08/10/2018

G.T. 3ième pb de Hilbert
Théorème de Sydler

Théorème [Sydler 1965 ; Jessen 1968]
Deux polyèdres (non dégénérés) de l'espace euclidien sont équivalents par décomposition si, et seulement si, ils ont même volume et même invariant de Dehn.

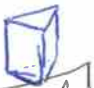
Cadre : $\mathbb{R}^3$ espace affine euclidien

- polyèdre : réunion finie de simplexes dans $\mathbb{R}^3$
- simplexe de dimension d : $\underbrace{[s_0, s_1, \dots, s_d]}_{\text{points de } \mathbb{R}^3 \text{ t.q. } \{\vec{s_0s_1}, \vec{s_0s_2}, \dots, \vec{s_0s_d}\} \text{ soit libre}} = \{ \underbrace{\sum_{i=0}^{d} c_i s_i}_{\text{barycentre}} ; c_i \geq 0, \sum_{i=0}^{d} c_i = 1 \}$ = enveloppe convexe de $(d+1)$ points $s_0, s_1, \dots, s_d$
(ou d-simplexe)

ex : 0-simplexe = point
1-simplexe = intervalle
2-simplexe = triangle
3-simplexe = tétraèdre

Def : . Un polyèdre est dit dégénéré si tous ses simplexes sont de dimension < 3.

. Un polyèdre P est dit décomposé par les polyèdres $P_1, \dots, P_n$ si $\begin{cases} P = P_1 \cup P_2 \cup \dots \cup P_n \\ i \neq j \Rightarrow P_i \cap P_j \text{ dégénéré} \end{cases}$



Exemple : Un prisme peut se décomposer en un pavé (droit)

. Deux polyèdres P et P' sont équivalents par décomposition s'ils admettent des décompositions $P = P_1 \cup \dots \cup P_n$ et $P' = P'_1 \cup \dots \cup P'_n$ t.q. $\forall i$ P_i et P'_i sont isométriques (i.e. $\exists g_i$ déplacement de $\mathbb{R}^3$ t.q. $P'_i = g_i(P_i)$) ;

. Le volume d'un 3-simplexe $[s_0, s_1, s_2, s_3]$ est égal à $\frac{1}{3!} |\det(\vec{s_0s_1}, \vec{s_0s_2}, \vec{s_0s_3})|$;

Les volumes des d-simplexes pour $d < 3$ sont nuls. On montre que la notion de volume s'étend aux polyèdres et vérifient les conditions suivantes

a $V(P \cap P') + V(P \cup P') = V(P) + V(P')$

b P dégénéré $\Rightarrow V(P) = 0$

c si g est une isométrie de $\mathbb{R}^3$ alors $V(g(P)) = V(P)$

cf. exposé 1

Prisme : solide géométrique délimité par deux polygones (bases) images l'un de l'autre par une translation ; les bases sont reliées entre elles par des parallélogrammes.

Notation :
$\mathcal{P}$ groupe abélien
. engendré par les polyèdres P
. et avec relations
- $[P] = 0$ si P dégénéré
- $[P \cup P'] = [P] + [P']$ si $[P \cap P'] = 0$
- $[g(P)] = [P]$ si g déplacement

Def Un invariant de découpage I ~~est volume~~ application $I : \{\text{Polyèdres de } \mathbb{R}^3\} \longrightarrow A$ qui vérifie les 3 mêmes conditions a, b, c, les calculs se faisant dans un groupe abélien A (pour V, $A = (\mathbb{R}^+, +)$). Cela revient à demander que I induise un morphisme de groupes

$$\boxed{I : \mathcal{P} \to A}$$

exemple $I = V$

Définition (Invariant de Dehn)
Si P est un polyèdre de $\mathbb{R}^3$ on pose $D(P) = \sum_{a \text{ arête de } P} |a| \otimes \delta_a \in \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} (\mathbb{R}/\pi)$

où $|a|$ est la longueur de l'arête a et δ_a son angle dièdre :

si $\vec{n_1}$ et $\vec{n_2}$ sont les vecteurs normaux unitaires des deux faces adjacentes à l'arête a et pointant vers l'extérieur du polyèdre alors $\delta_a = \arccos(-\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}) \in \mathbb{R}/\pi$

vue le long de l'arête

III Démonstration du th. de Sydler :

Il faut démontrer $V(P) = V(P')$ et $D(P) = D(P') \Rightarrow P \sim P'$

On admet que $[P] = [P'] \Rightarrow P \sim P'$ (Sydler 1943 ; généralisé en toute dimension par Zylev en 1968)

ce qui nous ramène à démontrer l'injectivité du morphisme $\mathcal{S} \xrightarrow{(V,P)} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}/\pi$.

$P \longmapsto (V(P), D(P))$

1ère étape « réduction du pb à un e.v »

en se ramenant aux cubes

On note Z le sous-groupe de $\mathcal{S}$ engendré par les prismes ; $D(Z) = 0$

donc D induit un morphisme de groupes $\bar{D} : \mathcal{S}/Z \longrightarrow \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}/\pi$.

Puisque $V_{|Z}$ ~~$(\mathcal{S})$ est~~ injective (décomposition d'un prisme en cube de même volume)

il reste donc à démontrer que $\bar{D}$ est injective.

Cette réduction du pb a un second intérêt :

Lemme A : L'action de $\mathbb{R}^{\times}$ sur $\mathcal{S}$ via $t.[P] = \begin{cases} [tP] & \text{si } t > 0 \\ -[|t|P] & \text{si } t < 0 \end{cases}$

définit une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel sur $\mathcal{S}/Z$.

Démonstration :

- Z stable par l'action donc $\mathbb{R}$ agit sur $\mathcal{S}/Z$.
- $\forall t \in]0,1[$ on a $[P] = t.[P] + (1-t).[P]$ dans $\mathcal{S}/Z$

il suffit de le vérifier sur les tétraèdres : cf. découpage / feuille jointe.

- cela permet de démontrer la distributivité

$$(t_1 + t_2).[P] = t_1.[P] + t_2[P]$$

- la distributivité $t.([P]+[Q]) = t.[P] + t[Q]$ est immédiate. □

Fin de l'exposé 1

2ième étape : $a, b, c \in]0,1[$. $X_{a,b,c} = T(a,b) + T(ab,c)$

« Le cocycle T... est un cobord »

et $Y_{a,b,c} = T(a,c) + T(ac,b)$

ont même volume et même invariant de Dehn $\big(\mathrm{cotan}(\alpha)\otimes\alpha + \mathrm{cotan}(\beta)\otimes\beta + \mathrm{cotan}(\gamma)\otimes\gamma - \mathrm{cotan}(\alpha*\beta*\gamma)\otimes(\alpha*\beta*\gamma)\big)$

Un argument géométrique (cf Jessen pp 248-249) permet de démontrer mieux : $X_{a,b,c} \sim Y_{a,b,c}$.

IV

Cela permet de "voir" que l'application $]0,1]^{\times 2} \longrightarrow \mathcal{S}/\mathbb{Z}$ (avec $[T(a,1)]=0$, $[T(1,b)]=0$)

$(a,b) \longmapsto [T(a,b)]$

satisfait une relation de 2-cocycle pour le monoïde multiplicatif $]0,1]$:

$$\boxed{[T(a,b)] + [T(ab,c)] = [T(a,c)] + [T(ac,b)]} \quad \text{(égalité dans } \mathcal{S})$$

On en déduit une "extension" de monoïdes

$$0 \longrightarrow \mathcal{S}/\mathbb{Z} \longrightarrow W_0 \longrightarrow]0,1] \longrightarrow 1 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} W_0 =]0,1] \times \mathcal{S}/\mathbb{Z} \\ (a,P).(b,Q) = (ab, P+Q-T(a,b)) \end{cases}$$

Le monoïde W_0 est simplifiable $((a,P).(b,Q) = (a,P).(c,R) \Rightarrow b=c$ et $Q=R)$ et engendre un groupe (groupe des fractions) W (donc $W_0 \subset W$) qui s'insère dans une suite exacte :

$$0 \longrightarrow \mathcal{S}/\mathbb{Z} \longrightarrow W \longrightarrow \mathbb{R}^{*+} \longrightarrow 1$$

$$\left(\frac{a}{b} = 1 \Rightarrow \frac{(a,P)}{(b,Q)} = \frac{(a,P)}{(a,Q)} = \frac{(1,P-Q)}{(1,0)}\right)$$

car $(a,Q).(1,P-Q) = (a, Q+(P-Q)+\underbrace{T(a,1)}_{0})$

$$\frac{(a,P)}{(b,Q)} \longmapsto \frac{a}{b}$$

$$P \longmapsto \frac{(1,P)}{(1,0)}$$

Puisque $\mathcal{S}/\mathbb{Z}$ est un $\mathbb{R}$-e.v, c'est un groupe additif <u>divisible</u>

et, donc, cette <u>suite exacte</u> est <u>scindée</u> :

Il existe une section $s : \mathbb{R}^{*+} \longrightarrow W$.

<u>Pour</u> $a \in]0,1]$ on pose $s(a) = (a, U(a))$ ce qui définit une application $\boxed{U :]0,1] \longrightarrow \mathcal{S}/\mathbb{Z}}$.

<u>Lemme B</u> : $\boxed{T(a,b) = U(a) + U(b) - U(ab)}$

(rq : cela dit que le 2-cocycle $T(-,-)$ est en fait un cobord !)

<u>Démonstration</u> :

$(ab, U(ab)) = s(ab) = s(a)s(b) = (a, U(a)).(b, U(b)) = (ab, U(a)+U(b)-T(a,b))$. □

Π

D(ABCD) = 6 termes
D(ABCI)+D(ABDI) = 12 termes
- 2 avec |AI| ⊗ — donnent 0
- 2 — |IB| ⊗ — ———
- 2 termes |CI| et |ID| s'additionnent
- 2 termes avec |AB| s'additionnent

Proposition : D est un invariant de découpage.

Démonstration : il suffit de vérifier l'additivité ⓐ lorsque P et P' sont des tétraèdres ~~avec une face commune~~ qui décomposent un tétraèdre i.e. $D(P) = D(P_1) + D(P_2)$ lorsque P est un tétraèdre décomposé par deux tétraèdres P_1 et P_2 d'intersection vide. (cf. feuille jointe).

Remarque D est un invariant de poids 1 car $D(\underset{\text{homothétique de P par rapport t}}{t \cdot P}) = (|t| \otimes) D(P)$ (la longueur des arêtes est multipliée par |t|)

Exemples.

- C un cube unité : 12 arêtes et angles dièdres droits

d'où $D(C) = 12 \otimes_{\mathbb{Z}} \frac{\pi}{2} = 6 \otimes_{\mathbb{Z}} \pi = 0 \in \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}/\pi$ (idem pour les pavés)

- T tétraèdre régulier d'arête 1 : 6 arêtes et angles dièdres $\theta = \arccos(1/3)$

d'où $D(T) = 6 \otimes_{\mathbb{Z}} \theta \neq 0 \in \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}/\pi$

$\frac{\theta}{\pi}$ est irrationnel $\left\{ \begin{array}{l} \text{utiliser } \cos(q\theta) = \overset{\text{polynôme de Chebyshev}}{T_q}(\theta) \\ \text{donc } \theta = \frac{p}{q}\pi \Rightarrow \pm 1 = T_q(\cos\theta) \end{array} \right.$

$= T_q(1/3)$

$= 2^{q-1}(1/3) + \dots$

absurde.

Ainsi T n'est pas équivalent par découpage au cube de même volume.

- Si P est un prisme alors $D(P) = 0$ (en se ramenant aux pavés)
- $T(a,b)$ = tétraèdre ABCD dont les arêtes AB de longueur $\sqrt{\frac{1}{a} - 1} = \operatorname{cotan}(\alpha)$,

$a \in]0,1[\quad a = \sin^2(\alpha)$ avec $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$

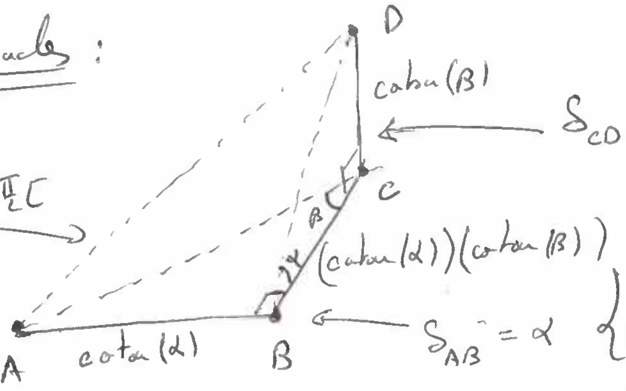
$b \in]0,1[\quad b = \sin^2(\beta)$ — $\beta \in]0, \frac{\pi}{2}[$

CD de longueur $\sqrt{\frac{1}{b} - 1} = \operatorname{cotan}(\beta)$,

$\left((\operatorname{cotan}(\alpha))^2 = \frac{\cos^2(\alpha)}{\sin^2(\alpha)} = \frac{1 - \sin^2(\alpha)}{\sin^2(\alpha)} = \frac{1}{a} - 1 \right)$

et BC de longueur AB×CD

sont orthogonales :



$\delta_{CD} = \beta$ { triangle rectangle ABC

Exercice : $\delta_{AD} = \frac{\pi}{2} - \alpha * \beta \in]0, \frac{\pi}{2}[$ où $\sin^2(\alpha * \beta) = ab$

$\delta_{AB} = \alpha$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{triangle rectangle BCD} \\ \operatorname{cotan}(\delta_{AB}) = \frac{\text{adjacent}}{\text{opposé}} = \frac{BC}{CD} = \operatorname{cotan}(\alpha) \end{array} \right.$

Les invariants de T(a,b) sont : $\left\{ \begin{array}{l} N(T(a,b)) = v(a) + v(b) - v(ab) \text{ avec } v(x) = \frac{x-1}{6x} \\ D(T(a,b)) = \operatorname{cotan}(\alpha) \otimes \alpha + \operatorname{cotan}(\beta) \otimes \beta - \operatorname{cotan}(\alpha * \beta) \otimes \alpha * \beta \end{array} \right.$

δ_{AD}

$0 \quad \frac{\pi}{2} ~~\alpha*\beta~~$

$= + \operatorname{cotan}(\delta_{AB}) \otimes \delta_{AB}$

V

$3^{\text{ième}}$ étape : "~~Le~~ cocycle G (bongartzique)"

$$G : \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}^{+*} \longrightarrow \mathcal{P}/\mathbb{Z}$$

$$(a, b) \longmapsto a\,U\left(\tfrac{a}{a+b}\right) + b\,U\left(\tfrac{b}{a+b}\right) \quad \text{(formule bongartzique)}$$

Lemme C : G vérifie la relation de 2-cocycle (additif)

$$\boxed{G(a,b) + G(a+b,c) = G(a,c) + G(a+c,b)}$$

Démonstration : cela revient à une identité en T que l'on démontre géométriquement :

~~$\left(a\,U\left(\tfrac{a}{a+b}\right) + b\,U\left(\tfrac{b}{a+b}\right) + (a+b)\,U\left(\tfrac{a+b}{a+b+c}, c\right) + c\,U\left(\tfrac{c}{a+b+c}\right) =\right.$ idem en échangeant b et c~~)

- Si on démontre (*) (cf. feuille jointe) alors le lemme B donne

$$a\left(U\left(\tfrac{a+b}{a+b+c}\right) + U\left(\tfrac{a}{a+b}\right) - U\left(\tfrac{a}{a+b+c}\right)\right) + b\left(U\left(\tfrac{a+b}{a+b+c}\right) + U\left(\tfrac{b}{b+c}\right) - U\left(\tfrac{b}{a+b+c}\right)\right)$$

$$=$$

$$a\left(U\left(\tfrac{a+c}{a+b+c}\right) + U\left(\tfrac{c}{a+c}\right) - U\left(\tfrac{c}{a+b+c}\right)\right) + c\left(U\left(\tfrac{a+c}{a+b+c}\right) + U\left(\tfrac{c}{a+c}\right) - U\left(\tfrac{c}{a+b+c}\right)\right)$$

que l'on peut réarranger en

$$\left[a\,U\left(\tfrac{a}{a+b}\right) + b\,U\left(\tfrac{b}{a+b}\right)\right] + \left[(a+b)\,U\left(\tfrac{a+b}{a+b+c}\right) + c\,U\left(\tfrac{c}{a+b+c}\right)\right]$$

$$=$$

$$\left[a\,U\left(\tfrac{a}{a+c}\right) + c\,U\left(\tfrac{c}{a+c}\right)\right] + \left[(a+c)\,U\left(\tfrac{a+c}{a+b+c}\right) + b\,U\left(\tfrac{b}{a+b+c}\right)\right] \quad \text{cqfd}$$

- reste à démontrer (*) géométriquement (cf. découpage 2)

Avec $OA^2 = bc$, $OB^2 = ca$ et $OC^2 = ab$ on trouve $H = \text{bar}\left\{\left(A, \tfrac{a}{a+b}\right), \left(B, \tfrac{b}{a+b}\right)\right\}$

Il vient $BH^2 = a^2 \boxed{\tfrac{c}{a+b}}$, $OH^2 = \dfrac{abc}{a+b} = a^2 \boxed{\tfrac{bc}{a(a+b)}}$ et $OC^2 = ab = a^2 \cdot \boxed{\tfrac{b}{a}}$

d'où $OCBH = a\,T\left(\tfrac{a+b}{a+b+c}, \tfrac{a}{a+b}\right)$ car $\dfrac{1}{\frac{c}{a+b}+1} = \dfrac{a+b}{a+b+c}$, $\dfrac{1}{\frac{b}{a}+1} = \dfrac{a}{a+b}$ et $\left(\tfrac{1}{a}\cdot BH\right) \times \left(\tfrac{1}{a}\cdot OC\right) = \tfrac{1}{a}\cdot(OH)$.

De même $OCAH = b\,T\left(\tfrac{a+b}{a+b+c}, \tfrac{b}{b+a}\right)$ (échange de a et b, A et B)

D'où : $OABC = a\,T\left(\tfrac{a+b}{a+b+c}\right) + b\,T\left(\tfrac{a+b}{a+b+c}, \tfrac{b}{a+b}\right)$.

Enfin, en échangeant B et C : $OABC = a\,T\left(\tfrac{a+c}{a+b+c}, \tfrac{a}{a+c}\right) + c\,T\left(\tfrac{a+c}{a+b+c}, \tfrac{c}{a+c}\right)$.

$\square$

VI

Le 2-cocycle G permet de définir un monoïde additif commutatif $(G(a,b)=G(b,a))$ sur $\mathbb{R}_*^+ \times \mathcal{B}/\mathbb{Z}$: $(a,P)+(b,Q)=(a+b, P+Q-G(a,b))$

Cette structure s'étend sur $A=\mathbb{R}\times\mathcal{B}/\mathbb{Z}$ (groupe engendré par le monoïde)

Puisque $G(\lambda a,\lambda b)=\lambda G(a,b)$ pour $\lambda>0$ ~~et~~ que $\mathcal{B}/\mathbb{Z}$ est un $\mathbb{R}$-e.v.

on ~~obtient même unes~~ peut définir un produit sur A par

$$(a,P).(b,Q)=(ab, bP+aQ)$$

qui est distributif par rapport à +. Avec ces structures A est un anneau et $I=\{(0,P) ; P\in\mathcal{B}/\mathbb{Z}\}$ est un idéal de carré nul et $A/I \simeq \mathbb{R}$.

L'extension $0 \longrightarrow I \longrightarrow A \xrightarrow{p} \underset{\mathbb{R}}{\underset{\wr\wr}{A/I}} \longrightarrow 0$ admet

une section d'anneaux (cf. Bourbaki, Algèbre commutative IX)

$$\sigma:\mathbb{R}\longrightarrow A$$

Pour $a\in\mathbb{R}^{*+}$ on pose $\sigma(a)=(a, aH(a))$ ce qui définit

$$\boxed{H:\mathbb{R}^{*+}\longrightarrow\mathcal{B}/\mathbb{Z}}$$ vérifiant :

$$\boxed{G(a,b)=aH(a)+bH(b)-(a+b)H(a+b)}$$ (car σ additive)

$$\boxed{H(ab)=H(a)+H(b)}$$ (car σ multiplicative).

4ième et dernière étape : "construction d'une section à $\bar{D}:\mathcal{B}/\mathbb{Z}\to \mathbb{R}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}/\pi$"

On définit $\varphi:\mathbb{R}/\pi\longrightarrow\mathcal{B}/\mathbb{Z}$ par $\varphi(\alpha)=\tan(\alpha)\left[\mho(\sin^2(\alpha))-H(\sin^2(\alpha))\right]$.
$=0$ si $\alpha\equiv 0 \bmod \pi/2$

~~Et on démontre que $\mathcal{B}/\mathbb{Z}$ est engendré par les $[T(a,b)]$ comme $\mathbb{R}$-e.v., prouvant~~

~~$(\varphi\circ\bar{D})(T(a,b))$~~ = morphisme de groupes additifs* que l'on étend par $\mathbb{R}$-linéarité $\Phi:\mathbb{R}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathbb{R}/\pi\longrightarrow\mathcal{B}/\mathbb{Z}$ en utilisant la structure de $\mathbb{R}$-e.v sur $\mathcal{B}/\mathbb{Z}$.

On a : $\Phi\circ\bar{D}(T(a,b))=\Phi\left(\cot(\alpha)\otimes\alpha+\cot(\beta)\otimes\beta-\cot(\alpha*\beta)\otimes\overset{\pi/2-}{(\alpha*\beta)}\right)$ (cf sangle)

$=\cot(\alpha)\varphi(\alpha)+\cot(\beta)\varphi(\beta)-\cot(\alpha*\beta)\varphi(~~\tfrac{\pi}{2}-~~\alpha*\beta)$

$\sin^2\alpha=a$
$\sin^2\beta=b$
$\sin^2(\alpha*\beta)=ab$ $\longrightarrow$ $=(\mho(a)-H(a))+(\mho(b)-H(b))-(1-\frac{1}{ab})(\mho(1-ab)-H(1-ab))$

$=\mho(a)+\mho(b)-H(ab)+\frac{1}{ab}\left[(1-ab)\mho(1-ab)-(1-ab)H(1-ab)\right]$

VII $4^{\text{ième}}$ et dernière étape : construction d'une section à $\overline{D} : \mathcal{P}/\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}/\pi$

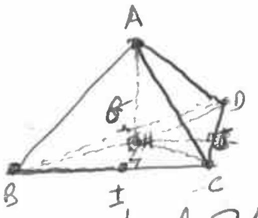
- $\Phi : \mathbb{R} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}/\pi \longrightarrow \mathcal{P}/\mathbb{Z}$ tq. $\Phi \circ \overline{D} = id_{\mathcal{P}/\mathbb{Z}} \Longleftrightarrow \varphi : ~~\mathbb{R}/\pi~~ \longrightarrow \mathcal{P}/\mathbb{Z}$ (t.q. $\Phi(1 \otimes \alpha) = \varphi(\alpha)$)

avec (ii) $\varphi(\alpha+\beta) = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta)$, $\varphi(\pi) = 0$

(i) $\cotan(\alpha)\varphi(\alpha) + \cotan(\beta)\varphi(\beta) - \cotan(\alpha*\beta)\varphi(\frac{\pi}{2} - \alpha*\beta) \overset{(i)}{=} T(a,b)$

car un tel φ s'étend par $\mathbb{R}$-linéarité en Φ qui vérifiera $(\Phi \circ \overline{D})(T(a,b)) = T(a,b)$ et, par $\mathbb{R}$-linéarité, $\Phi \circ \overline{D} = id_{\mathcal{P}/\mathbb{Z}}$ puisque $\mathcal{P}/\mathbb{Z}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel engendré par les $T(a,b)$:

$\mathcal{P}$ est un groupe abélien engendré par les tétraèdres et chaque tétraèdre peut se décomposer en six tétraèdres homothétiques à des $T(a,b)$:



(il y a des différences si H est extérieur à BCD)

$T = ABIH + ACIH + ACJH + ADJH + ADGH + ABGH$

où chaque $AXYH$ est égal à un $\lambda T(a,b)$

Ainsi le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{P}/\mathbb{Z}$ est engendré par les classes des $T(a,b)$.

- on définit $h :]0,1[\longrightarrow \mathcal{P}/\mathbb{Z}$ par $h(a) = U(a) - H(a)$

Lemme D (ii) $T(a,b) = h(a) + h(b) - h(ab)$ et

(iii) si $a+b=1$ alors $a\,h(a) + b\,h(b) = 0$.

- on définit $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{P}/\mathbb{Z}$ par $\varphi(\alpha) = \begin{cases} \tan(\alpha) \cdot h(\sin^2(\alpha)) & \text{si } \alpha \not\equiv 0 \; [\frac{\pi}{2}] \\ 0 & \text{si } \alpha \equiv 0 \; [\frac{\pi}{2}] \end{cases}$

Lemme E : $\left.\begin{array}{l} \alpha+\beta+\gamma = \pi \\ \alpha,\beta,\gamma \in [0,\frac{\pi}{2}] \end{array}\right\} \Longrightarrow \varphi(\alpha) + \varphi(\beta) + \varphi(\gamma) = 0$

i - Pour $T(a,b)$ on a $\sin^2(\alpha) = a$, $\sin^2(\beta) = b$ et $\sin^2(\alpha*\beta) = ab$, d'où

$$\cotan(\alpha)\varphi(\alpha) + \cotan(\beta)\varphi(\beta) - \cotan(\alpha*\beta)\varphi(\tfrac{\pi}{2} - \alpha*\beta)) = h(a) + h(b) - (1 - \tfrac{1}{ab})h(1-ab)$$
$$= h(a) + h(b) - h(ab) \text{ par (iii)}$$
$$= T(a,b) \text{ par (ii)}$$

ii - Pour vérifier $\varphi(\alpha+\beta) \overset{?}{=} \varphi(\alpha) + \varphi(\beta)$ $(\forall \alpha,\beta)$ il suffit de vérifier $\left.\begin{array}{l} \alpha+\beta+\gamma = \pi \\ \alpha,\beta,\gamma \in [0,\frac{\pi}{2}] \end{array}\right\} \Longrightarrow \varphi(\alpha) + \varphi(\beta) + \varphi(\gamma) \underset{0}{=}$ (lemme E)

car
- si $\alpha,\beta \in [0,\frac{\pi}{2}]$ et $\alpha+\beta \in [\frac{\pi}{2},\pi]$ alors
$$\varphi(\alpha) + \varphi(\beta) \underset{\overset{\uparrow}{\gamma = \pi - (\alpha+\beta) \in [0,\pi/2]}}{=} -\varphi(\gamma) = \varphi(-\gamma) = \varphi(\alpha+\beta)$$

- si $\alpha,\beta \in [0,\frac{\pi}{2}]$ et $\alpha+\beta \in [0,\frac{\pi}{2}]$ alors
$$\varphi(\alpha+\beta) = -\varphi(\pi - (\alpha+\beta)) \underset{\overset{\uparrow}{(\frac{\pi}{2}-\alpha)+(\frac{\pi}{2}-\gamma)}}{=} -\varphi(\tfrac{\pi}{2} - \alpha) - \varphi(\tfrac{\pi}{2} - \beta) = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta)$$

- si $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ on pose $\begin{cases} \alpha = m\frac{\pi}{2} - \alpha_0 \\ \beta = n\frac{\pi}{2} - \beta_0 \end{cases}$ $\alpha_0,\beta_0 \in [0,\frac{\pi}{2}]$: $\varphi(\alpha+\beta) = -\varphi(\alpha_0+\beta_0)$
$$= -\varphi(\alpha_0) - \varphi(\beta_0)$$
$$= \varphi(\alpha) + \varphi(\beta).$$

□

VIII

• Démonstration du lemme D

ⓘ Si $a+b=1$ on a $G(a,b) \overset{\text{additive}}{=} aH(a)+bH(b) - \underbrace{\cancel{(a+b)}H(a+b)}_{H(1)=0} = aH(a)+bH(b)$ (a+b=1)

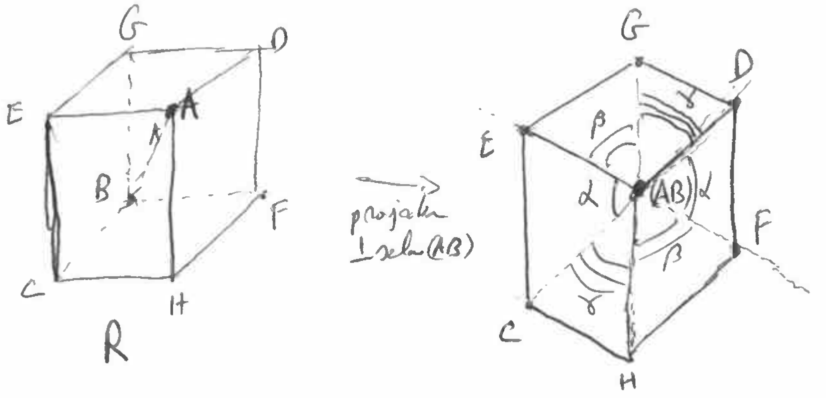
et $G(a,b) \underset{\text{déf de } U}{=} aU\left(\frac{a}{a+b}\right) + bU\left(\frac{b}{a+b}\right) = aU(a)+bU(b)$.

Par différence on obtient bien $a\,h(a)+b\,h(b)=0$.

(ii) $$h(a)+h(b)-h(ab) = \underbrace{U(a)+U(b)-U(ab)}_{} + \underbrace{H(a)+H(b)-H(ab)}_{\text{multiplicative}} \underset{(\text{lemme B})}{=} T(a,b)+0$$ □

• Démonstration du lemme E

On considère un parallélépipède rectangle R de diagonales AB, CD, EF et GH ;
vu dans l'axe de la diagonale (AB) on obtient l'image d'un hexagone :
c'est la projection orthogonale de ce parallélépipède le long de sa diagonale (AB) :



R se décompose en six tétraèdres de côté commun AB :
ABCE, ABEG, ABGD, ABDF, ABFH et ABHC
qui se projettent sur les triangles formés par les diagonales de l'hexagone.
Les angles α, β et γ sont les angles dièdres de l'arête commune AB.

Ces six tétraèdres sont homothétiques à des $T(a,b)$ donc ils vérifient la formule (cf ⓘ qui précède)
$$T = \sum_{i=1}^{6} \ell_i\,\varphi(\theta_i)$$ où ℓ_i et θ_i sont les longueurs et angles dièdres de la $i^{\text{ème}}$ arête de T

Par compensation des angles (les angles dièdres des autres arêtes que AB contribuent pour zéro)*
on obtient l'égalité dans $\mathcal{P}/\mathbb{Z}$:

$$0=[R] = [ABCE]+[ABEG]+[ABGD]+[ABFH]+[ABHC]$$
$$= AB\left(\varphi(\alpha)+\varphi(\beta)+\varphi(\gamma)+\varphi(\alpha)+\varphi(\beta)+\varphi(\gamma)\right)$$

D'où $\varphi(\alpha)+\varphi(\beta)+\varphi(\gamma)=0$ dans $\mathcal{P}/\mathbb{Z}$. □

$\boxed{\theta_1+\theta_2 \equiv 0\left[\frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \varphi(\theta_1)+\varphi(\theta_2)=0}$

(En effet, si $\theta_1+\theta_2=\frac{\pi}{2}$ alors
$$\varphi(\theta_1)+\varphi(\theta_2) = (\tan\theta_1)\,h(\sin^2\theta_1)+(\tan\theta_2)\,h(\sin^2\theta_2)$$
$$= (\tan\theta_1)\,h(\sin^2\theta_1)+(\tan\theta_1)^{-1}h(\cos^2\theta_1)$$
$$= \frac{1}{\cos\theta_1\sin\theta_1}\left((\sin^2\theta_1)\,h(\sin^2\theta_1)+(\cos^2\theta_1)\,h(\cos^2\theta_1)\right)=0$$ par lemme Dⓘ)