# Mathématiques et Physique. Le langage de la Nature est-il mathématique?

Didier Robert, Laboratoire de Mathématiques Jean Leray,
Université de Nantes

Depuis l'antiquité la formulation des lois de la nature a nécessité des modèles mathématique de plus en plus complexes.
Commençons par un problème de mesure de longueur : quelle est la longueur D de la diagonale d'un carré de côté 1? La réponse est donnée par le théorème de Pythagorre : $D = \sqrt{2}$. Oui mais Pythagorre (580-490 av J.-C) ne connaissait pas $\sqrt{2}$. Les seuls nombres connus alors étaient les nombres fractionnaires, quotient de 2 entiers $\frac{m}{n}$.

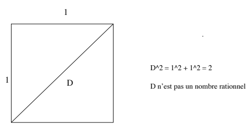


Figure: Le théorème de Pythagorre

Parce que ce nombre ne peut pas se représenter comme le quotient de 2 entiers (on dit qu'il n'est pas rationnel) il a bien fallu inventer d'autres nombres. ($\sqrt{2} \approx 1,414\cdots$).

Plus tard, Archimède (287-212 av. J.-C) a inventé une méthode pour calculer la longueur d'une circonférence, le volume d'une sphère, d'un cylindre, ou encore de l'intersection de deux cylindres. La méthode trouvée par Archimède sera développée beaucoup plus tard (17ème siècle par Leibniz et Newton, inventeur du calcul différentiel et intégral).
Pour ses calculs Archimède avait besoin d'un autre nombre, encore plus mystérieux que $\sqrt{2}$, le fameux nombre pi, noté $\pi$, $\pi \approx 3,14159\cdots$, que les Babyloniens avaient déjà rencontré vers 2000 av. J.-C. Ce nombre $\pi$, défini comme le rapport de la circonférence sur le diamètre du cercle, est partout présent en mathématiques et en physique. Le livre de J.P. Delahaye contient une mine d'informations sur $\pi$.

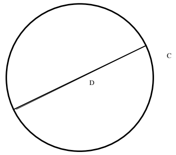


Figure: Le nombre $\pi = C/D$

Plus tard, il faudra même inventer des nombres imaginaires (complexes) pour donner un sens à $i = \sqrt{-1}$. Au XVI ième siécle Bombelli, Cardan, Tartaglia introduisirent ces nombres pour résoudre des équations du 3 ième degré. Ils joueront un rôle important en mécanique quantique!

Sur ces premiers exemples, on perçoit déjà que les mathématiques interviennent non seulement pour fournir des techniques de calculs mais aussi pour définir de nouveaux concepts (par exemples des nombres) pour pouvoir réaliser ces calculs. Rappelons ce que disait le mathématicien allemand L. Kronecker (1823-1891) : "Dieu créa les entiers , tout le reste est l'oeuvre de l'homme".
cette affirmation peut-être discutée. Les concepts mathématiques sont-ils le pur produit du cerveau humain ou préexistent-ils dans la nature? Cela a fait l'objet d'un livre par J.P. Changeux et A. Connes.

Plus près de nous l'étude du mouvement des planètes conduit à des équations (conséquence des lois de Kepler et de Newton) qui ont permis à Leverrier de prévoir l'existence de la planète Neptune en 1846 et qui fut observée peu de temps après par l'astronome allemand Johann Galle.

Figure: Kepler (1571-1630), Newton (1643-1727), Leibniz (1646-1716), Le Verrier (1811-1877)

L'étude de la structure de la matière à l'échelle de l'infiniment petit i.e à des distances de l'ordre de $10^{-18}m$ ( soit un millioniéme de millioniéme de millioniéme de métre ) à fait un progrès important lorsque J.J. Thomson (1856-1940) a découvert l'électron en 1897. Paul Dirac (1902-1984), physicien britanique, a prédit en 1928 l'existence d'une nouvelle particule: le positron (ou antiélectron) en étudiant les solutions d'une équation (appelée depuis l'équation de Dirac). L'argument de Dirac reposait sur des propriétés de symétrie de son équation. Le positron a été détecté expérimentalement par Anderson (1905-1991) en 1932. (noter l'âge de ces chercheurs au moment de leurs grandes découvertes!).

Nous verrons que le monde atomique est un monde bien étrange , régi par des lois très différentes de celles du monde dans lequel nous évoluons quotidiennement. C'est la raison pour laquelle l'abstraction mathématique y joue un rôle aussi fondamental, jusqu'à maintenant irremplaçable. Une partie des recherches théoriques actuelles pourraient déboucher sur la réalisation d'ordinateurs quantiques, qui pourraient être beaucoup plus puissants que les ordinateurs actuels si on parvient un jour à en construire.
L'informatique contemporaine ne serait sans doute pas ce qu'elle est sans les travaux mathématiques fondateurs de la période 1940-1950 dûs à J. von Neumann (1903-1957) et A. Turing (1912-1954).

J. von Neumann a également apporté des contributions décisives à la théorie quantique, en particulier concernant l'interprétation de la mesure dans les processus expérimentaux.

Figure: J. von Neumann 1940, P.A. Dirac 1925

A travers l'exemple emblématique de la mécanique quantique je voudrais ici tenter d'analyser et commenter les relations très étroites qu'ont toujours entretenues ces deux domaines de la connaissance scientifique que sont mathématiques et physique.

Commençons par une discussion plus générale sur la place des mathématiques dans les sciences. Avant tout, il est bon de rappeler que l'origine éthymologique du mot mathématique provient du grecque"mathema" signifiant "apprendre pour connaitre". Les philosophes grecs Platon (-427, -347) et Aristote (-384, -322) en ont précisé les contours, proche de la signification actuelle. Pour les grecs l'objet principal était l'étude de la géométrie (mesure de la terre).

Voici le point de vue de Galilée (1564-1642) : "La philosophie est écrite dans ce grand livre qui se tient constamment ouvert devant nos yeux, je veux dire l'univers. Mais elle ne peut se saisir si tout d'abord on ne se saisit point de la langue et si on ignore les caractères dans lesquels elle est écrite. Cette philosophie, elle est écrite en langue mathématique. Ses caractères sont des triangles, des cercles et autres figures géomériques, sans le moyen desquelles il est impossible de saisir humainement quelque parole, et sans lesquelles on ne fait qu'errer vainement dans un labyrinthe obscur."
Depuis Galilée d'autres figures, d'autres espaces géométriques ont été inventés et ont trouvé leurs places dans diverses théories concernant l'univers.

Figure: portrait de Galilée

Henri Poincaré (1854-1912) a produit une oeuvre mathématique immense, souvent à la frontière des mathématiques et de la physique. On dit parfois qu'il est passé très prés de la découverte de la théorie de la relativité restreinte, avant Einstein. Sans doute a-t-il manqué d'audace pour remettre en cause l'édifice construit par Newton, ce que Einstein a eu l'intuition géniale de faire.

Figure: Henri Poincaré

Voici une réflexion de Poincaré :
"Toutes les lois (de la nature) sont donc tirées de l'expérience; mais pour les énoncer il faut une langue spéciale; le langage ordinaire est trop pauvre, il est d'ailleurs trop vague pour exprimer des rapports si délicats, si riches, si précis.. . . .
Mais ce n'est pas tout, la loi sort de l'expérience mais elle n'en sort pas immédiatement. L'expérience est individuelle, la loi qu'on en tire est générale.. . . . En un mot pour tirer la loi de l'expérience il faut généraliser.. . . .
Entre les mille chemins qui s'ouvrent à nous il faut faire un choix, dans ce choix qui nous guidera? Ce ne pourra être que l'analogie.. . . . Qui nous a appris à connaître les analogies véritables, profondes, celles que les yeux ne voient pas et que la raison devine? C'est l'esprit mathématique, qui dédaigne la matière pour ne s'attacher qu'à la forme pure."

Ce commentaire de Poincaré s'applique magnifiquement à la mécanique quantique (et aussi à théorie de la relativité) qu'il a peu connue puisqu'il est décédé en 1912 et que les grandes avancées théoriques de la mécanique quantique ont démarré après 1920. Bernard d'Espagnat dans son livre "A la recherche du réel, le regard d'un physicien" écrit en 1979 : "Le fait que les méthodes mathématiques permettent mieux que toutes autres la synthèse des divers aspects du réel a des conséquences quant aux manières de s'imaginer ce réel. Car le rôle des mathématiques en physique ne se limite pas à celui d'une simple sténographie, autrement dit à un rôle d'écriture de relations que, si l'on disposait de plus de place et d'avantage de temps, on pourrait aussi bien faire dans le langage de tous les jours. Ce rôle là, bien entendu, existe. Mais il est mineur.

Bien plus fondamental est celui joué par le processus de définition d'entités nouvelles. Que l'on pense seulement à l'apparition du concept d'énergie. . . . . La découverte expérimentale des antiprotons, et donc l'assurance de la généralité des processus d'annihilation et de création, remontent toutes deux aux années 1950. Mais ces faits avaient pu être prédits bien avant par des théoriciens dont chacun sait qu'ils trouvèrent dans l'élégance mathématiques du formalisme le plus sûr guide de leurs succès. "

Le physicien Eugen Wigner (1902-1995) parlait de la "déraisonnable efficacité des mathématiques dans les sciences de la nature" en pensant sans doute en particulier à la mécanique quantique. Il est temps maintenant de se poser la question : qu'est-ce que la mécanique quantique?

Dans sa définition classique, la mécanique regroupe le domaine des sciences et des techniques qui concernent des corps en mouvement : une automobile, une bicyclette, le système solaire, l'atmosphère terreste. Ces corps en mouvement sont soumis à des forces qui provoquent des accélérations et qui les contraignent à suivre des trajectoires bien déterminées. Ceci a été expliqué magistralement par la théorie de Newton et sa fameuse équation fondamentale

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{\gamma}}$$

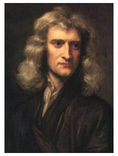

Figure: portrait de Newton

Le monde physique qui nous entoure ne peut pas être décrit uniquement par les mouvements des corps au sens précédent. Il est apparu assez tôt que nous étions entourés d'ondes: les sons, les ondulations à la surface d'un plan d'eau, la lumière, la chaleur, les ondes électro-magnétiques.
Une onde est plus difficile à caractériser qu'un corps en mouvement puisqu'il s'agit d'un phénomène qui n'est pas bien localisé dans l'espace. Une onde se caractérise par sa période (ou sa longueur), son amplitude et peuvent produire des interférences (deux ondes qui se rencontrent peuvent s'amplifier ou au contraire se détruire).

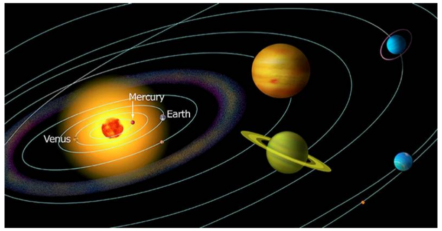


Figure: mouvement de planètes dans le sytème solaire

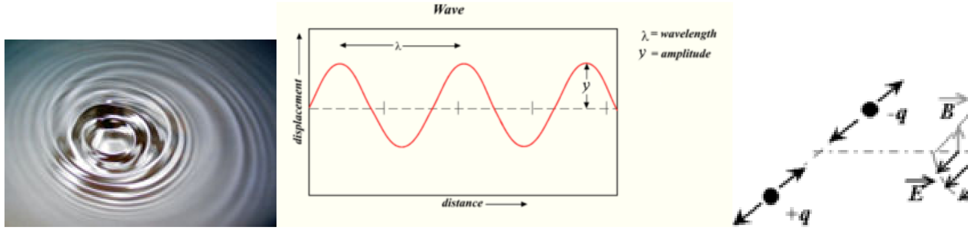


Figure: Ondes

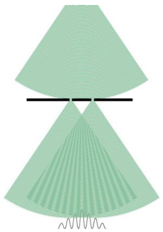

Figure: expérience d'interférence de Young

L'étude de la propagation de la lumière (rayon lumineux) posa une redoutable enigme aux physiciens à la fin du XIX ème siécle. A cette période il semblait acquis que la lumière était la manifestation d'un phénomène purement ondulatoire considéré comme un cas particulier d'onde électromagnétique décrite par les équation de Maxwell (qui donna ses fondements théoriques à l'électro-magnétisme).

Le travail d'unification effectué par Maxwell était considéré comme prodigieux.

Il expliquait par les équations qu'il a découvertes les expériences de Faraday et les expériences de Hertz mettant en évidence les ondes radio. Si bien que à la fin du XIXème siècle avec la mécanique de Newton d'un coté et la théorie des ondes électro-magnétiques de Maxwell de l'autre, la physique était considérée comme quasiment achevée.

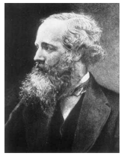

Figure: J. C. Maxwell

Or autour de 1900, Max Planck (1858-1947) dans son expérience du "corps noir" mis en évidence le fait suivant. Lorsqu'on chauffe un corps qui absorbe parfaitement tous les rayons lumineux extérieurs, il émet de la lumière par paquets dont l' énergie est un mutiple d'une petite quantité indivisible $h$ appelée depuis quantum de Planck ou constante de Planck.

La constante $h$ découverte par Planck est très-très petite, ceci explique qu'à notre échelle son existence ne se manifeste que dans des conditions particulières :

$$\boxed{h = 6,62 \times 10^{-34} \text{ joule-seconde}}$$

$10^{-34} = 0,0 \cdots 01$, avec 33 zéros après la virgule!
Les physiciens préfèrent, pour des raisons esthétiques, introduire la constante $\hbar$ (lire $h$-barre)égale à $\frac{h}{2\pi}$.

Quelques années plus tard (1905), Albert Einstein (1879-1955), se souvenant de l'expérience de Planck, utilisa la constante $h$ pour expliquer l'effet photoélectrique, ce qui lui valu le prix Nobel en 1905. Ces travaux sont contenus dans la formule de Planck-Einstein

$$\boxed{E = h\nu}$$

$E$ est l'énergie du rayon lumineux émis, $\nu$(lettre grecque nu) sa fréquence. Avec $\hbar$ cela donne $E = \hbar\omega$, $\omega$ est la pulsation du signal lumineux.
Einstein est plus connu pour sa théorie de la relativité générale (qui concerne l'ensemble de l'univers) que pour son explication également révolutionnaire de l'effet photo-électrique qui lui se manifeste tous les jours sous nos yeux!

L'interprétation des résultats obtenus par Planck et Einstein est la suivante : la lumière se présente alors sous forme de particules élémentaires, appelées photons, dont l'énergie ne peut prendre que des valeurs multiples de $h$. C'est de là que vient l'adjectif QUANTIQUE. On dit que l'énergie est quantifiée car elle ne peut prendre que des valeurs discrètes, multiples de $h$. C'était la première fois que les physiciens rencontraient ce genre de phénomène. Cette découverte est apparue comme une remise en cause radicale de la théorie ondulatoire de la lumière, résultant des équations de Maxwell. Le photon se manifestait par ses conséquences mais n'avait jamais été observé directement, autrement que sous forme de faisceaux de photons, jusqu'à une date très récente.

Le photon est une particule étrange: sa masse est nulle et il n'existe qu'a la vitesse de la lumière, $c \approx 300.000 km.s$. Suivant la théorie de la relativité restreinte, son énergie $E$ et sa quantité de mouvement $p$ son reliés par la formule $E = p/c$. C'est une particule qu'il est très difficile d'observer individuellement, c'est à dire en dehors d'un faisceau lumineux.

Une équipe de physiciens français du laboratoire Kastler-Brossel de Paris (Michel Brune, Serge Haroche, Jean-Michel Raimond) vient d'isoler un photon pendant un temps de 30 sec. Pour cette raison il a été baptisé Mathusalem! Le Monde du vendredi 16 mars 2007 annonce que cette expérience fait l'objet d'un article paru dans la revue Nature du 15 mars.
Einstein avait imaginé cette expérience qui vient donc d'être réalisée, confirmant ainsi la validité de la théorie de Planck-Einstein.

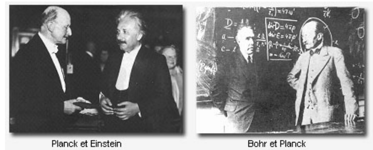


Figure: Einstein, Planck et Bohr

Bien qu'ayant contribué fortement à l'émergence de la théorie quantique, Einstein ne l'a jamais complétement acceptée dans toutes ses conséquences. Nous verrons plus tard plus en détails la nature de ses objections. La raison vient peut-être de sa conception du rôle des mathématiques dans la physique et qu'il tenait en particulier à conserver un lien direct avec les capacités d'observation objective de l'être humain. Pour cette raison il aurait sans doute été ravi de savoir que l'on avait réussi à isoler un photon.
Les objections d'Einstein sont de nature fondamentale et ont fait progresser la théorie quantique en la poussant dans ses derniers retranchements.

Voici deux extraits de lettres envoyées par Einstein à des collègues physiciens, révélant son hardiesse scientifique et son non-conformisme : "Comment formuler des énoncés relatifs au discontinu sans avoir recours recours à un continuum - l'espace-temps -; ce dernier devrait être exclus de la théorie, en tant qu'il est une construction adventice que ne justifie pas l'essence du problème et qui ne correspend à rien de réel. A cet égard nous manquons cruellement de formalisme mathématique adéquat. " (1916).

En 1954, un an avant sa mort, voici ce qu'il écrivait : "Il me semble en tout cas que l'alternative continu-discontinu est une authentique alternative; cela veut dire qu'ici il n'y a pas de compromis possible. ... Dans cette théorie, il n'y a pas de place pour l'espace et le temps, mais uniquement pour des nombres, des constructions numériques et des règles pour les former sur la base de règles algébriques excluant le processus limite. Quant à savoir quelle voie sera la bonne, seule la qualité du résultat nous l'apprendra. "

Là encore Einstein était à la recherche d'un autre formalisme mathématique. De ce point de vue il aurait sans doute commenté (et pris position!) sur les tentatives d'Alain Connes, à l'origine de la Géométrie Non Commutative. A. Connes est l'un des plus grands mathématiciens français contemporain. Né en 1947, il a reçu la médaille Fields (équivalent du prix Nobel en mathématiques) en 1982, la médaille d'or du CNRS en 2004. Ses travaux en mathématiques pures sur les algèbres d'opérateurs, l'analogue de matrices découvertes par Heisenberg, que l'on rencontrera plus loin, l'ont conduit à inventer une nouvelle géométrie appelée maintenant Géométrie Non Commutative.

La Géométrie Non Commutative fournit de nouveaux outils pour représenter et comprendre le monde physique et permettra peut-être un jour de concilier le discret et le continu comme le demandait Einstein. A. Connes et ses collaborateurs y travaillent.

Figure: Alain Connes

A la suite des découvertes de Planck et Einstein, une question cruciale se posait : la lumière est-elle vraiment une onde ou est-elle constituée de particules élémentaires?
Le mouvement de charges électriques, dans les atomes (en particulier l'atome d'hydrogène) posa des difficultés d'interprétation du même genre : a-t-on affaire à des ondes ou à des particules?
Revenons aux débuts de la mécanique quantique et aux nouveaux concepts physico-mathématiques qu'elle a engendrés. Selon les expériences réalisées par Thomson et Germer en 1929, un faisceau d'électrons (c'est à dire de particules électrisées) évolue comme un groupe de particules "classiques" ou comme une onde, capable de se diffracter et de présenter des interférences.

Suivit alors une cascade d'idées géniales comme rarement l'histoire de la science en connait. En deux ans (1924-1925) les bases de la théorie quantique sont construites et sont encore debout plus de 80 après malgré de perpétuelles remises en cause en raison des difficultés de leur interprétation.
Le français Louis de Broglie (1892-1987) puis l'autrichien Erwin Schrödinger (1887-1961) et le danois Werner Heisenberg (1901-1976), ont eu l'audace d'affirmer que la lumière et l'électricité se comportaient à la fois comme des ondes et comme des faisceaux de particules et que selon les circonstances l'aspect ondulatoire ou corpusculaire se manifeste.

De Broglie introduit sa fameuse fonction $\psi$ (fonction d'onde) qui contient l'aspect ondulatoire de la particule et Schrödinger postula que la fonction $\psi$ doit vérifier une équation, appelée maintenant équation de Schrödinger.

Je trouve ces équations si élégantes que je ne résiste pas au plaisir de vous les présenter

$$\boxed{ih\frac{\partial\psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2m}\triangle\psi + V\psi.}$$

Pratiquement en même temps que Schrödinger, Werner Heisenberg proposa une autre équation, tout aussi élégante, dont la forme est la suivante

$$\boxed{\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{i}{h}[H, A]}$$

Pour justifier son équation Heisenberg inventa un nouveau formalisme algébrique, appelé à l'époque mécanique des matrices (maintenant on parle plutot d'algèbres d'opérateurs). La relation entre ces équations se fait à travers l'égalité suivante :

$$\boxed{H = -\frac{h^2}{2m}\triangle\psi + V\psi, \quad [H, A] = HA - AH}$$

$H$ représente l'énergie de la particule étudiée, mais au lieu de prendre des valeurs numériques comme dans la mécanique classique de Newton, ici l'énergie est représentée par une matrice. $A$ est également une matrice et représente l'appareil de mesure utilisé dans l'expérience pour étudier la “particule ”.
Une matrice en mathématiques est un tableau de nombres (carré ou rectangulaire). On peut manipuler les matrices comme des nombres : les additionner et les multiplier. Mais contrairement à la multiplication des nombres, la multiplication des matrices est une opération non commutative : le résultat dépend de l'ordre dans lequel on fait les opérations. Par conséquent mesurer l'énergie puis mesurer la position d'une particule ne donne pas le même résultat que mesurer la position puis mesurer l'énergie ($A = P$) car on a $HP - PH \neq 0$.


Figure: de Broglie, Heisenberg, Schrödinger

L'équation de Schrödinger est d'abord apparue comme plus familière aux physiciens de l'époque. Elle ressemble beaucoup en effet d'une part à l'équation de Newton écrite sous une forme que lui a donnée le mathématicien irlandais William Hamilton (1805-1865), d'autre part aux équations d'onde de Maxwell (James Clerk Maxwell : Edinburgh, 1831 - Cambridge, 1879).
La théorie des matrices de Heisenberg était apparamment plus déconcertante. En réalité, aprés quelques échanges polémiques avec Heisenberg, Schrödinger démontra que les équations sont mathématiquement équivalentes.

Figure: William Hamilton

Hamilton a introduit l'espace des phases associé au mouvement d'une particule, qui est décrit par la paire constituée par sa position et son impulsion. C'est donc un espace de dimension 6 qui posséde une géométrie très riche beaucoup utilisée depuis sous le terme de géométrie symplectique dans divers domaines des mathématiques et de la physique

L'explication des différents termes des équations de Shrödinger et Heisenberg est un peu technique. Voici néanmoins quelques précisions.
$i = \sqrt{-1}$ est un nombre complexe, $\frac{\partial\psi}{\partial t}$ est la vitesse de déplacement de l'onde, $m$ est la masse de la particule, $-\frac{h^2}{2m}\triangle\psi$ représente l'énergie cinétique et $V\psi$ l'énergie potentielle.
L'interprétation physique de cette fameuse fonction $\psi$ fit couler beaucoup d'encre et n'est pas encore complétement élucidée alors que son statut mathématique est bien établi depuis les travaux de David Hilbert (1862-1943). Il inventa les espaces qui portent son nom ($\psi$ est alors considéré comme un point d'un espace de Hilbert $\mathcal{H}$.

Hilbert est un mathématicien Allemand dont l'oeuvre considérable est comparable à celle de Henri Poincaré. Il est connu aussi pour sa liste des 23 problèmes considérés comme les plus importants à résoudre qu'il annonça au congrès international de mathématiciens en 1900. Certains de ces problèmes ont été résolus depuis, d'autres résistent toujours.
von Neumann a travaillé sous la direction de Hilbert à Göttingen avant de s'exiler aux usa en 1933.

Figure: David Hilbert

Du coté de la physique, l'onde $\psi$ a été l'objet de polémiques très actives, à la frontière de la science et de la philosophie. La raison est que ce formalisme mathématique n'a pas d'interprétation intuitive naturelle. Pourtant, jusqu'à maintenant les prédictions et les analyses que l'on a pu tirer de l'équation de Schrödinger, et de l'équation de Heisenberg, se sont révélées correctes, en accord avec les résultats fournis par les expériences.
Cela ne veut pas dire qu'il s'agit d'une théorie définitive, mais en attendant mieux elle marche! ("tais-toi et calcule!"). Et ceci gràce à un formalisme mathématique, certes compliqué pour le profane, mais d'une grande cohérence interne depuis Hilbert et von Neumann en particulier. C'est en ce sens que l'on peut parler de la beauté d'une théorie scientifique : pouvoir explicatif et prédictif avéré, associé à une grande cohérence interne.

Maintenant il reste à rendre cette théorie compatible avec l'autre grande théorie fondée au début du XX ème siécle, achevée par Einstein : la relativité générale. Ce problème n'est toujours pas résolu actuellement et reste la principale enigme à résoudre dans le domaine de la physique fondamentale du XXI-ième siècle.
Des centaines de physiciens et mathématiciens dans le monde tentent de proposer des modèles complexes (comme la théorie des cordes ou des supercordes ou la géométrie non commutative) mais aucun ne s'est révélé décisif pour le moment. Les chercheurs n'ont pas encore réussi à éliminer toutes les contradictions internes, en particulier éviter que certaines quantités deviennent infinies.

Revenons encore à la fonction d'onde $\psi$ et à son interprétation. Celle-ci a été clairement formulée par l'École de Copenhague. On a déjà parlé des principaux acteurs que sont Niels Bohr et Werner Heisenberg. Contrairement à Heisenberg qui accordait une confiance (aveugle?!) aux mathématiques, et pour lequel l'explication mathématique se suffisait à elle même, Bohr voulait comprendre la fonction d'onde de manière intuitive, en dehors de son contexte mathématique. Il dit un jour à Heisenberg :
"mais à la fin des fins nous devons expliquer tout cela à Margaret". Margaret était la femme de Bohr qui participait à leurs discussions à Copenhague.

Essayons maintenant de décrire sommairement le contenu d'une fonction d'onde.
D'abord $\psi$ est un nombre complexe, que l'on caractérise soit par un couple de nombres réels soit par un vecteur du plan ayant un longueur et une direction : $\psi = (a, b)$ ou $\psi = (r, \theta)$. On a les relations

$$a = r\cos\theta,\ b = r\sin\theta,\ r = \sqrt{a^2+b^2},\ |\psi|^2 = a^2+b^2.$$

Ensuite le nombre complexe $\psi$ dépend du temps $t$, représentant l'évolution de la particule, et de sa position spatiale $q = (q_1, q_2, q_3)$, qui localise la particule dans l'espace à 3 dimensions, dans un système de coordonnées attaché au laboratoire.

Une première grosse difficulté apparait. Souvenez-vous, une particule quantique est à la fois une onde et une particule. Or une onde n'a pas de position bien localisée! Comment alors parler de position pour un tel objet que l'on pourrait qualifié d' Objet Virtuel Non Indentifié.
En 1926, Max Born (1882-1972) publie un article dans lequel il propose une interprétation qui choqua beaucoup de physiciens, accrochés au principe du déterminisne.
Selon Born, "$|\psi|^2$ donne la probabilité de détecter la particule dans la position $(q_1, q_2, q_3)$ à l'instant $t$." Pour ce travail Born reçu le prix Nobel en 1954.

Figure: Max Born

Un nouveau pas pour entrer dans le monde quantique venait d'être franchi : la mécanique quantique sera une théorie non-déterministe. Cette interprétation a été immédiatement contestée par Einstein, qui jusqu'à sa mort la combatit : "Dieu ne joue pas aux dés avec l'univers " écrivit-il à Born. Einstein admettait le formalisme quantique construit par Schrödinger et Heisenberg, mais il pensait qu'il était incomplet, et donc qu'il fallait le compléter en y ajoutant des variables supplémentaires pour éliminer l'incertitude. Et pourtant malgré de nombreuses tentatives, aucun argument décisif n'a été trouvé depuis pour rejeter cette interprétation probabiliste que l'on nomme depuis l' Interprétation de Copenhague de la Mécanique Quantique.

Une autre manifestation fondamentale du caractère non-déterministe de la mécanique est en réalité un théorème mathématique que l'on démontre à partir de l'interprétation de Born. Il a été découvert empiriquement par Heisenberg, c'est le fameux principe d'incertitude. En voici une première formulation, vague, pour commencer

*il est impossible de mesurer avec une précision arbitraire, et simultanément, la position et la vitesse d'une particule quantique (par exemple un électron). De même il est impossible de mesurer exactement l'énergie transmise à un instant donné.*

En voici une version quantitative pour ceux qui aiment la précision mathématique :

$$\boxed{\delta q \delta p \geq \frac{h}{4\pi}},$$

$q$ désigne la position, $p$ désigne l'impulsion, $p = mv$, $m$ désigne la masse et $v$ la vitesse, $\delta q$, $\delta p$ désignent les variations de la position et l'impulsion. On voit donc que $\delta p$ et $\delta q$ ne peuvent pas être infiniment petits en même temps. Evidemment ceci ne se fait sentir qu'aux échelles de l'ordre de $h$. Dans notre monde macroscopique de tous les jours on peut considérer que $h = 0$ et alors on peut avoir (et on a!) $\delta p = \delta q = 0$ comme il se doit. (la terre décrit une trajectoire bien nette, avec une vitesse connue, autour du soleil)

Une autre conséquence de l'interprétation de Copenhague, mise en forme mathématique par von Neumann, est le mystérieux principe de réduction de la fonction d'onde. Cela veut dire que le fait de mesurer une caractéristique physique d'une particule, avec un appareil de mesure $A$, modifie son état $\psi$ qui devient alors un état spécifique (le terme mathématique est vecteur propre) $\psi_j$ de l'appareil de mesure.

En particulier il n'est pas possible de revenir en arrière. Par exemple, si on mesure une impulsion et que l'on trouve le résultat numérique $p$ alors la fonction d'onde devient la fonction exponentielle

$\psi_p(q) = \exp(\frac{i}{\hbar} pq)$.

Einstein a toujours contesté cette interprétation de la mécanique quantique. En 1935, en collaboration avec Podolski et Rosen il publie un article dans lequel les auteurs soulignent le caractère incomplet de la mécanique. Pour eux l'incertitude venait du caractère inachevé de la théorie alors que dans l'interprétation de Copenhague l'incertitude est au coeur des principes de la mécanique quantique.

Einstein-Podolski-Rosen ont imaginé une expérience qui selon eux met en évidence le caractère incomplet de la mécanique quantique quantique. C'est l'exemple type de ce que le mathématicien appelle une preuve par l'absurde. Les auteurs supposent donc que la mécanique quantique est une théorie complète et par un raisonnement astucieux aboutissent à une contradiction. On appelle cela le “paradoxe” EPR. D. Bohm a proposé la version simplifiée suivante. Considérons une molécule $M$ constituée de deux atomes $A$ et $B$. On sépare les deux atomes et on effectue la mesure d'une quantité physique appelée spin.
Le spin est une propriété spécifiquement quantique.
On peut le définir grossiérement comme le moment cinétique intrinsèque de la particule en rotation sur elle même. Le spin dépend de 3 directions spatiales perpendiculaires, $s_x$, $s_y$, $s_z$.

Au départ on suppose que le spin de la molécule est nul. Le spin étant conservé, on a $s_x(A) + s_x(B) = 0$, et de même pour $y$ et $z$. Donc toute mesure sur $A$ donne automatiquement un résultat pour $B$.
Ainsi, en effectuant uniquement des mesures sur $A$ on peut obtenir $s_x(B)$ et $s_y(B)$, ce que le principe d'incertitude de Heisenberg interdit car $s_x$ et $s_y$ ne commutent pas. On a donc là une contradiction (paradoxe EPR).

A cette objection d'EPR, Bohr répondit qu'il n'est pas correcte en mécanique quantique de supposer que les atomes $A$ et $B$ sont indépendants, mêmes séparés par une longue distance, ces atomes conservent la trace de leur appartenance dans le passé à une même molécule. Ce phénomène porte le nom d'inséparabilité quantique ou d'intrication quantique. Il signifie que 2 particules quantiques qui ont interagit à un moment donné, continueront à interagir dans le future même si on les sépare par des distances très grandes. Cela ressemble à de la science fiction! Peut-on en déduire que la télépathie existe?
A priori non, car le phénomène d'inséparabilité ne concerne que les particules quantiques et toute observation ou mesure détruit instantément cette intrication quantique, d'après le principe de la réduction de la fonction d'onde.

Selon EPR la théorie quantique devrait être une théorie locale, il fallait donc éliminer cette possibilité d'action instantanée à distance (ou supérieure à la vitesse de la lumière), en adjoignant des paramètres supplémentaires (appelées variables cachées).
Or en 1965, John Bell, physicien Irlandais, annonça un résultat d'une portée considérable, dont voici une illustration.
Charles préparent 2 particules pour lesquelles les interactions ne peuvent être que locales. Il en envoie une à Alice et une à Bernard. Chacun d'eux effectue 2 mesures, $P, Q$ pour Alice, $R, S$ pour Bernard.
On s'arrange pour que les résultats soient $-1$ ou 1. Ils répétent ces mesures un grand nombre de fois et font la moyenne. $<,>$ représente l'opération de moyenne. Bell démontre alors que l'on

$$< QS > + < RS > + < RT > - < QT > \leq 2$$

En 1980-1982, A. Aspect (université d'Orsay), dans une expérience d'optique remarquable de précision, démontre par des mesures de polarisation de photons que l'inégalité de Bell n'est pas toujours satisfaite. Il prépare une source de photons présentant 2 états possibles de polarisation $\pm$, qu'il donne à Alice et Bernard.
$P, Q, R, S$ sont des mesure de polarisations de la lumière dans des directions différentes. Dans son expérience Aspect trouve que

$$< QS > + < RS > + < RT > - < QT > \approx 2,697$$

Alors que la valeur théorique prédite par la théorie quantique est $\approx 2,7$.

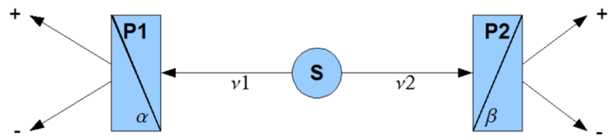


Figure: Le principe de l'expérience d'Aspect

Par son expérience, qui a été répétée et améliorée depuis plusieurs fois par plusieurs équipes dans le monde, Aspect montre donc que l'inégalité de Bell n'est pas toujours vérifiée pour des paires de photons intriqués et que par conséquent le comportement du photon n'obéit pas au principe de localité et réalité cher à Einstein.

Bien que bien que séparés dans l'espace les photons demeurent intriqués.
Dans cette expérience les mesures sont effectuées de telle sorte que les photons mesurés par Alice et par Bernard n'aient pas le temps de communiquer entre eux, par un signal (qui ne peut pas voyager plus vite que la lumière, Einstein, encore!).

Les recherches actuelles dans le domaine de l'informatique quantique reposent sur cette étrange propriété appelée l'intrication quantique. Le coté étrange de cette propriété a été mis en évidence par Schrödinger lui-même, dès 1935, dans une expérience de pensée connue sous le nom de chat de Schrödinger. Voici l'histoire (triste) du chat de Schrödinger.

Un chat est enfermé dans une caisse avec un flacon de cyanure, un marteau retenu par un fil et un détecteur quantique (compteur Geiger). On y dépose un élément radioactif dont la période est de 1h. C'est à dire que au bout de 1 heure l'atome a une chance sur 2 de se désintégrer. Si c'est le cas, l'émission radioactive est détectée par le compteur, provoque la rupure du fil qui maintient le marteau qui alors brise le flacon et provoque la mort du chat. Question : le chat est-il mort ou vivant?

Réponse de la théorie quantique : en l'absence d'observateur le chat est dans un état intriqué moitié mort moitié vivant. Lorsqu'un observateur intervient, il y a réduction de la fonction d'onde et l'observateur verra un chat mort ou vivant.

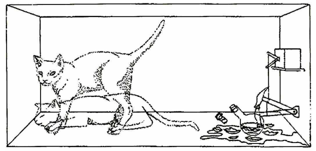

Figure: Le chat de Schrödinger

Maintenant que nous sommes un peu plus familiers avec ce monde quantique si étrange, obéissant à des lois qui exigent des interprétations subtiles, on peut se poser la question des rapports entre cet univers de l'infinimet petit nque nous avons esquissé et le monde sensible dans lequel nous vivons et où les objets se déplacent en suivant les lois de Newton (au moins tant que l'on n'approche pas de la vitesse de la lumière!). Comment communiquent-ils?

Nous avons vu que la nécessité de bâtir une théorie quantique faisant appel à des notions mathématiques abstraites s'est imposée petit à petit, parce qu'il fallait sortir des contradictions dans lesquels se débattait la physique à la fin du XIXème siècle, et rendre compte de cette dualité onde-corpuscule présente dans le monde de l'infiniment petit.
Le modèle de l'atome inventé initialement par N. Bohr était d'inspiration newtonienne : l'électron tourne autour du noyau comme la terre tourne autour du soleil.
Ce modèle étant trop simpliste pour expliquer la stabilité de l'atome d'hydrogène, on a alors postulé pour l'énergie des règles de quantification adh'oc (Bohr, Sommerfeld, Einstein). Cela apparaissait comme du bricolage, génial certes, mais manquant de cohérence.

L'un des premiers succès de l'équation de Schrödinger a été de prévoir le spectre d'énergie de l'atome d'hydrogène (elle redonne exactement les règles empiriques de Balmer).
Peu à peu la construction de l'univers quantique s'est éloignée de la représentation de monde sensible.
Revenons maintenant à la question fondamentale : quand est-on dans le monde microscopique ? Quand est-on dans le monde microscopique?
Comment se fait la transition entre ces deux mondes? Comment cohabitent-ils?
Comment se fait la jonction entre l'individu humain qui observe et mesure et la particule quantique?

La notion de particule quantique est une entité nouvelle, ni particule au sens classique, ni onde.
Rappelons nous : la mécanique quantique a commencé par la découverte de la constante de Planck $h$. A notre échelle cette constante est très petite (de l'ordre de $10^{-34}$). Par une analyse mathématique délicate on peut montrer que les équations de Schrödinger et de Heisenberg peuvent être approximées par l'équation de Newton lorsque la constante de Planck $h$ devient négligeable devant les autres grandeurs en jeu (distances, masses, énergies). Cette analyse est plus ou moins délicate suivant le degré de finesse et de précision recherché et aussi suivant la complexité du système.

La compréhension approfondie des mécanismes de transition entre ces deux mondes a été l'objet de nombreux travaux de la part de mathématiciens et physiciens et se poursuit encore actuellement, notamment pour les système chaotiques, c'est à dire très instables.
Un mathématicien pourrait sans doute en rester là et se satisfaire d'une description formelle du monde quantique, univers abstrait qui lui est familier. Mais la curiosité humaine ne se satisfait pas aussi facilement. L'objection EPR ayant été rejetée, la mécanique quantique pose naturellement les questions suivantes : qu'est-ce que la réalité et que devient l' objectivité scientifique? Les travaux de Zeh, de Zurek et Omnes tentent d'apporter une réponse en introduisant la notion de décohérence quantique.

L'idée générale est la suivante.
Dans une expérience quantique il faut considérer l'ensemble constitué par les 3 composants suivants : le système des particules étudiées, l'appareil de mesure, et le reste de l'univers. Le tout est régi par les lois quantiques et léquation de Schrödinger. Ce qui nous intéresse c'est la fonction d'onde du sous-système constitué par les particules et l'appareil de mesure. Comme il n'est pas possible de connaitre l'ensemble de l'univers, on parvient à extraire la fonction d'onde du sous-système par une opération mathématique appelée "trace partielle" (Zurek, 1980) que l'on effectue sur l'état du grand système. (Zurek, 1980) à montré que les résultats ainsi obtenus sont voisins de ceux obtenus par le principe de la réduction de la fonction d'onde.

Les travaux de Zurek et ses collaborateurs sont considérés par les physiciens comme étant une grande avancée dans la compréhension du mécanisme de la mesure.
L'histoire de la mécanique quantique ne s'arrête pas là, il y a encore beaucoup de travail pour éclaircir ces questions de la part des physiciens bien sûr et aussi des mathématiciens.

## Références bibliographiques


B. Hoffmann et M. Paty, *L'étrange histoire des quanta*
Éditions du Seuil, coll. point sciences, 1979.
E. Brézin, *Physique et Mathématiques*
Conférence à l'université de tous les savoirs, le 16 juin 2005.
sur les fondements de la mécanique quantique :
J.-M. Lévy-Leblond et F. Balibar, *Quantique- Rudiments*
InterÉditions, Paris, 1984
V. Scarani, *Introduction à la physique quantique*
Vuibert, 2003.