Eléments de logique

Yann Rollin

yann.rollin@univ-nantes.fr

Enoncés

nous ne répondrons pas à cette question

Question 1

Qu'est-ce qu'un énoncé mathématique ?

Exemples :

- Pour tout entier relatif x, on a $x^2 \geq 0$. énoncé vrai
- Je mens. énoncé paradoxal, mais qui ne semble pas mathématique
- Le plus petit entier qu'on ne peut définir en moins de quinze mots existe. Énoncé paradoxal qui semble mathématique

Propositions

c'est une simplification grossière : il existe des énoncés mathématiques ni vrai, ni faux dits indécidables

Une *proposition* est notée par une lettre

$$P, Q, R, \ldots$$

Une proposition est *vraie* ou bien *fausse*. Ce sont les *valeurs de vérité des propositions*.

Un prédicat est une proposition qui dépend d'un paramètre, noté par une lettre, x par exemple.On note alors le prédicat $P(x)$ et la valeur de vérité du prédicat dépend de x.

Exemple

La relation $x \geq 0$ est un prédicat noté $P(x)$, où x est un nombre.Alors $P(1)$ est vrai tandis que $P(-1)$ est faux.

Language des propositions

On peut construire de nouvelles propositions de manière récursive.On utilise les symboles

$$(,), \vee, \wedge, \neg, \Rightarrow \text{ et } \Leftrightarrow .$$

Si P et Q sont des propositions, alors on décrète que ces expressions sont aussi des propositions :

- (P),
- $\neg P$, ← non P
- $(P \vee Q)$, ← P ou Q
- $(P \wedge Q)$, ← P et Q
- $(P \Rightarrow Q)$, ← P implique Q
- $(P \Leftrightarrow Q)$. ← P est equivalente à Q

Il reste cependant à définir les valeurs de vérité de ces nouvelles propositions.

Tables de vérité

P	(P)	$\neg P$
V	V	F
F	F	V

$P \vee Q$	$Q : V$	$Q : F$
$P : V$	V	V
$P : F$	V	F

$P \wedge Q$	$Q : V$	$Q : F$
$P : V$	V	F
$P : F$	F	F

Résumé

P ou Q est vraie pourvu que l'une des deux propositions soit vraie

P et Q est vraie si les deux propositions sont vraies.

dans les autres cas, c'est fausse.

Tables de vérité (suite)

$P \Rightarrow Q$ est fausse si P est vraie et Q est fausse. Sinon $P \Rightarrow Q$ est vraie

$P \Rightarrow Q$	$Q : V$	$Q : F$
$P : V$	V	F
$P : F$	V	V

$P \Leftrightarrow Q$	$Q : V$	$Q : F$
$P : V$	V	F
$P : F$	F	V

Problème 2

Déterminez la table de vérité des propositions

$$(\neg(P \wedge Q) \Rightarrow Q),$$

toujours vrai.

$$((\neg P \vee Q) \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q)).$$

$P \Rightarrow Q$ signifie (non P) ou Q

Théorèmes de logique

Si on a $P \Rightarrow Q$, on dit que P est une *condition suffisante* pour avoir Q.
Si on a $Q \Rightarrow P$, on dit que P est une *condition nécessaire* pour avoir Q.

Théorème 3 (CNS)

Soient P et Q des prédicats, alors

$$(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow ((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)).$$

Autrement dit P est équivalent à Q si, et seulement si, P est une condition nécessaire et suffisante pour avoir Q.

Problème 4

Soit (u_n) une suite numérique. Montrez que les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. *Pour tout entier n, on a $u_n \leq u_{n+1}$.*
2. *Pourt tout les entiers n et k, on a $u_n \leq u_{n+k}$.*

Loi de Morgan

Théorème 5

$$\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q).$$

$$\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q).$$

Illustrations :

Le chien est ami fidèle et courageux est une affirmation que nous pouvons nier en disant que *le chien est infidèle ou couard*.
Ma carte est une figure ou un as peut être nié en affirmant que *ma carte n'est pas un as et n'est pas une figure (ni-ni)*.

Contraposée

La propositions $\neg Q \Rightarrow \neg P$ est appelé la *contraposée* de $P \Rightarrow Q$.

Théorème 6

Une implication est équivalente à sa contraposée. Autrement dit

$$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P).$$

Illustration :

Si je vis alors mon coeur bat, admet pour contraposée *si mon coeur s'arrête, alors je meurs*.

Attention

$Q \Rightarrow P$ est appelée *la réciproque* de $P \Rightarrow Q$, mais ces propositions ne sont généralement pas équivalentes.

Distributivité,...

Ces affirmations sont vraies pour tout P, Q, R

$$P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P, \quad (P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$$

$$P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P, \quad (P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$$

$$(P \wedge Q) \vee R \Leftrightarrow (P \vee R) \wedge (Q \vee R)$$

$$(P \vee Q) \wedge R \Leftrightarrow (P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$$

Illustration :

A la foire, tu gagnes ou tu perds. Mais dans tous les cas, tu remportes un cadeau. Nous sommes dans l'éventualité, *tu gagnes et tu remportes un cadeau, ou tu perds et tu remportes aussi un cadeau.*

Quantificateurs

On utilise deux symboles $\forall$ et $\exists$ pour construire des propositions à partir d'un prédicat $P(x)$ qui dépend d'un paramètre x.
La proposition *universelle* U est notée

$$(\forall x, P(x))$$

et la proposition *existentielle* E notée

$$(\exists x, P(x)).$$

Alors U est vraie si $P(x)$ est vrai pour tout les paramètres x. Dans le cas contraire, U est fausse.
E est vraie s'il existe au moins un paramètre tel que $P(x)$ est vrai. Dans le cas contraire, E est fausse.

Exemple

Si $P(x)$ est le prédicat donné par la condition $x \geq 0$, où x est un nombre relatif, alors $\exists x, P(x)$ est vraie, tandis que $\forall x, P(x)$ est fausse.

Ordre des quantificateurs

L'ordre des quantificateurs est primordial.

Exemple :

Si $P(x, y)$ est une relation $x \geq y$ entre des entiers relatifs x et y alors

$$\forall x, (\exists y, P(x, y))$$

est vraie, tandis que

$$\exists y, (\forall x, P(x, y))$$

est fausse.

Quantificateurs et négation

$$\neg(\forall x, P(x)) \Leftrightarrow (\exists x, \neg P(x))$$

$$\neg(\exists x, P(x)) \Leftrightarrow (\forall x, \neg P(x))$$

Illustration :

Une suite numérique (u_n) est dite monotone si elle est croissante ou décroissante :

$$(\forall n, u_n \leq u_{n+1}) \vee (\forall n, u_n \geq u_{n+1}).$$

Une suite n'est pas monotone si

$$\neg(\forall n, u_n \leq u_{n+1}) \wedge \neg(\forall n, u_n \geq u_{n+1}),$$

soit

$$(\exists n, u_n > u_{n+1}) \wedge (\exists n, u_n < u_{n+1}).$$

Schémas typiques de preuves

Preuve par déduction (ou modus ponens) : on suppose P et on montre que $P \Rightarrow Q$ est vraie. Alors Q est vraie.

Exemple

Les mamifères à crocs sont carnivores. Le loup est un mamifère avec des crocs. On en déduit que le loup est carnivore.

Preuve par contraposée (modus tollens) : on suppose $\neg Q$ et on montre que $P \Rightarrow Q$. On en déduit $\neg P$.

Exemple

En reprenant l'exemple précédent, on note que la vache n'est pas carnivore. On en déduit que la vache n'a pas de crocs.

Schémas typiques

Preuve par l'absurde : On montre que $\neg P \Rightarrow (Q \wedge \neg Q)$. On en déduit que P est vraie.

Exemple

Il existe un nombre infini de nombres premiers. Si c'est faux, on a un nombre fini de nombre premiers distincts $p_1, \cdots, p_k$.On considère l'entier $p = 1 + p_1 p_2 \cdots p_k$.Par définition $p > 1$ et $p > p_i$ pour tout i.En particulier, p est distinct des p_i donc p n'est pas un nombre premier. Alors il existe un nombre premier p_i qui divise p.Si p_i divise p il divise $1 = p - p_1 \cdots p_k$, par définition de p, ce qui est impossible.

Récurrence

Une partie X de $\mathbb{N}$ est dite récurrente si pour tout $n \in X$, on a $n+1 \in X$.

Théorème 7

Soit X une partie récurrente de $\mathbb{N}$, telle que 0 est élément de X. Alors $X = \mathbb{N}$.

Théorème 8

Soit $P(n)$ un prédicat qui dépend de l'entier naturel n. Supposons que

1. *$P(0)$ est vraie et*
2. $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

Alors $P(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Preuve : soit

$$X = \{n \in \mathbb{N}, P(n)\}$$

D'après (1), $0 \in X$ et d'après (2), X est récurrent. On en déduit que $X = \mathbb{N}$.

Autres récurrences

Théorème 9 (Récurrence double)

Soit $P(n)$ un prédicat qui dépend de l'entier naturel n. Supposons que

1. $P(0)$ *et* $P(1)$ *sont vraies,*
2. $\forall n \in \mathbb{N}, P(n) \wedge P(n+1) \Rightarrow P(n+2)$.

Alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Preuve : On définit $Q(n)$ comme la proposition $P(n) \wedge P(n+1)$. Les hypothèses montrent que $Q(0)$ et vraie et que $Q(n) \Rightarrow Q(n+1)$. Le théorème en découle par la récurrence standard.

Autres récurrences

Théorème 10 (Récurrence forte)

Soit $P(n)$ un prédicat qui dépend de l'entier naturel n. Supposons que

1. $P(0)$ *est vraie,*
2. $\forall n \in \mathbb{N}, (\forall k \leq n, P(k)) \Rightarrow P(n+1)$.

Alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Preuve : On définit $Q(n)$ comme la proposition

$$(\forall k \leq n, P(k)).$$

Les hypothèses montrent que $Q(0)$ et vraie et que $Q(n) \Rightarrow Q(n+1)$. Le théorème en découle par la récurrence standard.