soit p un entier. Une n-cochaîne de groupe $f : G^{\otimes n} \to \mathbb{R}$ est dite* ***p-lisse en*** 1 *si il existe p applications multilinéaires symétriques continues*

$$D^i f : (\hat{\mathfrak{g}}^{\oplus n})^{\hat{\otimes} i} \to \mathbb{R} \quad , i \in \{1, \cdots, p\} \,,$$

et une application continue $O : \hat{\mathfrak{g}}^{\oplus n} \to \mathbb{R}$, vérifiant les conditions

7. Voir l'appendice B de [Qui69] pour une définition de produit tensoriel completé d'algèbres filtrées ou l'appendice A. du présent manuscrit pour une définition ad hoc.

1.

$$f(e^{g_1},\cdots,e^{g_n})=f(1,\cdots,1)+\sum_{i=1}^{n}D^if\big((g_1,\cdots,g_n)\otimes\cdots\otimes(g_1,\cdots,g_n)\big)+O(g_1,\cdots,g_n) \tag{3.2.17}$$

pour tout $(g_1,\cdots,g_n)$ *dans* $\hat{\mathfrak{g}}^{\oplus n}$*,*

2. et

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^p}O(g(t))=0 \tag{3.2.18}$$

pour tout arc dérivable[8] $g:[-1,1]\to\hat{\mathfrak{g}}^{\oplus n}$ *tel que* $g(0)=0$*.*

L'application D^if *est appelée* ***différentielle*** i***-ème*** *de* f*. Une cochaîne* p*-lisse en* 1 *pour tout entier* p *sera dite* ***lisse****.*

Remarque 3.2.25. *Dans la définition précédente, les applications* D^if*, lorsqu'elles existent, sont uniques, car une forme i-linéaire symétrique est entièrement déterminée par ses valeurs sur les tenseurs de la forme* $x\otimes x\otimes\cdots\otimes x$*. Ceci qui peut se montrer par récurrence sur* i*, en utilisant la relation (3.2.17) comme dans le cas usuel des fonctions admettant un développement de Taylor en un point de* $\mathbb{R}^k$*,* $k\in\mathbb{N}$*.*

Proposition 3.2.26. *Les cochaînes lisses en* 1 *sur* $\hat{G}$ *forment un sous-complexe de* $C^*(\hat{G};\mathbb{R})$*, noté* $C^*_s(\hat{G};\mathbb{R})$*. De plus, l'application de restriction* $Q:CH^*(\hat{U\mathfrak{g}};\mathbb{R})\to C^*(\hat{G};\mathbb{R})$ *se restreint en un morphisme de sous-complexes*

$$Q:CH^*_c(\hat{U\mathfrak{g}};\mathbb{R})\to C^*_s(\hat{G};\mathbb{R})$$

Démonstration.

1. En premier lieu, montrons que d_G se restreint au cochaînes lisses. Soit $f:G^{\times n}\to\mathbb{R}$ une n-cochaîne lisse. Alors, pour tous g_1, ..., g_{n+1} dans $\mathfrak{g}$,

$$\begin{aligned}d_Gf(e^{g_1},\cdots,e^{g_{n+1}}):=&f(e^{g_2},\cdots,e^{g_{n+1}})+\sum_{i=1}^{n}(-1)^if(e^{g_1},\cdots,e^{g_i}e^{g_{i+1}},\cdots,e^{g_{n+1}})\\&+(-1)^{n+1}f(e^{g_1},\cdots,e^{g_n})\end{aligned}$$

– Soit i dans $\{1,\cdots n\}$, alors

$$e^{g_i}e^{g_{i+1}}=e^{BCH(g_i,g_{i+1})}$$

où $BCH(g_i,g_{i+1})\in\hat{\mathfrak{g}}$ est la série de Baker-Campbell-Hausdorff définie en A.3.2. Ainsi, comme f est lisse, pour tout entier p, il existe D^1f, ..., D^pf et O vérifiant (3.2.17) et (3.2.18) telles que

$$\begin{aligned}f(e^{g_1},\cdots,e^{g_i}e^{g_{i+1}},\cdots,e^{g_{n+1}})=&f(1\cdots 1)+\sum_{j=1}^{p}D^jf((g_1,\cdots,BCH(g_i,g_{i+1}),\cdots,g_{n+1})^{\hat{\otimes}j})\\&+O(g_1,\cdots,BCH(g_i,g_{i+1}),\cdots,g_{n+1})\end{aligned}$$

8. Un arc $\gamma:[-1,1]\to\hat{U\mathfrak{g}}$ est dit dérivable si pour tout entier k, il existe des applications dérivables $\lambda_i:[-1,1]\to\mathbb{R}$ et des éléments $x_i\in\hat{U\mathfrak{g}}$, **en nombre fini**, tels que $g(t)=\sum_i\lambda_i(t)x_i$ modulo $\hat{I}^k$.

Détaillons, pour j fixé dans $\{1, \cdots, p\}$ le tenseur $(g_1, \cdots, BCH(g_i, g_{i+1}), \cdots, g_{n+1})^{\hat{\otimes} j} \in (\mathfrak{g}^{\hat{\oplus} n})^{\hat{\otimes} j}$:

$$(g_1,\cdots, BCH(g_i, g_{i+1}),\cdots, g_{n+1})^{\otimes j} = \Big((g_1,\cdots, g_{i-1}, g_i + g_{i+1}, g_{i+2},\cdots, g_{n+1}) + \sum_{k\geq 2}(0,\cdots, BCH_k(g_i, g_{i+1}),\cdots, 0)\Big)^{\hat{\otimes} j}$$

Pour tout $k \geq 2$, par construction de $BCH_k(g_i, g_{i+1})$ comme somme de crochets k-itérés (cf. A.3.2) en g_i et g_j, il est clair qu'il existe une application k-linéaire continue $L_k : (\hat{\mathfrak{g}}^{\oplus n+1})^{\hat{\otimes} k} \to \hat{\mathfrak{g}}^{\oplus n}$ telle que

$$L_k((g_1, \cdots, g_{n+1})^{\hat{\otimes} k}) = (0, \cdots, 0, BCH_k(g_i, g_{i+1}), 0, \cdots, 0) \in \hat{\mathfrak{g}}^{\oplus n}$$

En posant $L_1(g_1, \cdots, g_{n+1}) := (g_1, \cdots, g_{i-1}, g_i + g_{i+1}, g_{i+2}, \cdots, g_{n+1})$, , il vient

$$D^j f((g_1, \cdots, BCH(g_i, g_{i+1}), \cdots, g_{n+1})^{\otimes j}) = \sum_{k_1,\cdots,k_j\geq 1} D^j f \circ (L_{k_1} \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} L_{k_j})((g_1, \cdots, g_{n+1})^{\hat{\otimes} k_1+\cdots+k_j})$$

Or, pour tout entier $k \geq 1$,

$$\sum_{k_1+\cdots+k_j=k} D^j f \circ (L_{k_1} \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} L_{k_j}) : (\hat{\mathfrak{g}}^{\oplus n+1})^{\hat{\otimes} k} \to \mathbb{R}$$

est k-linéaire continue donc il existe une application linéaire continue et symétrique $S_k^j : (\hat{\mathfrak{g}}^{\oplus n+1})^{\hat{\otimes} k} \to \mathbb{R}$, nulle pour k assez grand par continuité de $D^j f$, et telle que

$$\sum_{k_1+\cdots+k_j=k} D_j f \circ (L_{k_1} \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} L_{k_j})((g_1, \cdots, g_{n+1})^{\hat{\otimes} k}) = S_k^j((g_1, \cdots, g_{n+1})^{\hat{\otimes} k})$$

quels que soient g_1, ..., g_{n+1} dans $\hat{\mathfrak{g}}$ Ainsi

$$\begin{aligned} f(e^{g_1}, \cdots, e^{g_i}e^{g_{i+1}}, \cdots, e^{g_{n+1}}) =& f(1 \cdots, 1) + \sum_{k\geq 1}\sum_{j=1}^{p} S_k^j((g_1, \cdots, g_{n+1})^{\hat{\otimes} k}) \\ &+ O(g_1, \cdots, BCH(g_i, g_{i+1}), \cdots, g_{n+1}) \end{aligned}$$

Il est alors facile de vérifier, comme $t \mapsto BCH(g_i(t), g_{i+1}(t))$ est un arc dérivable s'annulant en 0 dès lors que $t \mapsto (g_i(t), g_{i+1}(t))$ en est un, que si $t \mapsto (g_1(t), \cdots, g_{n+1}(t))$ est un arc différentiable s'annulant en 0

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t^p}\left(\sum_{k>p}\sum_{j=1}^{p} S_k^j((g_1(t), \cdots, g_{n+1}(t))^{\hat{\otimes} k}) + O(g_1(t), \cdots, BCH(g_i(t), g_{i+1}(t)), \cdots, g_{n+1}(t))\right) = 0$$

Ce qui achève de montrer que pour tout $i \in \{1, \cdots, n\}$,

$$(g_1, \cdots, g_{n+1}) \mapsto f(e^{g_1}, \cdots, e^{g_i}e^{g_{i+1}}, \cdots, e^{g_{n+1}})$$

est p-lisse en 1, avec différentielle k-ième $\displaystyle\sum_{j=1}^{k} S_k^j$ pour chaque $k \in \{1, \cdots, p\}$.

– Un raisonnement analogue permet d'établir que,

$$(g_1, \cdots, g_{n+1}) \mapsto f(e^{g_2}, \cdots, e^{g_{n+1}}) + (-1)^{n+1} f(e^{g_2}, \cdots, e^{g_n})$$

est p-lisse en 1

– Il découle des deux points précédents que pour tout entier p, $d_G f$ est p-lisse en 1 comme somme de $(n+1)$-cochaînes p-lisses, et donc est p-lisse

Donc d_G se restreint bien au sous-espace des cochaînes lisses, faisant de $(C_s^*(\hat{G}, \mathbb{R}), d_G)$ un sous-complexe de $C^*(\hat{G}; \mathbb{R})$.

2. Il reste maintenant à démontrer que l'image par Q d'une n-cochaîne de Hochschild continue $\omega : (\hat{U\mathfrak{g}})^{\hat{\otimes} n} \to \mathbb{R}$ est p-lisse pour tout entier p. Soient g_1, ..., g_n dans $\hat{\mathfrak{g}}$. Par définition de Q,

$$Q(\omega)(e^{g_1}, \cdots, e^{g_n}) = \omega(\sum_{k_1, \cdots, k_n \geq 0} \frac{1}{k_1! k_2! \cdots k_n!} g_1^{k_1} \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} g_n^{k_n})$$

Montrons que les applications $D^i Q(\omega) : (\hat{\mathfrak{g}}^{\oplus n})^{\hat{\otimes} i} \to \mathbb{R}$ et $O : \hat{\mathfrak{g}}^{\oplus n} \to \mathbb{R}$ définies par

$$D^i Q(\omega)(\bar{g}_1 \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} \bar{g}_i)) := \sum_{0 = k_0 \leq k_1 \leq \cdots \leq k_{n-1} \leq k_n = i} \frac{1}{k_1!(k_2 - k_1)! \cdots (k_n - k_{n-1} - \cdots - k_1)!} \frac{1}{i!} \sum_{\sigma \in \Sigma_i} \omega(\bar{g}_\sigma^1 \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} \bar{g}_\sigma^n)$$

pour tous i dans $\{1, \cdots, p\}$, $\bar{g}_j := (g_{1,j}, \cdots, g_{n,j})$ dans $\hat{\mathfrak{g}}^{\oplus n}$ quand $1 \leq j \leq i$, avec la convention $\bar{g}_\sigma^l := g_{l,\sigma(k_{l-1}+1)}\, g_{l,\sigma(k_{p-1}+2)} \cdots g_{l,\sigma(k_l)}$ et

$$O(g_1, g_2, \cdots, g_n) := \omega(\sum_{k_1 + \cdots + k_n > p} \frac{1}{k_1! \cdots k_n!} g_1^{k_1} \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} g_n^{k_n})$$

satisfont les conditions 1. et 2. de la définition 3.2.24 en posant $f := Q(\omega)$. La multilinéarité et la symétrie des $D^i Q(f)$ sont évidentes par construction, et la continuité de ω implique celle de chaque $D^i Q(\omega)$ et de O. L'égalité

$$Q(\omega)(e^{g_1}, \cdots, e^{g_n}) = Q(\omega)(1, \cdots, 1) + \sum_{i=1}^{p} D^i Q(\omega)((g_1, \cdots, g_n)^{\hat{\otimes} i}) + O(g_1, \cdots, g_n)$$

se vérifie sans peine ce qui montre que la condition (3.2.17) est satisfaite. De plus, si $t \mapsto (g_1(t), \cdots, g_n(t))$ est un arc différentiable à valeurs dans $\hat{\mathfrak{g}}^{\oplus n}$ qui s'annule en $t = 0$,

$$\frac{1}{t^p} O(g_1(t), \cdots, g_n(t)) = \omega\left(\sum_{k_1 + \cdots + k_n > p} \frac{t^{k_1 + \cdots + k_n - p}}{k_1! \cdots k_n!} (\frac{1}{t} g_1)^{k_1} \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} (\frac{1}{t} g_n)^{k_n}\right)$$

Soit $\delta > 0$. Par continuité de ω, il existe une entier q tel que

$$\omega\left(\sum_{k_1 + \cdots + k_n > q} \frac{t^{k_1 + \cdots + k_n - p}}{k_1! \cdots k_n!} (\frac{1}{t} g_1)^{k_1} \hat{\otimes} \cdots \hat{\otimes} (\frac{1}{t} g_n)^{k_n}\right) = 0$$

Ainsi,

$$|\frac{1}{t^p}O(g_1(t),\cdots,g_n(t))| < \sum_{q>k_1+\cdots+k_n>p} \frac{|t|^{k_1+\cdots+k_n-p}}{k_1!\cdots k_n!}|\,|\omega\left((\frac{1}{t}g_1)^{k_1}\hat{\otimes}\cdots\hat{\otimes}(\frac{1}{t}g_n)^{k_n}\right)|$$

et il est facile de voir que chaque $\omega\left((\frac{1}{t}g_1)^{k_1}\hat{\otimes}\cdots\hat{\otimes}(\frac{1}{t}g_n)^{k_n}\right)$ est une somme finie de produits de quotients par t de fonctions dérivables en 0, et a donc une limite finie quand t tend vers 0. Il s'ensuit que l'existence d'un réel $t_0 > 0$ tel que

$$\sum_{q>k_1+\cdots+k_n>p} \frac{|t|^{k_1+\cdots+k_n-p}}{k_1!\cdots k_n!}|\,|\omega\left((\frac{1}{t}g_1)^{k_1}\hat{\otimes}\cdots\hat{\otimes}(\frac{1}{t}g_n)^{k_n}\right)| < \delta$$

et donc

$$|\frac{1}{t^p}O(g_1(t),\cdots,g_n(t))| < \delta$$

dès que $|t| \leq t_0$. Ceci montre que O vérifie la condition (3.2.18) et prouve la p-lissité de $Q(\omega)$ pour tout p.

□

Définition 3.2.27. *La version algébrique de l'application d'intégration est le morphisme de complexes de cochaînes $I_c : C^*_c(\mathfrak{g};\mathbb{R}) \to C^*_s(\hat{G};\mathbb{R})$ défini par*

$$I_c := Q \circ P^{-1} \circ G^*$$

Proposition 3.2.28. *L'application $T'' : C^*_s(\hat{G};\mathbb{R}) \to C^*_c(\hat{\mathfrak{g}};\mathbb{R})$ définie en degré n par*

$$T''(f)(g_1\wedge\cdots\wedge g_n) := n!\sum_{\sigma\in\Sigma_n}\mathrm{sgn}(\sigma)D^n f((g_{\sigma(1)},0,\cdots,0)\hat{\otimes}\cdots\hat{\otimes}(0,\cdots,0,g_{\sigma(n)}))$$

pour tous g_1, ..., g_n dans $\hat{\mathfrak{g}}$, est un morphisme de complexes de cochaînes induisant, via l'application canonique $\mathfrak{g}\to\hat{\mathfrak{g}}$, un morphisme de complexe $T : C^*_s(\hat{G};\mathbb{R}) \to C^*_c(\mathfrak{g};\mathbb{R})$. De plus

$$T \circ I_c = \mathrm{Id}_{C^*_c(\hat{\mathfrak{g}};\mathbb{R})}$$

Démonstration. Expliquons pourquoi $T'' \circ d_G = d_{CE} \circ T''$. Soit $n \geq 1$ et $f : \hat{G}^{\times n} \to \mathbb{R}$ une n-cochaîne de groupe lisse en 1. Pour tous g_1, ..., g_{n+1} dans $\hat{\mathfrak{g}}$:

$$d_G f(e^{g_1},\cdots,ge^{g_{n+1}}) = f(1,\cdots,1) + \sum_{j=1}^{n+1} D^j d_G f((g_1\otimes\cdots\otimes g_{n+1})^{\otimes j}) + O(g_1,\cdots,g_{n+1})$$

où $O : \hat{\mathfrak{g}}^{\oplus n} \to \mathbb{R}$ et les applications j-linéaires $D^j d_G f$ vérifient les conditions 1. et 2. de la définition 3.2.24. Par définition de T'', la $n+1$-cochaîne de Lie $T''(d_G f)$ ne dépend que des valeurs de $D^{n+1}d_G f$ sur les $(n+1)$-tenseurs de la forme

$$(g_1,0,\cdots,0)\otimes(0,g_2,0,\cdots,0)\otimes\cdots\otimes(0,\cdots,0,g_{n+1}) \quad , \quad g_1,\cdots,g_{n+1} \in \hat{\mathfrak{g}}\,, \qquad (3.2.19)$$

c'est pourquoi il nous faut déterminer la partie $(n+1)$-linéaire de $d_G f$ qui est non nulle sur ce type de tenseurs. Écrivons d_G sous forme $d_G = \sum_{i=0}^{n+1}(-1)^i d_G^i$, avec

$$d_G^0 f(e^{g_1}, \cdots, e^{g_{n+1}}) := f(e^{g_2}, \cdots, e^{g_{n+1}}) \quad , \quad d_G^{n+1} f(e^{g_1}, \cdots, e^{g_{n+1}}) = f(e^{g_1}, \cdots, e^{g_n}) \quad ,$$

$$d_G^i f(e^{g_1}, \cdots, e^{g_{n+1}}) := f(e^{g_1}, \cdots, e^{g_i} e^{g_{i+1}}, \cdots, e^{g_{n+1}})$$

pour tout i dans $\{1, \cdots, n\}$. Fixons un i dans $\{1, \cdots n\}$ et j dans $\{1, \cdots, n+1\}$ et rappelons l'expression de $D^{n+1} d_G^i f$ obtenue dans la démonstration de la proposition 3.2.26 montre qu'elle correspond à la symétrisation de l'application $n+1$ linéaire :

$$\sum_{j \geq 1} \sum_{k_1 + \cdots + k_j = n+1} D^j f \circ (L_{k_1} \otimes \cdots \otimes L_{k_j})$$

où chaque $L_k : (\hat{\mathfrak{g}}^{\oplus n+1})^{\hat{\otimes} k} \to \hat{\mathfrak{g}}^{\oplus n+1}$ est une application k-multilinéaire vérifiant

$$L_k^j((g_1, \cdots, g_{n+1})^{\otimes k}) = \begin{cases} (g_1, \cdots, g_{i-1}, g_i + g_{i+1}, g_{i+2}, \cdots, g_{n+1}) & \text{si } k = 1, \\ (0, \cdots, 0, BCH_k(g_i, g_{i+1}), 0, \cdots, 0) & \text{si } k \geq 2. \end{cases}$$

Il est clair, pour tous $k_1 \geq 1$, ..., $k_j \geq 1$ entiers tels que $k_1 + \cdots + k_j = n+1$, que $L_{k_1} \otimes \cdots \otimes L_{k_j}$ s'annule sur le symétrisé du tenseur $(g_1, 0, \cdots, 0) \otimes (0, g_2, 0, \cdots, 0) \otimes \cdots \otimes (0, \cdots, 0, g_{n+1})$ dès lors que $k_p \geq 3$ pour un certain p dans $\{1, \cdots, j\}$. Par exemple le terme $[g_i, [g_i, g_{i+1}]]$ apparaissant dans $BCH_3(g_i, g_{i+1})$ donne lieu à une application trilinéaire

$$W : (g_{1,1}, \cdots, g_{n+1,1}) \otimes (g_{1,2}, \cdots, g_{n+1,2}) \otimes (g_{1,3}, \cdots, g_{n+1,3}) \mapsto (0, \cdots, 0, [g_{i,1}, [g_{i,2}, g_{i+1,3}]], 0, \cdots, 0).$$

et le fait que l'indice i apparaisse deux fois implique que

$$W((0, \cdots, 0, a, 0, \cdots, 0) \otimes (0, \cdots, 0, b, 0, \cdots, 0) \otimes (0, \cdots, 0, c, 0, \cdots, 0)) = 0$$

dès que les trois éléments a, b et c de $\hat{\mathfrak{g}}$ occupent des places différentes, ce qui montre que les termes $n+1$-linéaires contenant W ne contribuent pas à la valeur de $D^{n+1} d_G^i f$ sur les $n+1$ tenseurs de la forme (3.2.19).

De même, si $k_p = k_q = 2$ pour p et q distincts dans $\{1, \cdots, j\}$, $D^j f \circ L_{k_1} \otimes \cdots \otimes L_{k_j}$ n'annule dans le calcul de $T''(d_G f)$. Les seuls cas à prendre en compte sont donc ceux où tous les k_p, sauf au plus 1, sont égaux à 1. Notons $\Sigma_j(X)$ le symétrisé d'un j-tenseur X dans $(\hat{\mathfrak{g}}^{\oplus n+1})^{\hat{\otimes} j}$. La symétrie de $D^{n+1} f$ permet d'écrire :

$$\begin{aligned} &D^{(n+1)} d_G^i f((g_1, 0, \cdots, 0) \otimes (0, g_2, 0, \cdots, 0) \otimes \cdots \otimes (0, \cdots, 0, g_{n+1})) \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \sum_{\sigma \in \Sigma_{n+1}} D^{n+1} f((0, \cdots, 0, g_{\sigma(1)}, 0, \cdots, 0) \otimes \cdots \otimes (0, \cdots, 0, g_{\sigma(n+1)}, 0, \cdots, 0)) \\ &\quad + \sum_{p=1}^{n} D^n f \circ (L_1 \otimes \cdots \otimes L_1 \otimes L_2 \otimes L_1 \otimes \cdots \otimes L_1) \Sigma((g_1, 0, \cdots, 0) \otimes (0, g_2, 0, \cdots, 0) \otimes \cdots \otimes (0, \cdots, 0, g_{n+1})) \end{aligned}$$

où dans la permière somme , $g_{\sigma(p)}$ est à la p-ème position dans

$$(0, \cdots, 0, g_{\sigma(p)}, 0, \cdots, 0) \in \hat{\mathfrak{g}}^{\oplus n}$$

si $\sigma(p) \leq i$, et à la $p-1$-ième sinon. Par symétrie de $D^{n+1}f$, le premier terme de l'expression précédente est invariant lorsqu'on échange g_i et g_{i+1} ce qui montre qu'il est nul lorsqu'on l'antisymétrise et donc qu'il ne contribue pas à $T''(d_G^i f)$. Par symétrie de $D^{n+1}f$, et comme L_2 n'est non nul que sur $(0, \cdots, 0, g_i, 0, \cdots, 0) \otimes (0, \cdots, 0, g_{i+1}, 0, \cdots, 0)$, la seconde somme se simplifie de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
&\sum_{p=1}^{n} D^n f \circ (L_1 \otimes \cdots \otimes L_1 \otimes L_2 \otimes L_1 \otimes \cdots \otimes L_1) \Sigma((g_1, 0, \cdots, 0) \otimes (0, g_2, 0, \cdots, 0) \otimes \cdots \otimes (0, \cdots, 0, g_{n+1})) \\
&= \frac{1}{2(n+1)!} \sum_{p=1}^{n} \sum_{\substack{\sigma \in \Sigma_{n+1} \\ \sigma(p)=i, \sigma(p+1)=i+1}} D^n f((0, \cdots, 0, g_{\sigma(1)}, 0, \cdots, 0) \otimes \cdots \otimes (0, \cdots, 0, [g_i, g_{i+1}], 0, \cdots, 0) \otimes \cdots \\
&\quad \cdots \otimes (0, \cdots, 0, g_{\sigma(n+1)}, 0, \cdots, 0)) \\
&= \frac{1}{2(n+1)!} \sum_{\substack{\sigma \in \Sigma_{n+1} \\ \sigma^{-1}(i+1)=\sigma^{-1}(i)+1}} D^n f((g_1, 0, \cdots, 0) \otimes \cdots \otimes (0, \cdots, 0, [g_i, g_{i+1}], 0, \cdots, 0) \otimes \cdots \otimes (0, \cdots, 0, g_{n+1})) \\
&= \frac{1}{2(n+1)} D^n f((g_1, 0, \cdots, 0) \otimes \cdots \otimes (0, \cdots, 0, [g_i, g_{i+1}], 0, \cdots, 0) \otimes \cdots \otimes (0, \cdots, 0, g_{n+1}))
\end{aligned}$$

car il existe $n!$ permutations de $\{1, \cdots, n+1\}$ envoyant i et $i+1$ sur des entiers successifs. Ainsi, il ne reste plus qu'a antisymétriser le rôle des g_i pour obtenir $T''(d_G^i f)$:

$$\begin{aligned}
T''(d_G^i f)(g_1 \wedge \cdots \wedge g_{n+1}) &= (n+1)! \sum_{\sigma \in \Sigma_{n+1}} \mathrm{sgn}(\sigma) D^{n+1} d_G^i f((g_{\sigma(1)}, 0, \cdots, 0) \otimes \cdots \otimes (0, \cdots, 0, g_{\sigma(n+1)})) \\
&= n! \sum_{\sigma \in \Sigma_{n+1}} \frac{\mathrm{sgn}(\sigma)}{2} D^n f((g_{\sigma(1)}, 0, \cdots, 0) \otimes \cdots \otimes (0, \cdots, 0, [g_{\sigma(i)}, g_{\sigma(i+1)}], 0, \cdots, 0) \otimes \cdots \otimes (0, \cdots, 0, g_{\sigma(n+1)})) \\
&= n! \sum_{\substack{\sigma \in \Sigma_{n+1} \\ \sigma(i+1) > \sigma(i)}} \mathrm{sgn}(\sigma) D^n f((g_{\sigma(1)}, 0, \cdots, 0) \otimes \cdots \otimes (0, \cdots, 0, [g_{\sigma(i)}, g_{\sigma(i+1)}], 0, \cdots, 0) \otimes \cdots \otimes (0, \cdots, 0, g_{\sigma(n+1)}))
\end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que $T''(d_G^0 f) = T''(d_G^{n+1} f) = 0$, c'est pourquoi

$$\begin{aligned}
T''(d_G f)(g_1 \wedge \cdots \wedge g_{n+1}) = n! \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \sum_{\substack{\sigma \in \Sigma_{n+1} \\ \sigma(i+1) > \sigma(i)}} \mathrm{sgn}(\sigma) D^n f((g_{\sigma(1)}, 0, \cdots, 0) \otimes \cdots \otimes (0, \cdots, 0, [g_{\sigma(i)}, g_{\sigma(i+1)}], 0, \cdots, 0) \otimes \cdots \\
\cdots \otimes (0, \cdots, 0, g_{\sigma(n+1)})) \qquad (3.2.20)
\end{aligned}$$

D'autre part, les mêmes arguments combinatoires que ceux intervenant dans la démonstration de la proposition 1.2.8 permettent d'écrire

$$d_{CE}T''(f)(g_1\wedge\cdots\wedge g_{n+1})=\sum_{i<j}(-1)^{j+1}T''(f)(g_1\wedge\cdots\wedge[g_i,g_j]\wedge\cdots\wedge\hat{g}_j\wedge\cdots\wedge g_{n+1})$$

$$=n!\sum_{p=1}^{n}(-1)^p\sum_{\substack{\sigma\in\Sigma_{n+1}\\ \sigma(p+1)>\sigma(p)}}D^nf((g_{\sigma(1)},0,\cdots,0)\otimes\cdots\otimes(0,\cdots,0,[g_{\sigma(p)},g_{\sigma(p+1)}],0,\cdots,0)\otimes\cdots$$
$$\cdots\otimes(0,\cdots,0,g_{\sigma(n+1)})$$
$$=T''(d_Gf)(g_1\wedge\cdots\wedge g_{n+1})$$

ce qui prouve que T'' est un morphisme de complexes de cochaînes.

Montrons la relation $T\circ I_c=\mathrm{Id}_{C_c^*(\mathfrak{g};\mathbb{R})}$. Soient g_1, ..., g_n dans $\mathfrak{g}$ et ω une n-cochaîne d'algèbre de Lie continue. Alors, par (3.2.11), comme chaque e^{g_i} est de type groupe :

$$I_c(\omega)(e^{g_1},\cdots,e^{g_n})=\int_{[0,1]^n}dt_1\cdots dt_n\,\omega(B^1_{t_1,\cdots,t_n}(e^{g_1},\cdots,e^{g_n})\wedge\cdots\wedge B^n_{t_1,\cdots,t_n}(e^{g_1},\cdots,e^{g_n}))$$

En posant $b_{t_1,\cdots,t_n}(g_1,\cdots,g_n):=t_1BCH(g_1,t_2BCH(g_2,\cdots,t_{n-1}BCH(g_{n-1},t_ng_n)\cdots))$, où BCH est la série de Baker-Campbell-Hausdorff déja introduite précédemment, il vient

$$I_c(\omega)(e^{g_1},\cdots,e^{g_n})=\int_{[0,1]^n}dt_1\cdots dt_n\,\omega(\frac{\partial}{\partial t_1}b_{t_1,\cdots,t_n}(g_1,\cdots,g_n)\wedge\cdots\wedge\frac{\partial}{\partial t_n}b_{t_1,\cdots,t_n}(g_1,\cdots,g_n))$$

Pour obtenir la différentielle n-ième de $I_c(\omega)$ il suffit de ne prendre en compte que les termes faisant intervenir exactement n copies de chaque g_i. Ces derniers correspondent au développement des $\frac{\partial}{\partial t_j}b_{t_1,\cdots,t_n}$ que les termes de degré 1 en BCH_1 dans BCH. Or pour tout j dans $\{1,\cdots,n\}$:

$$\frac{\partial}{\partial t_j}t_1BCH_1(g_1,t_2BCH_1(g_2,\cdots,t_{n-1}BCH_1(g_{n-1},t_ng_n)\cdots))=\sum_{i=j}^{n}t_1t_2\cdots\hat{t_i}t_{i+1}\cdots t_n$$

donc, par antisymétrie de ω,

$$D^nI_c(\omega)((g_1\otimes\cdots\otimes g_n)^{\otimes n})$$
$$=\int_{[0,1]^n}dt_1\cdots dt_n\,\omega(g_1\wedge t_1g_1+t_1g_2\wedge t_1g_1+t_1t_2g_2+t_1t_2g_3\wedge\cdots\wedge t_1g_1+t_1t_2g_2+\cdots+t_1t_2\cdots t_{n-1}g_n)$$
$$=\int_{[0,1]^n}dt_1\cdots dt_n\,t_1^{n-1}t_2^{n-2}\cdots t_{n-1}\omega(g_1\wedge g_2\wedge g_3\wedge\cdots\wedge g_n)$$
$$=\frac{1}{n!}\omega(g_1\wedge\cdots\wedge g_n)$$

Ainsi

$$D^nI_c(\omega)((g_1,0,\cdots,0)\otimes(0,g_2,0,\cdots,0)\otimes\cdots\otimes(0,\cdots,0,g_n))=\frac{1}{(n!)^2}\omega(g_1\wedge\cdots\wedge g_n)$$

et par suite, en utilisant de nouveau que ω est antisymétrique :

$$T \circ I_c(\omega) = \omega$$

□

En résumé, nous avons établi l'existence de morphismes T et I_c faisant commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd}
C^*(\hat{G};\mathbb{R}) \arrow[dr, shift left, "T"] & \\
CH_c^*(\hat{U}\mathfrak{g};\mathbb{R}) \arrow[u, "Q"] \arrow[d, shift left, "P"] & C_c^*(\mathfrak{g};\mathbb{R}) \arrow[ul, shift left, "I_c"] \arrow[dl, shift left, "G^*"] \\
CH_c^*(U\mathfrak{g};\mathbb{R}) \arrow[u, shift left, "P^{-1}"] \arrow[ur, shift left, "F^*"] &
\end{tikzcd}$$

Le cas nilpotent

Comme en général $\hat{G}$ contient plus d'éléments que **l'ensemble** $G := \{e^g \ , \ g \in \mathfrak{g} \subset \hat{\mathfrak{g}}\}$, il semble peu probable que la paire

$$C_s^*(\hat{G};\mathbb{R}) \underset{I_c}{\overset{T}{\rightleftarrows}} C_c^*(\mathfrak{g};\mathbb{R})$$

soit une équivalence d'homotopie. Il n'y a d'ailleurs pas de raison pour qu'un tel G soit un groupe, même si celui ci est un bon candidat pour jouer le rôle du groupe "intégrant" $\mathfrak{g}$. Cependant, dans le cas où $\mathfrak{g}$ est nilpotente, nous disposons du résultat suivant, dû à P.F Pickel :

Proposition 3.2.29. *Si $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie nilpotente*[9]*, alors les morphismes*

$$P : CH^*(\hat{U}\mathfrak{g};\mathbb{R}) \to CH^*(U\mathfrak{g};\mathbb{R})$$

et

$$Q : CH^*(\hat{U}\mathfrak{g};\mathbb{R}) \to C^*(\hat{G};\mathbb{R})$$

sont des quasi-isomorphismes.

Démonstration. Ce résultat, établi dans [Pic78], est rappelé dans [Lod98]. □

Remarque 3.2.30. *Lorsque $\mathfrak{g}$ est nilpotente,*

1. *(a) $\hat{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g}$ et $\hat{G} = G = \{e^g \ , \ g \in \mathfrak{g}\}$ ([Qui69], appendice A.),*
   (b) Toutes les cochaînes de Chevalley-Eilenberg de $\mathfrak{g}$ sont continues.
2. *Dans [Tam03], D. Tamarkin utilise que si $H^*(\mathfrak{g};\mathbb{R})$ est de dimension finie en chaque degré, alors l'application de restriction $P : CH^*(\hat{U}\mathfrak{g};\mathbb{R}) \to CH^*(U\mathfrak{g};\mathbb{R})$ est nécessairement un quasi-isomorphisme.*

9. Rappelons que $\mathfrak{g}$ est nilpotnente si $D_k(\mathfrak{g}) = \{0\}$ pour un certain entier k.

Conclusion

L'interprétation géométrique de la résolution de Chevalley-Eilenberg développée au chapitre 2 a permis de répondre par l'affirmative à la question 0.0.1 lorsque $\mathfrak{g}$ est une algèbre de Lie sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, en exhibant un morphisme de résolutions $G_*^B : B_*(U\mathfrak{g}) \to CK_*(U\mathfrak{g})$, qui vérifie l'égalité définissante (3.2.12) ne faisant intervenir que le coproduit de $U\mathfrak{g}$ et les idempotents eulériens ([Lod98]). Ce sont d'ailleurs ces derniers qui permettent de transporter sur $U\mathfrak{g}$ la contraction canonique de l'algèbre symétrique $S\mathfrak{g}$, via l'isomorphisme de Poincaré-Birkhoff-Witt, afin obtenir une contraction h du complexe de Koszul de type "lemme de Poincaré", et d'appliquer la stratégie développée en 1.2.3. Le dernier chapitre nous montre alors comment le morphisme de complexes de cochaînes $G^* : C^*(\mathfrak{g}; M^{ad}) \to CH^*(U\mathfrak{g}; M)$ induit par G_*^B peut être interpreté comme un procédé *d'intégration formelle* de cocycles d'algèbre de Lie, ce qui conduit à intuiter la formule (3.2.12) par analogie avec l'application I_c d'intégration cubique détaillée au lemme 3.2.5.

Bien que le calcul général de G^* semble pour le moment hors de portée, car la combinatoire des idempotents eulériens est assez compliquée comme le montrent la formule (A.3.1) et les relations de récurrence sur la complexité des mots intervenant dans le calcul de pr donnée dans [Hel89], il semble raisonnable de pouvoir obtenir tout de même des informations sur le cocycle de Hochschild $G^n(\omega)$ associé à un cocycle d'algèbre de Lie $\omega : \Lambda^n\mathfrak{g} \to M^{ad}$, afin par exemple, d'obtenir de nouvelles algèbres associatives, réalisées comme extensions singulières d'une algèbre enveloppante.

D'autre part, l'application d'antisymérisation peut-être utilisé pour simplifier le calcul de l'homologie de Hochschild d'une algèbre enveloppante en utilisant le complexe de Chevalley-Eilenberg, qui est plus "petit" que le complexe de Hochschild usuel. Un exemple d'une telle utilisation se trouve dans la démonstration de la formalité de l'opérade des petits disques D_2 donnée par D. Tamarkin dans [Tam03], qui utilise un zig-zag d'équivalences faibles

$$D_2 \xrightarrow{\simeq} \cdot \xleftarrow{\simeq} H_*(D_2)$$

La connaissance d'un quasi-inverse de l'application d'antisymétrisation pourrait permettre d'inverser "explicitement" la flèche de droite, procurant un quasi-isomorphisme direct

$$D_2 \xrightarrow{\simeq} H_*(D_2)$$

Il faudrait pour ce faire, explorer la compatibilité de G_* avec les structures algébriques existant sur les complexes de Hochschild et de Chevalley-Eilenberg.

Enfin, une autre piste de recherche à suivre pourrait être celle d'une généralisation de l'isomorphisme d'antisymétrisation

$$H_*(F_*) : HH(\mathfrak{g}; M^{ad})$$

au cas des algèbres de Leibniz ([Lod08], [Jea], [Cov10]) ce qui nécessite la définition d'une bonne structure algébrique enveloppant celle des algèbres de Leibniz. La recherche d'une telle structure fait l'objet d'un travail commun avec S. Covez, que je remercie au passage pour son explication limpide de l'intégration des cocycles d'algèbres de Lie qui m'a permis de gagner un temps précieux dans la rédaction du troisième chapitre.

Annexe A

Algèbres de Hopf, algèbres libres et complétion

A.1 Algèbres de Hopf

$\mathbb{K}$ est un anneau commutatif.

Définition A.1.1. *Une algèbre de Hopf sur $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-module H muni d'un produit associatif $\mu : H \otimes H \to H$, d'un coproduit coassociatif $\Delta : H \to H \otimes H$, d'une augmentation (ou co-unité) $\epsilon : H \to \mathbb{K}$, d'une unité $\eta : \mathbb{K} \to H$ et d'une antipode $H \to H$ tels que*

- *Δ est un morphisme d'algèbre i.e*

$$\begin{tikzcd} H \otimes H \arrow[r, "\Delta\otimes\Delta"] \arrow[d, "\mu"'] & H^{\otimes 4} \arrow[r, "\tau_{2,3}"] & H^{\otimes 4} \arrow[d, "\mu\otimes\mu"] \\ H \arrow[rr, "\Delta"] & & H \otimes H \end{tikzcd}$$

  commute,
- *ϵ est un morphisme d'algèbre i.e*

$$\begin{tikzcd} H \otimes H \arrow[r, "\epsilon\otimes\epsilon"] \arrow[d, "\mu"'] & \mathbb{K} \otimes \mathbb{K} \cong \mathbb{K} \\ H \arrow[ur, "\epsilon"'] & \end{tikzcd}$$

  commute,
- *S est l'inverse de Id_H pour le produit de convolution i.e*

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "\Delta"] \arrow[d, "\Delta"'] \arrow[rrd, "\eta\epsilon"] & H \otimes H \arrow[r, "\mathrm{Id}\otimes S"] & H \otimes H \arrow[d, "\mu"] \\ H \otimes H \arrow[r, "S\otimes\mathrm{Id}"'] & H \otimes H \arrow[r, "\mu"] & H \end{tikzcd}$$

  commute.

Remarque A.1.2. *En notation de Sweedler, la commutation des trois diagrammes précédents est équivalente aux trois équations*

$$\sum_{(xy)}(xy)^{(1)} \otimes (xy)^{(2)} = \sum_{(x)}\sum_{(y)} x^{(1)}y^{(1)} \otimes x^{(2)}y^{(2)} ,$$

$$\epsilon(xy) = \epsilon(x)\epsilon(y),$$

et

$$\sum_{(x)} x^{(1)}S(x^{(2)}) = \sum_{(x)} S(x^{(1)})x^{(2)} = \eta\epsilon(x)$$

pour tous x et y dans H. La relation de co-unité s'écrit :

$$\sum_{x} x^{(1)}\epsilon(x^{(2)}) = \sum_{(x)} \epsilon(x^{(1)})x^{(2)} = x$$

Définition A.1.3. *Un élément h d'une algèbre de Hopf H qui vérifie*

$$\Delta(h) = h \otimes 1 + 1 \otimes H$$

est dit ***primitif****. Les éléments primitifs de H forment une sous algèbre de Lie de H notée* $\mathrm{Prim}\, H$.

Théorème A.1.4. [Milnor-Moore] *Soit H une algèbre de Hopf cocommutative connexe, alors le morphisme d'algèbres canonique*

$$U\mathrm{Prim}\, H \to H$$

est un isomorphisme.

Théorème A.1.5. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie. Alors*

$$\mathrm{Prim}\, U\mathfrak{g} = \mathfrak{g}$$

Théorème A.1.6. [Poincaré-Birkhoff-Witt] *Soit H une algèbre de Hopf cocomutative connexe. Alors l'application*

$$\begin{array}{rcl} S\mathrm{Prim}H \to H & & \\ h_1h_2\cdots h_n \in S^n\mathrm{Prim}H & \mapsto & \sum_{\sigma\in\Sigma_n} h_{\sigma(1)}h_{\sigma(2)}\cdots h_{\sigma(n)} \end{array}$$

est un isomorphisme de cogèbres.

A.2 Algèbres libres et complétion.

Soit V un $\mathbb{K}$-module.

Définition A.2.1. ***L'algèbre associative libre*** *engendrée par V est la $\mathbb{K}$-algèbre associative et unitaire $TV := \bigoplus_{n\geq 0} V^{\otimes n}$ munie du produit de concaténation. Elle est filtrée par les puissances de l'idéal d'augmentation $\bar{T}V := \bigoplus_{n\geq 1} V^{\otimes n}$.*

L'algèbre de Lie libre *engendrée par V, notée $Lie(V)$, est la sous algèbre de Lie de TV (qui est une algèbre de Lie pour le crochet donné par le commutateur du produit de TV) engendrée par les éléments de V.*

Définition A.2.2. *Si A est une algèbre augmentée filtrée ([Qui69], appendice B.) de filtration $\{F_nA\}_{n\geq 1}$, le completé de A est l'algèbre augmentée complète $\hat{A}$ définie par*

$$\hat{A} := \lim_{\substack{\leftarrow \\ n}} A/_{F_nA}$$

Remarque A.2.3. *Pour toute algèbre augmentée A,*

$$\hat{\hat{A}} = \hat{A}$$

Proposition A.2.4. *Si V est un $\mathbb{K}$-module,*

$$T\hat{V} = \prod_{n\geq} V^{\otimes n}$$

est filtrée par les puissances du completé de l'idéal d'augmentation $\widehat{\bar{T}B}$. De même, $Lie(V)$ est filtrée par ces mêmes puissances intersectées avec elle même.

Définition A.2.5. *Le produit tensoriel de deux $\mathbb{K}$-algèbres augmentées A et B de filtrations respectives $\{F_nA\}$ et $\{F_nB\}$ est filtré par la filtration $\{F_nA\otimes B\}$ définie par*

$$F_nA\otimes B = \underset{p+q=n}{+} F_pA\otimes F_qB$$

pour tout $n\geq 1$. Le ***produit tensoriel completé*** *de A et B est le completé de $A\otimes B$ pour cette filtration :*

$$A\hat{\otimes}B := \widehat{A\otimes B}$$

Proposition A.2.6. *Sous les hypothèses précédentes,*

$$\hat{A}\hat{\otimes}\hat{B} = \widehat{A\otimes B}$$

A.3 Rappels sur l'idempotent eulérien, formule de Baker-Campbell-Hausdorff

Les références sont [Reu93], [Lod98], [Ser06].

$\mathbb{K}$ est un anneau contenant $\mathbb{Q}$. $T(x,y)$ est l'algèbre tensorielle engendrée par deux éléments x et y.

Définition A.3.1. *Soit V un $\mathbb{K}$-module. L'idempotent de Dynkin est l'application $\Theta : TV \to Lie(V)$ définie par*

$$\Theta(g_1 g_2 \cdots g_n) := \frac{1}{n}[g_1, [g_2, [\cdots [g_{n-1}, g_n] \cdots]]]$$

pour tout entier n et tous g_1, ..., g_n dans V.

Proposition A.3.2 (BCH, forme de Dynkin). *Soit $\widehat{Lie}(x,y)$ la $\mathbb{K}$-algèbre de Lie libre engendrée par deux symboles x et y completée. Alors, il existe un[1] élément $BCH(x,y)$ de $\widehat{Lie}(x,y)$ tel que*

$$e^x e^y = e^{BCH(x,y)}$$

dans le groupe de Malcev[2] $\hat{G}$ associé à $Lie(x,y)$. De plus, $BCH(x,y)$ est donnée par une série

$$BCH(x,y) = x + y + \frac{1}{2}[x,y] + \sum_{k \geq 2} BCH_k(x,y)$$

où, pour pour tout entier $k \geq 2$, $BCH_k(x,y)$ est une combinaison linéaire de crochets itérés de longueur k en x et y de la forme

$$BCH_k(x,y) = \sum_{|\alpha|+|\beta|=k} \lambda_{\alpha,\beta}\, \Theta(x^{\alpha_1} y^{\beta_1} x^{\alpha_2} y^{\beta_2} \cdots x^{\alpha_N} y^{\beta_N})$$

Ici, l'entier N est la partie entière de $\frac{k}{2}$, les $\lambda_{\alpha,\beta}$ sont des éléments de $\mathbb{Q} \subset \mathbb{K}$, et (α, β) parcourt un ensemble fini de paires de multi-indices dans $\mathbb{N}^N \times \mathbb{N}^N$.

Démonstration. [Ser06] □

Remarque A.3.3. *La formule de Baker-Campbell-Hausdorff est encore valable dans l'algèbre de Lie complétée $\hat{\mathfrak{g}}$ associée à une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$.*

Proposition A.3.4. [Solomon] *L'idempotent eulérien* $\mathrm{pr} : U\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ *est donné sur les monômes de longueur n par la formule*

$$\mathrm{pr}(g_1 g_2 \cdots g_n) = \sum_{\sigma \in \Sigma_n} (-1)^{d\sigma} \binom{n-1}{d\sigma} g_{\sigma(1)} g_{\sigma(2)} \cdots g_{\sigma(n)} \tag{A.3.1}$$

pour tous g_1, g_2, ..., g_n dans $\mathfrak{g}$.

Démonstration. Voir [Lod94], [Reu93], [Hel89]. □

Proposition A.3.5. [Sprecht-Wever] *Soit $s \in U\mathfrak{g}$ une somme de monômes de longeur n i.e*

$$s = \sum_j g_1^j g_2^j \cdots g_n^j$$

où chaque g_i^j est dans $\mathfrak{g}$. Si s est dans $\mathfrak{g}$ alors l'idempotent de Dynkin $\Theta : T\mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ est bien défini sur s et vérifie

$$\Theta(s) := \frac{1}{n} \sum_j [g_1^j, [g_2^j, [\cdots [g_{n-1}^j, g_n^j] \cdots]]] = s$$

1. unique
2. Voir définition 3.2.13.

Démonstration. [Wig89] montre le cas de l'algèbre de Lie libre qui implique le cas général. Voir aussi [Hel89]. □

Annexe B

Complexes de cohomologie

B.1 Conventions et notations ([Lan75], [Lod08],[CE56])

Dans tout ce document, le terme **complexe de chaînes** (resp. **de cochaînes**) sur $\mathbb{K}$ désigne une famille $C_* := (C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (resp. $C^* := (C^*)_{n\in\mathbb{N}}$) de $\mathbb{K}$-modules munie d'une famille d'applications $d_* := (d^n : C^n \to C^{n+1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ (resp. $d^* := (d^n : C^n \to C^{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$) vérifiant la condition

$$d_n \circ d_{n+1} = 0 \quad \text{(resp. } d_{n+1} \circ d_n = 0) \qquad , \quad \forall n \geq 1 \tag{B.1.1}$$

Le degré n en indice de d_n est souvent omis, quand cela ne prête pas à confusion, et la condition (B.1.1) s'écrit alors

$$d^2 := d \circ d = 0.$$

Il arrive également que l'on fasse référence au complexe (C_*, d_*) en ne mentionnant que le module gradué sous-jacent lorsque la différentielle est évidente.

L'homologie d'un complexe de chaînes $C := (C_*, d_*)$ est la famille de $\mathbb{K}$-modules $(H_n(C_*, d_*))_{n\in\mathbb{N}}$, notée $H_*(C_*, d_*)$ ou plus simplement $H_*(C)$, définie par

$$H_n(C_*, d_*) := \operatorname{Ker} d_n / \operatorname{Im} d_{n+1} \quad , \quad \forall n \in \mathbb{N}\,,$$

avec la convention $d_0 = 0 : C_0 \to 0$.

Définition B.1.1. *Soient $C := (C_*, d^C)$ et $D := (D_*, d^D)$ deux complexes de chaînes sur $\mathbb{K}$. Un* ***morphisme de complexes de chaînes*** *$f : C \to D$ est une famille d'applications linéaires $f_* := (f_n : C_n \to D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la condition*

$$d_n^D \circ f_n = f_{n-1} \circ d_n^C, \tag{B.1.2}$$

abréviée en $d^D f = f d^C$, qui assure qu'un morphisme de complexes $f : C \to D$ induit une application linéaire $H_*(f) : H_*(C_*, d_*^C) \to H_*(D_*, d_*^D)$ entre les $\mathbb{K}$-modules d'homologie. La définition d'un ***morphisme de complexes de cochaînes*** *se devine facilement.*

Deux morphismes de complexes $f : C \to D$ et $g : C \to D$ sont dits ***homotopes*** *s'il existe une application linéaire graduée de degré $+1$ $H := (H_n : C_n \to D_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$, appelée* ***homotopie****, telle que*

$$f - g = Hd + dH$$

*Un **quasi-isomorphisme** est un morphisme de complexes $f : C \to D$ telle que l'application $H_*(f) : H_*(C) \to H_*(D)$ soit un isomorphisme. Une un morphisme de complexes de chaînes $f : C \to D$ est appelé **équivalence d'homotopie** lorsqu'il existe un morphisme de complexes $g : D \to C$ tels que les endomorphismes de complexes de chaînes $g \circ f : C \to C$ et $f \circ g : D \to D$ soient homotopes à l'application identité respectivement sur C et D.*

Définition B.1.2. *Un **complexe de chaînes au dessus d'un** $\mathbb{K}$**-module** Q donné, est un complexe de chaînes $C := (C_*, d_*)$ muni d'un morphisme de complexes de chaînes $\epsilon : (C_*, d_*) \to (Q_*, 0)$, où $Q_* := (Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est le complexe de chaînes concentré en degré 0 défini par*

$$Q_n := \begin{cases} Q & si\ n = 0, \\ 0 & sinon. \end{cases}$$

*Il sera dit **acyclique** si l'application ϵ est un quasi-isomorphisme, c'est-à-dire si $H_0(\epsilon) : H_0(C_*, d_*) \to Q$ est un isomorphisme et si $H_n(C_*, d_*) = 0$ pour tout $n > 0$, et **contractile** lorsqu' ϵ est une équivalence d'homotopie, i.e lorsqu'il existe une application linéaire graduée de degré $+1$ $s : (s_n : C_n \to C_{n+1})_{n\in\mathbb{N}})$, appelée **contraction**, et une application $\mathbb{K}$-linéaire $\eta : Q \to C_0$ telles que*

$$\mathrm{Id}_{C_0} - \eta\epsilon = 0\ ,$$

$$rm\ Id_{C_n} = s_{n-1}d_n + d_{n+1}s_n \quad , \quad \forall n \geq 1\ ,$$

et

$$\epsilon\eta = \mathrm{Id}_Q$$

B.2 Complexes de cohomologie de Hochschild et de Chevalley-Eilenberg

Définition B.2.1. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$ et N un $\mathfrak{g}$-module à gauche. Le **complexe de cohomologie de Chevalley-Eilenberg** de $\mathfrak{g}$ à valeurs dans N est le complexe de cochaînes $(C^*(\mathfrak{g}; N), d_{CE})$ défini en degré n par*

$$C^n(\mathfrak{g}; N) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(\Lambda^n\mathfrak{g}, N)$$

et

$$\begin{aligned} d_{CE}(f)(g_1 \wedge \cdots \wedge g_{n+1}) :=& \sum_{i=1}^{n+1}(-1)^{i+1}g_i \cdot f(g_1 \wedge \cdots \wedge g_{i-1} \wedge \hat{g}_i \wedge g_{i+1} \wedge \cdots \wedge g_{n+1}) \\ &+ \sum_{i<j}(-1)^{j+1}f(g_1 \wedge \cdots \wedge g_{i-1} \wedge [g_i, g_j] \wedge \cdots \wedge \hat{g}_j \wedge \cdots \wedge g_{n+1}) \end{aligned}$$

pour tous g_1, ..., g_{n+1} dans $\mathfrak{g}$ et pour tout f dans $C^n(\mathfrak{g}; N)$

Définition B.2.2. *Soit A une algèbre associative et M un A-bimodule. Le* ***complexe de cohomologie de Hochschild de*** *A* ***à valeurs dans*** *M est le complexes de cochaînes $(CH^*(A;M), d^H)$ défini en degré n par*

$$CH^n(A;M) := \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(A^{\otimes n}; M)$$

et

$$\begin{aligned} d_H f(x_1 \otimes \cdots \otimes x_{n+1}) :=& x_1 f(x_2 \otimes \cdots \otimes x_{n+1}) + (-1)^{n+1} f(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n) x_{n+1} \\ &+ \sum_{i=1}^{n} (-1)^i f(x_1 \otimes \cdots \otimes x_{i-1} \otimes x_i x_{i+1} \otimes x_{i+2} \otimes \cdots \otimes x_{n+1}) \end{aligned}$$

pour tous x_1, ..., x_{n+1} dans A et pour tout n-cochaîne f dans $CH^*(A;M)$.

B.3 Cochaînes de groupe

Soit G un groupe et M un G-module ([Wei95]). Notons $x \cdot m \in M$ le produit de l'action d'un élément x de G sur un élément m de M.

Définition B.3.1. *Le* ***complexe de cohomologie de groupe*** *de G à valeurs dans M est le complexe de cochaînes $(C^*(G;M), d_G)$ défini en degré n par*

$$C^n(G;M) := \{f : G^{\times n} \to M\}$$

et

$$\begin{aligned} d_G f(x_1, \cdots, x_{n+1}) =& x_1 \cdot f(x_2, \cdots, x_{n+1}) + \sum_{i=1}^{n} f(x_1, \cdots, x_{i-1}, x_i x_{i+1}, x_{i+2}, \cdots, x_{n+1}) \\ &+ (-1)^{n+1} f(x_1, \cdots, x_n) \end{aligned}$$

pour tous x_1, ..., x_{n+1} dans G et f dans $C^n(G;M)$.

Le lien entre les (co)homologies de groupe et et de Hochschild se fait par le truchement de l'algèbre de groupe :

Définition B.3.2. ***L'algèbre de groupe*** *d'un groupe G dont la multiplication est notée $\mu_G : G \times G \to G$, est l'algèbre associative unitaire $\mathbb{K}G$ dont le $\mathbb{K}$-module sous-jacent est le $\mathbb{K}$-module libre engendré par l'ensemble G, et dont le produit est l'unique application (bi)linéaire $\mu_{\mathbb{K}G} \mathbb{K}G \otimes \mathbb{K}G \to \mathbb{K}G$ qui coïncide avec le produit du groupe sur les éléments de la forme $g \otimes h$, lorsque g et h parcourent G. En d'autre termes :*

$$\mu_{\mathbb{K}G}(g \otimes h) = \mu_G(g,h)$$

pour tous g et h dans G.

Proposition B.3.3. *Soit G un groupe et M un G-module. Par proprieté universelle de l'algèbre de groupe $\mathbb{K}G$, la structure de G-module sur M induit une structure de $\mathbb{K}G$-module à gauche sur M, qui se complète en une structure de bimodule grâce à l'action triviale (donnée par l'augmentation de $\mathbb{K}G$) à droite de $\mathbb{K}G$. Alors, il existe un isomorphisme naturel*

$$C^*(G;M) \cong CH^*(\mathbb{K}G;M)$$

Lorsque G est un groupe de Lie d'élément neutre e, il existe un sous-complexe de $C^*(G;\mathbb{R})$ qui joue un rôle central dans la section 3.2 :

Définition-Proposition B.3.4. *Une n-cochaîne de groupe $f : G^{\times n} \to \mathbb{R}$ est dite **lisse au voisinage l'élément neutre** lorsqu'il existe un ouvert U contenant e tel que la restriction de f à l'ouvert $U^{\times n}$ de $G^{\times n}$ soit lisse. L'image par la différentielle de groupe d_G d'une cochaîne de groupe lisse au voisinage de e est également lisse, ce qui implique que d_G se restreint au sous-espace des cochaînes lisses au voisinage de e, noté $C^*_{loc.\,s}(G;\mathbb{R})$, faisant de ce dernier un sous-complexe de $(C^*(G;\mathbb{R});d_G)$.*

Remarque B.3.5. *Dans le chapitre* 3 *nous avons utilisé sans distinction les termes **cochaîne locale lisse** et **cochaîne localement lisse**, bien que ces deux notions soient différentes. En outre, le morphisme I_c introduit au lemme 3.2.5 ne permet d'intégrer que localement une cochaîne d'algèbre de Lie donnée. Mais il est alors possible de la prolonger par l'application nulle en dehors de l'ouvert sur lequel elle-est définie, pour obtenir une cochaîne globalement définie, et lisse au voisinage de l'élément neutre. Comme les morphismes de dérivation des cochaînes de groupes T et T' de la section 3.2.1 ne dépendent que du comportement infinitésimal des cochaînes de groupe auxquelles ils s'appliquent, il est clair que le diagramme (3.2.13) continue de faire sens lorsque l'on considère des cochaînes de groupe localement lisses.*

Bibliographie

[CE56] Henri Cartan and Samuel Eilenberg. *Homological Algebra*. Princeton University Press, 1956.

[Con85] A. Connes. Non-commutative differential geometry. *Publications Mathematiques de l'IHES*, 62(1) :41–144, 1985.

[Cov10] S. Covez. The local integration of Leibniz algebras. *ArXiv e-prints*, November 2010.

[Dix74] Jacques Dixmier. *Algèbres enveloppantes*. Bordas, 1974.

[FOT08] Yves Félix, John Oprea, and Daniel Tanré. *Algebraic models in geometry*, volume 17 of *Oxford Graduate Texts in Mathematics*. Oxford University Press, Oxford, 2008.

[God04] Roger Godement. *Introduction à la théorie des groupes de Lie*. Springer-Verlag, Berlin, 2004. Reprint of the 1982 original.

[Hel89] Jacques Helmstetter. Série de Hausdorff d'une algèbre de Lie et projections canoniques dans l'algèbre enveloppante. *J. Algebra*, 120(1) :170–199, 1989.

[Jac62] Nathan Jacobson. *Lie algebras*. Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, No. 10. Interscience Publishers (a division of John Wiley & Sons), New York-London, 1962.

[Jea] Jean-Louis Loday. Dialgebras. Preprint, February 23, 1999, K-theory Preprint Archives, http ://www.math.uiuc.edu/K-theory/0333/.

[Kas95] C. Kassel. *Quantum groups*, volume 155. Springer, 1995.

[Lan75] S. Mac Lane. *Homology*. Springer-Verlag, 1975.

[Lod94] Jean-Louis Loday. Série de Hausdorff, idempotents eulériens et algèbres de Hopf. *Exposition. Math.*, 12(2) :165–178, 1994.

[Lod98] J-L Loday. *Cyclic homology*. Springer-Verlag, 1998.

[Lod08] Jean-Louis Loday. Generalized bialgebras and triples of operads. *Astérisque*, (320) :x+116, 2008.

[Mar05] Martin Bordemann, Gregory Ginot, Gilles Halbout, Hans-Christian Herbig, Stephan Waldmann. Formalité G_∞ adaptée et star-représentations sur les sous-varietés coïsotropes, 2005. `http://arXiv:math/0504276v1`.

[Nee04] K.-H. Neeb. Abelian extensions of infinite-dimensional Lie groups. *ArXiv Mathematics e-prints*, February 2004.

[Pic78] P. F. Pickel. Rational cohomology of nilpotent groups and Lie algebras. *Comm. Algebra*, 6(4) :409–419, 1978.

[Qui69] Daniel Quillen. Rational homotopy theory. *The Annals of Mathematics*, 90(2) :pp. 205–295, 1969.

[Reu93] Christophe Reutenauer. *Free Lie algebras*, volume 7 of *London Mathematical Society Monographs. New Series*. The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 1993. Oxford Science Publications.

[Ser06] Jean-Pierre Serre. *Lie algebras and Lie groups*, volume 1500 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2006. 1964 lectures given at Harvard University, Corrected fifth printing of the second (1992) edition.

[Smi51] P. A. Smith. The complex of a group relative to a set of generators. I. *Ann. of Math. (2)*, 54 :371–402, 1951.

[Smi52] P. A. Smith. Some topological notions connected with a set of generators. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Cambridge, Mass., 1950, vol. 2*, pages 436–441, Providence, R. I., 1952. Amer. Math. Soc.

[Tam03] Dmitry E. Tamarkin. Formality of chain operad of little discs. *Lett. Math. Phys.*, 66(1-2) :65–72, 2003.

[Trè67] François Trèves. *Topological vector spaces, distributions and kernels*. Academic Press, New York, 1967.

[vEa] W. T. van Est. Local and global groups. i. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 65 = Indag. Math.*, 24 :391–408.

[vEb] W. T. van Est. Une démonstration de é. cartan du troisième théorème de lie. pages 83–96.

[vE62] W. T. van Est. Local and global groups. II. *Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A 65 = Indag. Math.*, 24 :409–425, 1962.

[Wei95] C.A. Weibel. *An introduction to homological algebra*. Cambridge Univ Pr, 1995.

[Wig89] David Wigner. An identity in the free Lie algebra. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 106(3) :639–640, 1989.

Index

Résumé : Le but de ce travail est d'expliquer en quoi l'application de d'antisymétrisation de Cartan-Eilenberg F^*, qui permet d'identifier la cohomologie de Chevalley-Eilenberg d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ à la cohomologie de Hochschild de son algèbre enveloppante $U\mathfrak{g}$, est l'analogue algébrique de l'application usuelle de dérivation de cochaînes de groupe lisses au voisinage de l'élément neutre d'un groupe de Lie, et comment un de ses quasi-inverses peut être construit et compris comme une application d'intégration de cocycles de Lie. De plus, nous montrons qu'un tel quasi-inverse, bien que provenant d'une contraction d'origine géométrique, peut s'écrire de manière totalement intinsèque, en n'utilisant que la structure d'algèbre de Hopf cocommutative connexe sur $U\mathfrak{g}$.

Mots clés : Algèbre de Hopf - (co)homologie de Hochschild - algèbre de Lie - (co)homologie de Chevalley-Eilenberg - (co)homologie de groupe - homotopie - completion I-adique - exponentielle

Summary : This thesis aims at explaining why Cartan and Eilenberg's antisymmetrisation map F^*, which provides an explicit identification between the Chevalley-Eilenberg cohomology of a free lie algebra $\mathfrak{g}$ and the Hochschild cohomology of its universal enveloping algebra $U\mathfrak{g}$, can be seen as an algebraic analogue of the well-known derivation map from the complex of locally smooth group cochains to the one of Lie algebra cochains, and how one of its quasi-inverses can be built and thought of as an integration of Lie algebra cochains in Lie group cochains process. Moreover, we show that such a quasi-inverse, even if it is defined thanks to a Poincaré contraction coming from geometry, can be written using a totally intrinsic formula that involves only the connex cocommutative Hopf algebra structure on $U\mathfrak{g}$.

Key words : Hopf algebra - Hochschild (co)homology - Lie algebra - Chevalley-Eilenberg (co)homology - group (co)homology - homotopie - I-adic completion - exponential map