

Intégration convexe 1-dimensionnelle

Vincent Borrelli

March 14, 2011

1 L'intégration convexe

Notation.— Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ et $a \in A$. On désigne par $IntConv(A, a)$ l'intérieur de l'enveloppe convexe de la composante connexe par arcs contenant a .

Définition.— Un lacet $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, $g(0) = g(1)$ entoure strictement $z \in \mathbb{R}^n$ si

$$IntConv(g([0, 1])) \supset \{z\}.$$

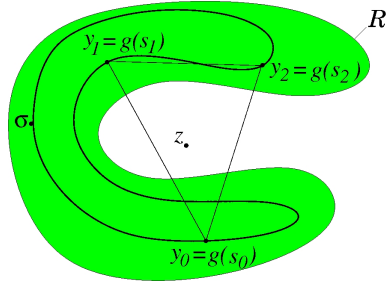
Lemme fondamental.— Soient $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^n$ une partie ouverte, $\sigma \in \mathcal{R}$ et $z \in IntConv(\mathcal{R}, \sigma)$. Il existe un lacet $h : [0, 1] \xrightarrow{C^0} \mathcal{R}$ basé en σ entoure strictement z et tel que :

$$z = \int_0^1 h(s) ds.$$

Démonstration.— Puisque $z \in IntConv(\mathcal{R}, \sigma)$, il existe un n -simplexe Δ dont les sommets y_0, \dots, y_n sont inclus dans \mathcal{R} et tel que z soit dans l'intérieur de Δ . Par conséquent, il existe aussi

$$(\alpha_0, \dots, \alpha_n) \in]0, 1[^{n+1}$$

tels que $\sum_{k=0}^n \alpha_k = 1$ et $z = \sum_{k=0}^n \alpha_k y_k$. Tout lacet $g : [0, 1] \rightarrow \mathcal{R}$ basé en σ et passant par y_0, \dots, y_n vérifie $IntConv(g([0, 1])) \supset \{z\}$ i. e. g entoure z .



En général

$$z \neq \int_0^1 g(s) ds.$$

Notons s_1, \dots, s_N les temps où $g(s_k) = y_k$ et soit $f_k : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ telle que :

$$\text{i) } f_k < \eta_1 \text{ sur } [0, 1] \setminus [s_k - \eta_2, s_k + \eta_2],$$

$$\text{ii) } \int_0^1 f_k = 1,$$

avec η_1, η_2 deux nombres strictement positifs arbitraires. On pose :

$$z_k := \int_0^1 g(s) f_k(s) ds.$$

Etant donné $\epsilon > 0$, on peut choisir η_1, η_2 tels que :

$$\forall k \in \{1, \dots, n\}, \quad \|z_k - g(s_k)\| \leq \epsilon.$$

Comme \mathcal{R} est ouverte et $z \in \text{Int } \Delta$, si ϵ est suffisamment petit on a

$$z \in \text{IntConv}(z_1, \dots, z_n).$$

Par conséquent, il existe $(p_1, \dots, p_n) \in]0, 1[^{n+1}$ tels que $\sum_{k=0}^n p_k = 1$ et :

$$\begin{aligned} z &= \sum_{k=0}^n p_k z_k &= \sum_{k=0}^n p_k \int_0^1 g(s) f_k(s) ds \\ &= \int_0^1 g(s) \sum_{k=0}^n p_k f_k(s) ds &= \int_0^1 g(s) \varphi'(s) ds \end{aligned}$$

où on a posé

$$\varphi'(s) := \sum_{k=0}^n p_k f_k(s)$$

et

$$\begin{aligned} \varphi : [0, 1] &\longrightarrow [0, 1] \\ s &\longmapsto \int_0^s \varphi(u) du. \end{aligned}$$

On a $\varphi'(s) > 0$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$. Donc φ est un difféomorphisme strictement croissant de $[0, 1]$ dans lui-même. Effectuons le changement de variable $s = \varphi^{-1}(t)$, c'est-à-dire $t = \varphi(s)$, on a

$$dt = \varphi'(s) ds$$

d'où :

$$z = \int_0^1 g(s) \varphi'(s) ds = \int_0^1 g \circ \varphi^{-1}(t) dt.$$

Ainsi $h = g \circ \varphi^{-1}$ convient. □

Remarque.— A priori $h \in \Omega_\sigma(\mathcal{R})$, mais il est bien évident que l'on peut choisir h parmi les “allers-retours” i. e. l'espace :

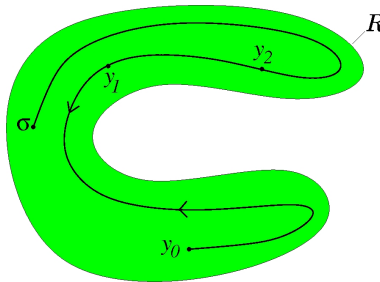
$$\Omega_\sigma^{AR}(\mathcal{R}) = \{h \in \Omega_\sigma(\mathcal{R}) \mid \forall s \in [0, 1] \ h(s) = h(1 - s)\},$$

l'intérêt étant que maintenant on a affaire avec un espace contractible. Pour tout $u \in [0, 1]$, on note alors $h_u : [0, 1] \longrightarrow \mathcal{R}$ l'application définie par

$$h_u(s) = \begin{cases} h(s) & \text{si } s \in [0, \frac{u}{2}] \cup [1 - \frac{u}{2}] \\ h(u) & \text{si } s \in [\frac{u}{2}, 1 - \frac{u}{2}]. \end{cases}$$

L'homotopie ainsi définie rétracte $\Omega_\sigma^{AR}(\mathcal{R})$ sur l'application constante

$$\begin{aligned} \tilde{\sigma} : [0, 1] &\longrightarrow \mathcal{R} \\ s &\longmapsto \sigma. \end{aligned}$$



Lemme fondamental (version paramétrique). – Soient P une variété compacte, $E = P \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\pi} P$ un fibré trivial, $\mathcal{R} \subset E$ une partie telle que

$$\forall p \in P, \quad \mathcal{R}_p := \pi^{-1}(p) \cap \mathcal{R} \text{ est un ouvert de } \mathbb{R}^n$$

Soient encore $\sigma \in \Gamma(\mathcal{R})$ et $z \in \Gamma(E)$ tel que :

$$\forall p \in P, \quad z(p) \in \text{IntConv}(\mathcal{R}_p, \sigma(p)).$$

Alors il existe $h : P \times [0, 1] \xrightarrow{C^\infty} \mathcal{R}$ telle que :

$$h(\cdot, 0) = h(\cdot, 1) = \sigma \in \Gamma^\infty(\mathcal{R}), \quad \forall p \in P, \quad h(p, \cdot) \in \Omega_{\sigma(p)}^{AR}(\mathcal{R}_p)$$

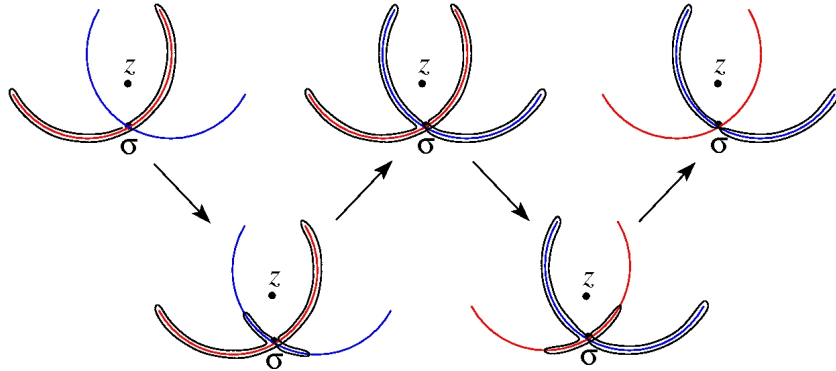
et

$$\forall p \in P, \quad z(p) = \int_0^1 h(p, s) ds.$$

Démonstration.– Elle est longue et technique. Le problème est le suivant : dans le lemme précédent, tout repose sur l'existence de points y_0, \dots, y_n de \mathcal{R} tel que $z \in \text{IntConv}(\{y_0, \dots, y_n\})$. Si l'on rajoute un paramètre, pour pouvoir mimer la démonstration précédente, il faudrait être capable de suivre ces points continûment au dessus de P , autrement dit, s'assurer de l'existence de $(n + 1)$ applications $y_0, \dots, y_n : P \rightarrow \mathbb{R}^n$ telles que

$$\forall p \in P, \quad z(p) \in \text{IntConv}(\{y_0(p), \dots, y_n(p)\}).$$

Ce programme est possible localement. Au dessus d'un ouvert \mathcal{U} on obtient ainsi des applications $h_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \times [0, 1] \xrightarrow{C^\infty} \mathcal{R}$ qu'il faut recoller entre elles. Pour cela on s'appuie sur la contractibilité des chemins en aller-retour. La suite de dessins ci-dessous devrait être éclairante.



Une homotopie parmi les chemins entourant z qui joint $h_{\mathcal{U}}$ (support en rouge) à $h_{\mathcal{V}}$ (support en bleu).

On obtient ainsi une application $h : P \times [0, 1] \xrightarrow{C^\infty} \mathcal{R}$ globalement définie telle que

$$\forall p \in P, \quad z(p) \in \text{IntConv}(h(p, [0, 1]))$$

et

$$h(., 0) = h(., 1) = \sigma \in \Gamma^\infty(\mathcal{R}), \quad \forall p \in P, \quad h(p, .) \in \Omega_{\sigma(p)}^{AR}(\mathcal{R}_p).$$

Il faut ensuite reparamétriser l'application h de façon à s'assurer que

$$\forall p \in P, \quad z(p) = \int_0^1 h(p, s) ds.$$

Pour plus de détails, voir [3] p. 29-31. □

Lemme fondamental (version paramétrique C^∞). – Soient P une variété compacte, $E = P \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\pi} P$ un fibré trivial, $\mathcal{R} \subset E$ une partie telle que

$$\forall p \in P, \quad \mathcal{R}_p := \pi^{-1}(p) \cap \mathcal{R} \text{ est un ouvert de } \mathbb{R}^n$$

Soient encore $\sigma \in \Gamma^\infty(\mathcal{R})$ et $z \in \Gamma^\infty(E)$ tels que :

$$\forall p \in P, \quad z(p) \in \text{IntConv}(\mathcal{R}_p, \sigma(p)).$$

Alors il existe $h : P \times [0, 1] \xrightarrow{C^\infty} \mathcal{R}$ telle que :

$$h(., 0) = h(., 1) = \sigma \in \Gamma(\mathcal{R}), \quad \forall p \in P, \quad h(p, .) \in \Omega_{\sigma(p)}^{AR}(\mathcal{R}_p)$$

et

$$\forall p \in P, \quad z(p) = \int_0^1 h(p, s) ds.$$

Démonstration.– Soit $(\rho_\epsilon : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R})_{\epsilon > 0}$ une suite de fonctions régularisantes. Pour tout $p \in P$, on définit une application C^∞ par

$$h_\epsilon(p, .) : \quad \begin{array}{l} [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ t \longmapsto (h(p, .) * \rho_\epsilon)(t). \end{array}$$

Posons

$$z_\epsilon(p) := \int_0^1 h_\epsilon(p, t) dt$$

et soit $H_\epsilon : P \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ donnée par

$$H_\epsilon(p, t) := h_\epsilon(p, t) + z(p) - z_\epsilon(p).$$

On a

$$\int_0^1 H_\epsilon(p, t) dt = z(p)$$

et pour un choix suffisamment petit de ϵ l'application $t \mapsto H_\epsilon(p, t)$ est à valeur dans \mathcal{R}_p . La compacité de P permet de choisir ϵ indépendamment de $p \in P$. \square

2 C^0 -densité

Proposition 1.— Soit $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert connexe par arcs et I un intervalle de \mathbb{R} . Si $f_0 \in C^\infty(I, \mathbb{R}^n)$ est telle que

$$f'_0(I) \subset \text{IntConv}(\mathcal{R})$$

alors, pour tout $\epsilon > 0$ il existe $F \in C^\infty(I, \mathbb{R}^n)$ telle que

$$F'(I) \subset \mathcal{R} \text{ et } \|F - f_0\|_{C^0} < \epsilon$$

Démonstration.— Soit $\epsilon > 0$ et $f_0 \in C^\infty(I, \mathbb{R}^n)$ telle que $f'_0(I) \subset \text{IntConv}(\mathcal{R})$. D'après le lemme fondamental, version lisse, il existe $h : I \times \mathbb{E}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathcal{R}$ de classe C^∞ telle que

$$\forall t \in I, f'_0(t) = \int_0^1 h(t, u) du.$$

Définissons $F \in C^\infty(I, \mathbb{R}^n)$ par

$$F(t) := f_0(0) + \int_0^t h(s, Ns) ds$$

où N est un entier naturel non nul. D'une part, en dérivant, on obtient:

$$F'(t) = h(t, Nt) \in \mathcal{R}$$

et par conséquent, l'application f est donc solution de la relation différentielle

\mathcal{R} . D'autre part

$$\begin{aligned}
F(t) - f_0(t) &= f_0(0) + \int_0^t h(s, Ns) ds - f_0(t) \\
&= \int_0^t h(s, Ns) ds - (f_0(t) - f_0(0)) \\
&= \int_0^t h(s, Ns) ds - \int_0^t f_0'(s) ds \\
&= \int_0^t h(s, Ns) ds - \int_0^t \left(\int_0^1 h(s, u) du \right) ds \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^t (h(s, Ns) - h(s, u)) ds \right) du \\
&= \frac{1}{N} \int_0^1 \left(\int_0^{Nt} \left(h\left(\frac{s}{N}, s\right) - h\left(\frac{s}{N}, u\right) \right) ds \right) du \\
&= \frac{1}{N} \int_0^1 \left(\int_0^{\lceil Nt \rceil} \left(h\left(\frac{s}{N}, s\right) - h\left(\frac{s}{N}, u\right) \right) ds \right) du \\
&\quad + \frac{1}{N} \int_0^1 \left(\int_{\lceil Nt \rceil}^{Nt} \left(h\left(\frac{s}{N}, s\right) - h\left(\frac{s}{N}, u\right) \right) ds \right) du
\end{aligned}$$

Avec des notations évidentes, posons

$$F(t) - f_0(t) = A + B$$

Nous allons traiter chacun de ces deux termes.

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{N} \int_0^1 \left(\int_0^{[Nt]} \left(h\left(\frac{s}{N}, s\right) - h\left(\frac{s}{N}, u\right) \right) ds \right) du \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{[Nt]-1} \int_0^1 \left(\int_k^{k+1} \left(h\left(\frac{s}{N}, s\right) - h\left(\frac{s}{N}, u\right) \right) ds \right) du \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{[Nt]-1} \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(h\left(\frac{s+k}{N}, s+k\right) - h\left(\frac{s+k}{N}, u\right) \right) ds \right) du \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{[Nt]-1} \int_0^1 \left(\int_0^1 \left(h\left(\frac{s+k}{N}, s\right) - h\left(\frac{s+k}{N}, u\right) \right) ds \right) du \\
&= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{[Nt]-1} \int_0^1 \int_0^1 \left(h\left(\frac{s+k}{N}, s\right) - h\left(\frac{k}{N}, s\right) \right) ds du \\
&\quad - \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{[Nt]-1} \int_0^1 \int_0^1 \left(h\left(\frac{s+k}{N}, u\right) - h\left(\frac{k}{N}, u\right) \right) ds du \\
&\quad + \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{[Nt]-1} \int_0^1 \int_0^1 \left(h\left(\frac{k}{N}, s\right) - h\left(\frac{k}{N}, u\right) \right) ds du \\
&= C + D + E
\end{aligned}$$

Le dernier terme est nul (s et u jouent des rôles symétriques). Les termes C et D vérifient les relations suivantes:

$$\|C\| \leq \frac{1}{2N} \left\| \frac{\partial h}{\partial x} \right\|_{C^0} \quad \text{et} \quad \|D\| \leq \frac{1}{2N} \left\| \frac{\partial h}{\partial x} \right\|_{C^0}.$$

Ainsi:

$$\begin{aligned}
\|A\| &\leq \|C\| + \|D\| \\
&\leq \frac{1}{N} \left\| \frac{\partial h}{\partial x} \right\|_{C^0}
\end{aligned}$$

Quant au terme B , il vérifie

$$\|B\| \leq \frac{2}{N} \|h\|_{C^0}$$

et donc finalement:

$$\|F - f_0\|_{C^0} \leq \frac{2}{N} \left(\|h\|_{C^0} + \left\| \frac{\partial h}{\partial x} \right\|_{C^0} \right).$$

Ce majorant peut être rendu arbitrairement petit en choisissant N suffisamment grand. \square

Remarque.— Même si $f_0(0) = f_0(1)$, l'application F construite par intégration convexe ne vérifie pas en général $F(0) = F(1)$. On peut néanmoins adapter le procédé de l'intégration convexe pour construire des solutions f telles que $f(0) = f(1)$.

Proposition 2.— Soient $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert convexe par arcs et $f_0 \in C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{R}^n)$ telle que

$$f'_0(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \subset \text{IntConv}(\mathcal{R}).$$

Alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe $f \in C^\infty(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{R}^n)$ telle que

$$f'(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \subset \mathcal{R} \text{ et } \|f - f_0\|_{C^0} < \epsilon$$

Démonstration.— Reprenons $F \in C^\infty([0, 1]; \mathbb{R}^n)$ construite grâce à la première proposition et, pour tout $t \in [0, 1]$, définissons f par

$$\begin{aligned} f(t) &:= F(t) - t(F(1) - F(0)) \\ &= f_0(0) + \int_0^t h(s, Ns) ds - t \int_0^1 h(s, Ns) ds \end{aligned}$$

En dérivant, on obtient:

$$\forall t \in [0, 1] \text{ , } f'(t) = F'(t) - (F(1) - F(0)).$$

Désignons par δ le réel strictement positif défini par:

$$\delta = \text{dist}(F'[0, 1], \mathcal{R}^c)$$

et choisissons N tel que

$$\|F(1) - F(0)\| < \frac{\delta}{2}$$

On a alors

$$\begin{aligned} \|f' - F'\|_{C^0} &= \|F(1) - F(0)\| \\ &= \|F(1) - f_0(0)\| \\ &= \|F(1) - f_0(1)\| \\ &< \frac{\delta}{2} \end{aligned}$$

Soit $x \in \mathcal{R}$. On a:

$$d(x, f'[0, 1]) \geq |d(x, F'[0, 1]) - d(f'[0, 1], F'[0, 1])|$$

Or $d(x, f'[0, 1]) \geq \delta$ et $d(f'[0, 1], F'[0, 1]) \leq \frac{\delta}{2}$ donc

$$d(x, f') \geq \frac{\delta}{2}.$$

On en déduit $d(\mathcal{R}^c, f'[0, 1]) > 0$, c'est-à-dire

$$f'(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \subset \mathcal{R}.$$

L'application f est donc bien solution de la relation différentielle. En outre, de l'égalité

$$f(t) = F(t) - t(F(1) - F(0))$$

on déduit:

$$\|f - f_0\|_{C^0} \leq \|F - f_0\|_{C^0} + \|F(1) - F_0(1)\| \leq 2\|F - f_0\|_{C^0}.$$

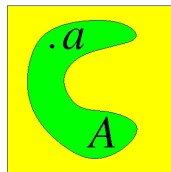
□

Remarque 1.— Dans les deux propositions précédentes, les paramètres libres de la construction de la solution de la relation différentielle sont la famille de lacets $(h(p, \cdot))_{p \in P}$ et le choix du nombre d'oscillations N .

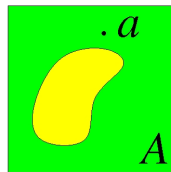
Remarque 2.— Evidemment, les propositions 1 et 2 ont des analogues “à paramètres”.

3 Un h -principe 1-dimensionnel

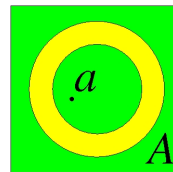
Définition.— Une partie $A \subset \mathbb{R}^n$ est *ample* si $A = \emptyset$ ou si pour tout $a \in A$ l'intérieur de l'enveloppe convexe de la composante connexe par arcs de A contenant a est \mathbb{R}^n i. e. : $IntConv(A, a) = \mathbb{R}^n$.



A est non ample



A est ample



A est non ample.

Exemple.– Un sous-espace vectoriel F de \mathbb{R}^n est ample si et seulement si $\text{Codim } F \geq 2$.

Définition.– Si $E = P \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\pi} P$ est un fibré, on dit que $\mathcal{R} \subset E$ est *ample* si, pour tout $p \in P$, $\mathcal{R}_p := \pi^{-1}(p) \cap \mathcal{R}$ est ample dans \mathbb{R}^n .

Remarque.– Si $\mathcal{R} \subset E$ est ample, alors, pour tout $p \in P$, la condition $z(p) \in \text{Conv}(\mathcal{R}_p, \sigma(p))$ est automatiquement vérifiée.

Proposition 3.– Soient $E = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ un fibré trivial et $\mathcal{R} \subset E$ une relation différentielle ouverte et ample. Alors pour tout $\sigma \in \Gamma(\mathcal{R})$, il existe $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^n$ telle que :

- i) $f' \in \Gamma(\mathcal{R})$, autrement dit $f \in \text{Sol}(\mathcal{R})$,
- ii) f' est homotope à σ dans $\Gamma(\mathcal{R})$.

Remarque.– L'inclusion naturelle

$$\pi_0(\text{Sol}(\mathcal{R})) \rightarrow \pi_0(\Gamma(\mathcal{R}))$$

est donc une surjection.

Démonstration.– Soit $f_0 : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application C^1 quelconque. Puisque \mathcal{R} est ample, on a

$$\forall t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}, \quad f'_0(t) \in \mathbb{R}^n = \text{IntConv}(\mathcal{R}_t, \sigma(t)).$$

D'après la démonstration de la proposition 2, l'application $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par

$$\forall t \in [0, 1], \quad f(t) := f_0(0) + \int_0^t h(s, Ns) ds - t \int_0^1 h(s, Ns) ds$$

vérifie

$$\forall t \in [0, 1], \quad f'(t) \in \mathcal{R}_t$$

ce qui montre i). Pour tout $u \in [0, 1]$, définissons $f_u : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ par

$$\forall t \in [0, 1], \quad f_u(t) := f_0(0) + \int_0^t h_u(s, Ns) ds - u.t \int_0^1 h(s, Ns) ds$$

où $h_u : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times [0, 1] \rightarrow \mathcal{R}$ est la rétraction naturelle

$$h_u(t, s) = \begin{cases} h(t, s) & \text{si } s \in [0, \frac{u}{2}] \cup [1 - \frac{u}{2}, 1] \\ h(t, u) & \text{si } s \in [\frac{u}{2}, 1 - \frac{u}{2}]. \end{cases}$$

Bien sûr $h_1(t, s) = h(t, s)$ et $h_0(t, s) = \sigma(t)$. Notons que f_u ne passe pas au quotient $\mathbb{R}/\mathbb{Z} = [0, 1]/\partial[0, 1]$. En revanche

$$f'_u(t) = h_u(t, Nt) - u \int_0^1 h(s, Ns) ds$$

induit une application de \mathbb{R}/\mathbb{Z} dans \mathbb{R}^n car

$$f'_u(0) = h_u(0, 0) - \int_0^1 h_u(s, Ns) ds = \sigma(0) - u \int_0^1 h(s, Ns) ds$$

$$f'_u(1) = h_u(1, N) - \int_0^1 h_u(s, Ns) ds = \sigma(1) - u \int_0^1 h(s, Ns) ds$$

et donc $f'_u(0) = f'_u(1)$ puisque $\sigma(0) = \sigma(1)$. Ceci fournit une homotopie $\sigma_u := f'_u$ joignant $f' = f'_1$ à σ . D'après la proposition 1, la quantité

$$\left\| \int_0^1 h(s, Ns) ds \right\| = \|F(1) - f_0(1)\|$$

est un $O\left(\frac{1}{N}\right)$ et peut donc être rendu arbitrairement petite. Ainsi pour tout $u \in [0, 1]$, tout $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, le point $\sigma_u(t)$ est arbitrairement proche de $h_u(t, Nt) \in \mathcal{R}$. Puisque \mathcal{R} est ouverte, il existe N tel que pour tout $u \in [0, 1]$, on ait $\sigma_u \in \Gamma(\mathcal{R})$. Le point ii) est donc démontré. \square

Une version à paramètre de ce que l'on vient de faire montre le théorème suivant :

Théorème (*h*-principe 1-dimensionnel).— Soient $E = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}^n \xrightarrow{\pi} \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ un fibré trivial et $\mathcal{R} \subset E$ une relation différentielle ouverte et ample, alors l'application

$$J : \text{Sol}(\mathcal{R}) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{R})$$

est une équivalence d'homotopie faible.

Observation.— Evidemment, dans ce théorème, on peut remplacer \mathbb{R}/\mathbb{Z} par un intervalle.

4 Deux applications de l'intégration convexe 1-dimensionnelle

4.1 Le théorème de Whitney-Graustein

Théorème de Whitney-Graustein (1937). — On a : $\pi_0(I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2)) \simeq \mathbb{Z}$, l'identification étant donnée par l'indice.

Démonstration.— Il suffit d’appliquer le théorème du h -principe 1-dimensionnel avec $n = 2$ et $\mathcal{R} = \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times (\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ qui est ouverte et ample. On a alors

$$\text{Sol}(\mathcal{R}) = I(\mathbb{S}^1, \mathbb{R}^2), \quad \Gamma(\mathcal{R}) = C^0(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$$

et

$$J : \text{Sol}(\mathcal{R}) \longrightarrow \Gamma(\mathcal{R}) \\ \gamma \longmapsto \gamma'$$

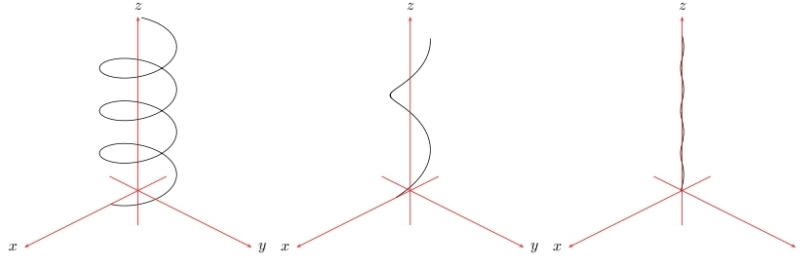
induit une bijection au niveau du π_0 . Or, les composantes de $C^0(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ sont en bijection avec \mathbb{Z} , la bijection étant donnée par le nombre de tours. Autrement dit, J s’identifie à Ind . \square

4.2 Un théorème de Ghomi

Théorème (Ghomi 2007).— Soient $f_0 \in I(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{R}^3)$ une courbe de courbure k_0 et c un nombre réel tel que $c > \max k_0$. Alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe $f_1 \in I(\mathbb{R}/\mathbb{Z}, \mathbb{R}^3)$ de courbure constante c et telle que

$$\|f_1 - f_0\|_{C^1} = \|f_1 - f_0\|_{C^0} + \|f_1' - f_0'\|_{C^0} \leq \epsilon.$$

Un exemple.— Comment approcher C^1 une droite par une courbe de courbure aussi grande que l’on souhaite ? La réponse tient en un dessin :



Un petit commentaire toutefois (tiré de [2]) : Paramétrons la droite comme un segment vertical dans l’espace,

$$f_0(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$$

avec $t \in [0, 1]$. Le théorème affirme l'existence d'une courbe à courbure constante c qui est C^1 -proche de f_0 . On peut commencer par approximer le segment par une hélice, par exemple :

$$f_1(t) = \begin{pmatrix} \epsilon \cos \alpha t \\ \epsilon \sin \alpha t \\ t \end{pmatrix}$$

où $\alpha > 0$ et $\epsilon > 0$. La C^0 proximité de f_1 à f_0 est contrôlée par ϵ , quant à la courbure, elle est constante et peut être rendue aussi grande qu'on le souhaite en réduisant α . Cependant, lorsque le nombre α devient élevé, la dérivée s'éloigne beaucoup de celle de la fonction d'origine, l'hélice n'est donc pas C^1 -proche de f_0 . Pour corriger ce point, il faut réduire les variations horizontales de la fonction. Notons $k > 0$ et τ deux réels et considérons

$$f_{k,\tau}(t) = \begin{pmatrix} \frac{k}{k^2 + \tau^2} \cos \sqrt{k^2 + \tau^2} t \\ \frac{k}{k^2 + \tau^2} \sin \sqrt{k^2 + \tau^2} t \\ \frac{\tau}{\sqrt{k^2 + \tau^2}} t \end{pmatrix}.$$

Cette application est une hélice de courbure k et de torsion τ (constantes). On voit alors immédiatement qu'il faut garder une torsion très supérieure à la courbure pour assurer une dérivée quasi-verticale.

Esquisse de démonstration.— Celle-ci est un bon exemple d'utilisation des idées de l'intégration convexe 1-dimensionnelle bien que ce ne soit pas une application du théorème du h -principe 1-dimensionnel. En voici les principales étapes :

1) Se ramener au cas où f_0 est paramétrée par la longueur d'arc. La courbure est alors la norme de la dérivée seconde, autrement dit la vitesse de $T_0 := f'_0 : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{S}^2$.

2) Trouver $T_1 : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{S}^2$, de vitesse constante en norme (pour avoir une courbure constante) qui soit C^0 -proche de T_0 (pour s'assurer de la condition $\|f'_1 - f'_0\|_{C^0}$ petit) et proche en moyenne de T_0 (pour la condition $\|f_1 - f_0\|_{C^0}$ petit).

3) Techniquement, il faut faire effectuer à T_1 des petites boucles à vitesse constante dans un voisinage de $T_0(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ dans \mathbb{S}^2 et de telle façon que

la moyenne par boucle soit proche de celle de T_0 sur l'intervalle "correspondant."

Pour plus de détails, on pourra consulter [1] ou aller télécharger sur ma page ouaib le rapport de stage de Mickaël Kourganov [2]. \square

References

- [1] M. GHOMI, *h-principles for curves and knots of constant curvature*, Geom. Dedicata 127, 19-35, 2007. <http://tinyurl.com/399y78f>
- [2] M. KOURGANOV *h-principe pour les courbes courbure constante*, rapport de stage ENS-Lyon, <http://math.univ-lyon1.fr/borrelli/Jeunes.html>
- [3] D. SPRING, *Convex Integration Theory*, Monographs in Mathematics, Vol. 92, Birkhäuser Verlag, 1998.