Au delà de l'infini, par Cantor

Yann Rollin

$$\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \cdots$$

Qu'est-ce compter ?

- Compter s'apprend en établissant une relation entre les doigts de la main et un autre ensemble qu'on souhaite compter.
- Certains animaux savent compter.
- Préhistoire des mathématiques : objets utilisés pour le comptage (entailles, encoches, os d'Ishango, bâtons de comptage)
- Les objets utilisés pour le comptage sont interchangeables.
- Le concept de cardinal inventé par Georg Cantor (1845-1918) : classe d'équivalence d'ensembles *équipotents*.
- Vives polémiques entre Cantor et ses contemporains finitistes et constructivistes.

Injection, surjections, bijections

Soient A et B deux ensembles et $f : A \to B$ une application.

- On dit que f est *injective* si tout élément de B a *au plus* un antécédent
$$\forall a, a' \in A, f(a) = f(a') \Rightarrow a = a'.$$
- On dit que f est *surjective* si tout élément de B a *au moins* un antécédent :
$$\forall b \in B, \exists a \in A, b = f(a).$$
- L'application est dite *bijective* si elle est à la fois injective et surjective
$$\forall b \in B, \exists ! a \in A, b = f(a).$$
- Il existe une bijection $\mathrm{id}_A : A \to A$.
- Une bijection $f : A \to B$ admet un *inverse* $g : B \to A$, c'est a dire une application telle que $g \circ f = \mathrm{id}_A$ et $f \circ g = \mathrm{id}_B$. En outre g est unique et on le note f^{-1}.

Exemples, contre-exemples, diagrammes de Venn

Quelques propriétés

Théorème 1

Soient $f : E \to F$ et $g : F \to H$ deux applications et $g \circ f$ leur composée.

1. *Si f et g sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.*
2. *Si f et g sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.*
3. *Si f et g sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective.*
4. *Si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.*
5. *Si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.*

Cardinal

Définition 2

On dit que deux ensembles A et B ont le même cardinal, ou bien sont équipotent, s'il existe une bijection de A vers B. On note alors

$$A \sim B.$$

Proposition 3

La relation d'équipotence est une relation d'équivalence.

Ensembles finis

L'entier n est défini comme un ensemble qui possède n éléments via la construction de Von Neumann :

$$0 = \emptyset, \quad 1 = \{0\}, \quad 2 = \{0, 1\}, \quad 3 = \{0, 1, 2\} \ldots$$

Définition 4

Un ensemble A est dit fini s'il existe un entier n tel que $n \sim A$.

Théorème 5

$$n \sim m \Leftrightarrow n = m$$

De plus, un ensemble A est fini si est seulement si il n'est équipotent à aucune de ses parties propres.

Puissance du dénombrable

Définition 6

Un ensemble A tel que $A \sim \mathbb{N}$ est dit dénombrable.

Théorème 7

Un ensemble dénombrable est infini.

Preuve :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\to \mathbb{N} \setminus \{0\} \\ n &\mapsto n + 1 \end{aligned}$$

réalise une bijection entre $\mathbb{N}$ et une partie propre.
Donc $\mathbb{N}$ n'est pas fini.

Exemples dénombrables

Exemples

- $\mathbb{N} \sim \mathbb{Z}$
- $\mathbb{N} \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Théorème 8

$\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}$.

La suite, destinée aux curieux, est facultative.

Théorème de Cantor

Motivation : Existence d'infinis de natures différentes

Théorème 9

Soit E un ensemble et $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties de E. Il n'existe pas de surjection de E vers $\mathscr{P}(E)$. En particulier, les deux ensembles n'ont pas le même cardinal.

Preuve : soit $f : E \to \mathscr{P}(E)$ une application et

$$F = \{x \in E, x \notin f(x)\}.$$

Alors $F \in \mathscr{P}(E)$ n'a pas d'antécédent par f.
Donc f ne peut être surjective.

Ordre

Définition 10

On dit que A est moins puissant que B s'il existe une injection de A vers B. On note alors

$$A \leq B.$$

Théorème 11

$A \leq B$ *si, et seulement si, il existe une surjection* $f : B \to A$.

Théorème 12 (Théorème de Cantor-Bernstein)

La relation $A \leq B$ est une relation d'ordre au sens où

- $A \leq A$
- $A \leq B$ et $B \leq C \Rightarrow A \leq C$
- $A \leq B$ et $B \leq A \Rightarrow A \sim B$

Défi 1/2

Théorème 13

Un ensemble A est infini si, et seulement si, $\mathbb{N} \leq A$.

Défi : démontrez que A infini $\Rightarrow \mathbb{N} \leq A$.

Défi 2/2

Théorème 14

Soit A un ensemble infini et $x \in A$. Alors

$$A \setminus \{x\} \sim A.$$

$\mathbb{Q}$ est dénombrable

Preuve du Théorème 8 :
Il existe une application injective de $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}$, donnée par $f(n) = n$.
Il existe une application injective $g : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$:
toute fraction $q \in \mathbb{Q}$ s'écrit de manière unique sous forme irreductible

$$q = \frac{a}{b}$$

avec la convention $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$.
On pose alors $g(q) = (a, b)$.
On a vu que $\mathbb{N}^* \sim \mathbb{N}$ et $\mathbb{Z} \sim \mathbb{N}$, donc

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \sim \mathbb{N} \times \mathbb{N} \sim \mathbb{N}.$$

Il en résulte que $\mathbb{Q}$ s'injecte dans $\mathbb{N}$.
Par le théorème de Cantor-Bernstein $\mathbb{Q} \sim \mathbb{N}$.

Puissance du continu

$$f : A \to \mathscr{P}(A)$$
$$x \mapsto \{x\}$$

est une injection donc $A \leq \mathscr{P}(A)$ et par the théorème de Cantor $A < \mathscr{P}(A)$.
En particulier

$$\mathbb{N} < \mathscr{P}(\mathbb{N}) < \mathscr{P}(\mathscr{P}(\mathbb{N})) < \dots$$

On peut montrer que

$$\mathbb{R} \sim \mathscr{P}(\mathbb{N})$$

d'où

$$\mathbb{N} < \mathbb{R}.$$

Cantor (hypothèse du continu) : il n'existe pas d'ensemble A tel que

$$\mathbb{N} < A < \mathbb{R}.$$

Cette propriété est indécidable (Gödel, Cohen).

Puissance du Continu

Théorème 15

$$\mathbb{R} \simeq \mathscr{P}(\mathbb{N})$$

Preuve :

Lemme 16

Il existe des injections

$$f : \mathbb{R} \to \mathscr{P}(\mathbb{N}), \quad g : \mathscr{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}.$$

Par Cantor-Bernstein, on en déduit que $\mathbb{R} \sim \mathscr{P}(\mathbb{N})$.

Injection $\mathbb{R} \to \mathscr{P}(\mathbb{N})$

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R} &\to \mathscr{P}(\mathbb{Q}) \\ x &\mapsto \mathbb{Q} \cap [x, +\infty) \end{aligned}$$

est injective.
Soit $\psi : \mathbb{Q} \to \mathbb{N}$ une bijection.Alors

$$\begin{aligned} \Psi : \mathscr{P}(\mathbb{Q}) &\to \mathscr{P}(\mathbb{N}) \\ A &\mapsto \psi(A) = \{\psi(a), a \in A\} \end{aligned}$$

est aussi une bijection.
On en déduit que $f = \Psi \circ h : \mathbb{R} \to \mathscr{P}(\mathbb{N})$ est une injection.

Injection $\mathscr{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$

Soit $\mathscr{F}$ l'ensemble des suites

$$\mathscr{F} = \{u : \mathbb{N} \to \{0, 1\}\}.$$

$(u_n) \in \mathscr{F}$ définit une partie A_u de $\mathbb{N}$ par

$$A_u = \{n \in \mathbb{N}, u_n = 1\}.$$

L'application

$$\begin{aligned} \mathscr{F} &\to \mathscr{P}(\mathbb{N}) \\ u &\mapsto A_u \end{aligned}$$

est une bijection. On montre qu'il existe une injection

$$k : \mathscr{F} \to \mathbb{R}.$$

Injection $\mathscr{F} \to \mathbb{R}$

Etant donné $(u_n) \in \mathscr{F}$, on pose

$$x_u = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{2^n} \in [0,2].$$

- L'application $u \mapsto x_u$ n'est pas injective.
- Le défaut d'injectivité provient des suite (u_n) qui ne sont pas à support fini.
- Par exemple $(1, 0, 0, \dots)$ et $(0, 1, 1, 1, \dots)$ définissent la même valeur $x_u = 1$.
- On peut définir une injection $k : \mathscr{F} \to \mathbb{R}$ par

$$k(u) = \begin{cases} x_u + 3 \text{ si } (u_n) \text{ est à support fini et} \\ x_u \text{ sinon.} \end{cases}$$

On en déduit l'existence d'une injection $g : \mathscr{P}(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$.

Références

- *Introduction à la théorie des ensembles*, Paul Halmos (1970)
- *Logique et théorie axiomatique*, J.L. Krivine (2014).