Théories conformes des champs du point de vue du géomètre algébriste

Christoph SORGER

(23 janvier 1998)

1. Introduction

Le texte qui suit est une présentation de mes travaux en vue de mon habilitation à diriger des recherches en sciences.
Mon centre d'intérêt est la géométrie algébrique complexe et plus particulièrement l'étude des fibrés vectoriels sur les courbes et les surfaces et de leurs interactions avec la physique mathématique.

2. Algèbres de Lie affines

Dans ce qui suit certaines algèbres de Lie de dimension infinie, *les algèbres de Lie affines non-tordues*, jouent un rôle très important. Je rappelle donc les constructions et résultats concernant les algèbres de Lie dont j'aurais besoin ultérieurement.

(2.1) Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie simple de dimension finie sur $\mathbb{C}$. On se fixe une sous-algèbre de Cartan $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ et on choisit une base $\Pi = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ du système de racines associé. Pour tout racine α, soit $\alpha^\vee$ la coracine. On désigne par $\mathcal{P} \subset \mathfrak{h}^*$ le réseau des poids entiers, par $\mathcal{P}_+ \subset \mathcal{P}$ l'ensemble des poids dominants et par $\{\varpi_1, \ldots, \varpi_r\}$ les poids fondamentaux. L'ensemble $\mathcal{P}_+$ est en bijection avec l'ensemble des classes d'isomorphisme de $\mathfrak{g}$-modules simples; on note $\mathrm{L}(\lambda)$ le $\mathfrak{g}$-module associé au poids dominant λ. Enfin, $(\ ,\ )$ désigne la forme de Cartan-Killing, que l'on normalise de façon à ce que pour la racine maximale θ on ait $(\theta, \theta) = 2$. On associe à $\mathfrak{g}$ une matrice A, dite de Cartan, dont le coefficients sont les $a_{ij} = \langle \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle,\ i, j = 1, \ldots, r$. Cette matrice est inversible; son déterminant n'est autre que *l'indice de connexion* I_c, *i.e.* l'indice du réseau des racines dans $\mathcal{P}$. Le diagramme de Dynkin associé se construit comme suit. Les nœuds sont les racines simples $\alpha_i \in \Pi$; le nœud α_i et le nœud α_j sont connectés par $\max\{|a_{ij}|, |a_{ji}|\}$ arêtes. De plus, on ajoute un "$>$" aux arêtes si $a_{ij} \neq 0$ et $|a_{ij}| > |a_{ji}|$. Ces diagrammes sont à utilisation multiple : le i^{ème} nœud peut être vu comme représentant α_i ou ϖ_i ou $\alpha_i^\vee$

ou encore étiqueté, par exemple, par les nombres $c_i^\vee$, appelés étiquettes de Coxeter duales, définis par $\theta^\vee = \sum_{i=1}^r c_i^\vee \alpha_i^\vee$. Notons que si ρ est la demi-somme des racines, alors $\rho = \sum_{i=1}^r \varpi_i$, d'où $\langle \rho, \theta^\vee \rangle = \sum_{i=1}^r c_i^\vee$. Le nombre $h^\vee = 1 + \langle \rho, \theta^\vee \rangle$ est appelé *nombre de Coxeter dual.* Les diagrammes de Dynkin possibles pour une algèbre de Lie simple, ainsi que l'indice de connexion I_c et le nombre $h^\vee$ correspondants sont résumés au tableau A.

(2.2) Soient $\mathfrak{g}_1$ et $\mathfrak{g}_2$ deux algèbres de Lie simples et $\varphi : \mathfrak{g}_1 \to \mathfrak{g}_2$ un morphisme d'algèbres de Lie. *L'indice de Dynkin de* φ est l'unique nombre $d_\varphi \in \mathbb{C}$ tel que pour les formes de Cartan-Killing respectives, on ait

$$(\varphi(\mathrm{X}), \varphi(\mathrm{Y})) = d_\varphi(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \text{ pour tout } \mathrm{X}, \mathrm{Y} \in \mathfrak{g}_1$$

Soient ρ_1 et ρ_2 deux représentations de $\mathfrak{g}$ de rang r_1 et r_2 respectivement. Il est facile de voir que l'on a les formules suivantes [D] :

$$d_{\rho_1 \oplus \rho_2} = d_{\rho_1} + d_{\rho_2} \text{ et } d_{\rho_1 \otimes \rho_2} = d_{\rho_1} r_2 + r_1 d_{\rho_2} \tag{2.2.1}$$

Dans [L-S], nous avons défini l'indice de Dynkin $d(\mathfrak{g})$ de l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ comme le pgcd des indices de Dynkin d_ρ quand ρ parcourt l'ensemble des représentations de $\mathfrak{g}$. Il découle de (2.2.1) que $d(\mathfrak{g}) = \mathrm{pgcd}_{i=1}^r d_{\varpi_i}$. Les indices de Dynkin des poids fondamentaux se trouvent dans le tableau B. On en déduit pour $d(\mathfrak{g})$

Type de $\mathfrak{g}$	A_r	B_r $(r \geq 3)$	C_r	D_r $(r \geq 4)$	E_6	E_7	E_8	F_4	G_2
$d(\mathfrak{g})$	1	2	1	2	6	12	60	6	2
$\rho(\mathfrak{g})$	ϖ_1	ϖ_1	ϖ_1	ϖ_1	ϖ_6	ϖ_7	ϖ_8	ϖ_4	ϖ_1

Ici $\rho(\mathfrak{g})$ est un poids fondamental réalisant $d(\mathfrak{g})$. Ce poids est unique sauf dans les cas A_r, B_3, D_4 et E_6 où respectivement $\{\varpi_1, \varpi_r\}$, $\{\varpi_1, \varpi_3\}$, $\{\varpi_1, \varpi_3, \varpi_4\}$ et $\{\varpi_1, \varpi_6\}$ conviennent. Du tableau A, on voit que $d(\mathfrak{g})$ est aussi le plus petit commun multiple des étiquettes de Coxeter duales $c_i^\vee$, $i = 1, ..., r$.

(2.3) On associe à $\mathfrak{g}$ une autre algèbre de Lie, *l'algèbre des lacets*, définie par $\mathrm{L}\mathfrak{g} = \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}((z))$ avec le crochet évident. Contrairement à $\mathfrak{g}$, l'algèbre de Lie $\mathrm{L}\mathfrak{g}$ a des extensions centrales non-triviales. On a un 2-cocycle canonique Ψ à valeurs dans $\mathbb{C}$, défini en associant à $(\mathrm{X} \otimes f\,,\ \mathrm{Y} \otimes g) \in \mathrm{L}\mathfrak{g} \times \mathrm{L}\mathfrak{g}$ l'élément $(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \operatorname*{Res}_{z=0}(gdf) \in \mathbb{C}$; soit

$$0 \longrightarrow \mathbb{C} \longrightarrow \widehat{\mathrm{L}\mathfrak{g}} \longrightarrow \mathrm{L}\mathfrak{g} \longrightarrow 0 \tag{2.3.1}$$

l'extension centrale de $\mathrm{L}\mathfrak{g}$ associé. En fait, on a $\mathrm{H}^2(\mathrm{L}\mathfrak{g}, \mathbb{C}) = \mathbb{C}$ et l'extension (2.3.1) est l'extension centrale universelle de $\mathrm{L}\mathfrak{g}$.

Soit ℓ un entier. Une représentation de $\widehat{\mathrm{L}\mathfrak{g}}$ est dite *de niveau* ℓ si le centre c opère par multiplication par ℓ. La théorie des représentations des algèbres de Lie affines [K] affirme que les représentations irréductibles de niveau ℓ intégrables de $\widehat{\mathrm{L}\mathfrak{g}}$ sont classifiées par les poids appartenant à $\mathcal{P}_\ell = \{\lambda \in \mathcal{P}_+/(\lambda,\theta) \leq \ell\}$. On note $\mathcal{H}_\ell(\lambda)$ la représentation irréductible et intégrable de niveau ℓ et de plus haut poids $\lambda \in \mathcal{P}_\ell$.

(2.4) On utilisera l'indice de Dynkin pour sa propriété suivante. Soit $\rho : \mathfrak{g} \to \mathfrak{sl}_r$ une représentation. On en déduit un morphisme d'algèbres de Lie $\mathrm{L}\rho : \mathrm{L}\mathfrak{g} \to \mathrm{L}\mathfrak{sl}_r$ et par conséquent, par image réciproque de l'extension (2.3.1) de $\mathrm{L}\mathfrak{sl}_r$, une extension centrale de $\mathrm{L}\mathfrak{g}$:

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathbb{C} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \widetilde{\mathrm{L}\mathfrak{g}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{L}\mathfrak{g} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{C} \arrow[r] & \widehat{\mathrm{L}\mathfrak{sl}_r} \arrow[r] & \mathrm{L}\mathfrak{sl}_r \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Par définition de l'indice de Dynkin et du cocyle ψ définissant (2.3.1), l'extension centrale $\widetilde{\mathrm{L}\mathfrak{g}}$ est défini par $d_\rho\Psi$.

3. L'espace des blocs conformes

Les espaces des vacua (ou blocs conformes) ont été définis dans [T-U-Y] où se trouvent aussi les propriétés les plus importantes de ces espaces. J'ai rapporté sur cet article, entre autres, dans [S4]. La définition de ces espaces qui suit est due à Beauville [B2]. Elle est un peu plus simple que celle de [T-U-Y] et a l'avantage d'être celle qui viendra naturellement quand on regardera ces espaces du point de vue des G-fibrés (Section 5).

(3.1) On se fixe un niveau $\ell \geq 0$. Soit $(\mathrm{X}, \underline{p})$ une courbe n-pointée stable sur $\mathbb{C}$ où $\underline{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ et supposons les points $\underline{p}$ étiquetés par les représentations $\underline{\lambda} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ avec $\lambda_i \in \mathcal{P}_\ell$. Choisissons un point non-singulier supplémentaire $p \in \mathrm{X}$ et une coordonnée locale z en p. Soit $\mathrm{X}^* = \mathrm{X} - \{p\}$ et considérons l'algèbre de Lie $\mathrm{L}_{\mathrm{X}}\mathfrak{g} = \mathfrak{g} \otimes \mathcal{O}(\mathrm{X}^*)$. On obtient un morphisme d'algèbres de Lie $\mathrm{L}_{\mathrm{X}}\mathfrak{g} \to \mathrm{L}\mathfrak{g}$ en associant à $\mathrm{X} \otimes f$ l'élément $\mathrm{X} \otimes \hat{f}$, où $\hat{f}$ désigne le développement en série de Laurent de f en p. Par le théorème des résidus, l'extension centrale de $\mathrm{L}_{\mathrm{X}}\mathfrak{g}$ obtenue par image réciproque de (2.3.1) se scinde. En particulier, $\mathrm{L}_{\mathrm{X}}\mathfrak{g}$ peut être vue comme une sous-algèbre de Lie de $\widehat{\mathrm{L}\mathfrak{g}}$. Ainsi le module $\mathcal{H}_\ell(0)$ peut être considéré comme un $\mathrm{L}_{\mathrm{X}}\mathfrak{g}$-module. Les $\mathfrak{g}$-modules $\mathrm{L}(\lambda_i)$ peuvent également être considérés comme des $\mathrm{L}_{\mathrm{X}}\mathfrak{g}$-modules via l'évaluation en p_i. L'espace des blocs conformes se définit alors par

$$\mathrm{B}_{\mathrm{G},\mathrm{X}}(\ell; \underline{p}; \underline{\lambda}) = [\mathcal{H}_\ell(0) \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{L}(\lambda_1) \otimes_{\mathbb{C}} \ldots \otimes_{\mathbb{C}} \mathrm{L}(\lambda_n)]_{\mathrm{L}_{\mathrm{X}}\mathfrak{g}} \tag{3.1.1}$$

où $[]_{\mathrm{L_X}\mathfrak{g}}$ désigne les coinvariants sous l'action de $\mathrm{L_X}\mathfrak{g}$. Les propriétés importantes sont :

a) Rationalité. Les espaces $\mathrm{B_{G,X}}(\ell;\underline{p};\underline{\lambda})$ sont de dimension finie. Dans [T-U-Y], ceci est démontré en se ramenant à un théorème de Gabber sur les variétés caractéristiques; une démonstration courte, n'utilisant que les théorèmes de Riemann-Roch et de Poincaré-Birkhoff-Witt, se trouve dans ([S4], 2.5.1).

b) Propagation des vacua. Les espaces $\mathrm{B_{G,X}}(\ell;\underline{p};\underline{\lambda})$ et $\mathrm{B_{G,X}}(\ell;\underline{p},q;\underline{\lambda},0)$ sont canoniquement isomorphes.

c) Formule de décomposition. Soit $\widetilde{\mathrm{X}}\to\mathrm{X}$ une désingularisation partielle en c et soient a et b les points de $\widetilde{\mathrm{X}}$ au-dessus de c. Il existe un isomorphisme canonique

$$\bigoplus_{\mu\in\mathcal{P}_\ell}\mathrm{B_{G,X}}(\ell;\underline{p},a,b;\underline{\lambda},\mu,\mu^*)\xrightarrow{\sim}\mathrm{B_{G,X}}(\ell;\underline{p};\underline{\lambda}) \tag{3.1.2}$$

où μ^* est le plus haut poids de la représentation $\mathrm{L}(\mu)^*$.

d) Indépendance sur $\mathfrak{M}_{g,n}$. La dimension de $\mathrm{B_{G,X}}(\ell;\underline{p};\underline{\lambda})$ ne change pas quand $(\mathrm{X},\underline{p})$ varie dans le champ de modules $\mathfrak{M}_{g,n}$ des courbes n-pointées stables; plus précisément, les espaces des blocs conformes forment un fibré vectoriel sur $\mathfrak{M}_{g,n}$.

Bien entendu, la dernière propriété est la plus difficile à prouver. On voit que, pour calculer la dimension de $\mathrm{B_{G,X}}(\ell;\underline{p};\underline{\lambda})$, on peut se ramener récursivement, avec *c)* et *d)* à $\mathrm{X}=\mathbb{P}_1$. Puis, pour $\mathbb{P}_1$, Verlinde a indiqué une manière astucieuse de faire le calcul. Il s'agit essentiellement de calculer les caractères de l'anneau de fusion associé : c'est le $\mathbb{Z}$-module libre $\mathrm{R}_\ell(\mathfrak{g})$ engendré par $\mathcal{P}_\ell$ avec pour produit

$$[\mathrm{L}(\lambda)]\cdot[\mathrm{L}(\mu)]=\sum_{\nu\in\mathcal{P}_\ell}\dim\mathrm{B}_{\mathrm{G},\mathbb{P}_1}(\ell;0,1,\infty;\lambda,\mu,\nu^*)[\mathrm{L}(\nu)]$$

Que $\mathrm{R}_\ell(\mathfrak{g})$, muni de ce produit, soit un anneau commutatif unitaire, résulte formellement des propriétés ci-dessus; pour calculer les caractères de $\mathrm{R}_\ell(\mathfrak{g})$ on se ramène à l'anneau des représentations $\mathrm{R}(\mathfrak{g})$ via un morphisme de $\mathbb{Z}$-modules naturel dont on montre que c'est un morphisme d'anneaux. Les détails de ce calcul se trouvent dans [B2] et [F], à ceci près que, dans ces articles, le fait que φ est un morphisme d'anneaux n'est vérifié que pour G classique ou G_2. Ce fait peut se vérifier en général à l'aide d'un théorème d'annulation de [T] en passant par une formule qui lie d'une part les coefficients de fusion et d'autre part ceux de Kronecker. La formule de Verlinde que l'on obtient ([B2],9.8) est la suivante :

$$\dim\mathrm{B_{G,X}}(\underline{p};\underline{\lambda};\ell)=(t_\ell)^{g-1}\sum_{\mu\in\mathcal{P}_\ell}\mathrm{Tr}_{\mathrm{L}(\underline{\lambda})}(\exp 2\pi i\,\frac{(\mu+\rho)}{\ell+h^\vee})\prod_{\alpha>0}\left|2\sin\pi\frac{(\alpha,\mu+\rho)}{\ell+h^\vee}\right|^{2-2g},$$

où $t_\ell=(\ell+h^\vee)^{\mathrm{rang}\,\mathfrak{g}}\mathrm{I}_c q$ avec I_c et q comme dans le tableau A.

4. Le champ des G-fibrés quasi-paraboliques

Les espaces des blocs conformes (ou vacua) s'interprètent en termes de fonctions thêta généralisées paraboliques : ce sont les espaces de sections des fibrés inversibles sur le module des G-fibrés paraboliques. Il importe ici de distinguer champ de module et espace de modules grossier. En fait, les identifications naturelles ne s'obtiennent que pour les champs; pour les espaces de modules grossiers, il y a des obstructions (que je détaillerai dans la suite) liés aux singularités des espaces des modules grossiers. Je vais commencer par le point de vue des champs, pour lequel on peut arriver au résultat "optimal".

(4.1) Soit G un groupe algébrique complexe réductif. Rappelons qu'un G-fibré sur un schéma Z est un Z-schéma $\mathrm{E} \to \mathrm{Z}$ équipé d'une action à droite de G tel que, localement pour la topologie étale, E soit trivial, *i.e.* isomorphe à $\mathrm{G} \times \mathrm{Z}$ comme espace G-homogène. Si F est un schéma quasi-projectif sur lequel G opère à gauche, on peut former $\mathrm{E(F)} = \mathrm{E} \times^{\mathrm{G}} \mathrm{F}$, le fibré associé de fibre F. Ceci s'applique en particulier à un morphisme de groupes $\rho : \mathrm{G} \to \mathrm{G}'$ en faisant opérer G sur G' à gauche par ρ. On obtient un G'-fibré $\mathrm{E}(\mathrm{G}')$, l'extension du groupe structural. Si E est un GL_r-fibré on obtient un fibré vectoriel de rang r par $\mathrm{F} = \mathrm{E}(\mathbb{C}^r)$, et réciproquement le fibré de repères E d'un fibré F de rang r est un GL_r-fibré. On voit alors que pour certains groupes (comme GL_r) la trivialité locale au sens étale implique celle au sens de Zariski. Ce n'est pas le cas pour tous les groupes comme le montre le cas de SO_r. Les groupes ayant cette propriété sont appelés *spéciaux* au sens de Serre. Grothendieck a montré que les seuls groupes semi-simple spéciaux sont les produits de SL_r et Sp_{2r}.

(4.2) On suppose G simple et simplement connexe et l'on se fixe un sous-groupe de Borel $\mathrm{B} \subset \mathrm{G}$. Étant donné un sous-ensemble Σ de l'ensemble des nœuds Π du diagramme de Dynkin, on peut définir une sous-algèbre parabolique de $\mathfrak{g}$ par $\mathfrak{p}_\Sigma = \mathfrak{b} \oplus (\bigoplus_{\alpha \in \Sigma} \mathfrak{g}_\alpha) \subset \mathfrak{g}$ et donc un sous-groupe parabolique $\mathrm{P}_\Sigma \subset \mathrm{G}$. Remarquons que $\mathrm{P}_\emptyset = \mathrm{B}$ et $\mathrm{B}_\Pi = \mathrm{G}$ et que tout sous-groupe parabolique $\mathrm{P} \subset \mathrm{G}$ standard (*i.e.* contenant B) est de cette forme. Soit X une courbe algébrique projective, connexe, lisse et soient $\underline{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ des points distincts de X que l'on suppose étiquetés par des sous-groupes paraboliques standards $\underline{\mathrm{P}} = (\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_n)$ de G. Un G-fibré quasi-parabolique de type $\underline{\mathrm{P}}$ est la donnée d'un G-fibré E et, pour $i = 1, \ldots, n$, des éléments $\mathrm{F}_i \in \mathrm{E}(\mathrm{G}/\mathrm{P}_i)(p_i)$. Soit $\mathcal{M}^{par}_{\mathrm{G,X}}(\underline{p}, \underline{\mathrm{P}})$ le champ de modules des G-fibrés quasi-paraboliques de type $\underline{\mathrm{P}} = (\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_n)$ en $\underline{p} = (p_1, \ldots, p_n)$. Remarquons que l'on admet $n = 0$, *i.e.* le cas sans structure quasi-parabolique; on trouve alors le champ, noté $\mathcal{M}_{\mathrm{G,X}}$, des G-fibrés sur X. On a un morphisme d'oubli $\mathcal{M}^{par}_{\mathrm{G,X}}(\underline{p}, \underline{\mathrm{P}}) \to \mathcal{M}_{\mathrm{G,X}}$. Si $\rho : \mathrm{G} \to \mathrm{SL}_r$ est une représentation de G on note $\mathcal{D}_\rho$ l'image réciproque du

fibré déterminant de [D-N] sous le morphisme $\mathcal{M}_{\mathrm{G,X}} \to \mathcal{M}_{\mathrm{SL}_r,\mathrm{X}}$ défini par extension du groupe structural. On obtient ainsi des fibrés sur $\mathcal{M}_{\mathrm{G,X}}$ (et donc sur $\mathcal{M}^{par}_{\mathrm{G,X}}(\underline{p},\underline{\mathrm{P}})$) qu'on appelle de "type déterminant".

(4.3) Pour un sous-groupe parabolique standard $\mathrm{P}_\Sigma \subset \mathrm{G}$ on désigne par $\mathrm{X}(\mathrm{P}_\Sigma)$ le groupe des caractères de P_Σ. Tout poids $\lambda \in \mathcal{P}$ tel que $\lambda(\alpha^\vee) = 0$ pour tout $\alpha \in \Sigma$ définit, par l'exponentielle, un caractère de P_Σ, et tous les caractères apparaissent de cette façon. En particulier, $\mathrm{X}(\mathrm{P}_\Sigma)$ est le groupe abélien libre engendré par $\Pi - \Sigma$.

Théorème 4.4.— *On suppose* G *simple et simplement connexe. Il y a un fibré inversible* $\mathcal{L}$ *sur* $\mathcal{M}^{par}_{\mathrm{G,X}}(\underline{p},\underline{\mathrm{P}})$ *tel que*

$$\gamma : \mathrm{Pic}(\mathcal{M}^{par}_{\mathrm{G,X}}(\underline{p},\underline{\mathrm{P}})) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}\mathcal{L} \times \prod_{i=1}^{n} \mathrm{X}(\mathrm{P}_i).$$

De plus, on peut choisir $\mathcal{L}$ *tel que* $\mathcal{L}^{\otimes d(\mathrm{G})} = \mathcal{D}_{\rho(\mathrm{G})}$ *où* $d(\mathrm{G})$ *est l'indice de Dynkin de* G *et* $\rho(\mathrm{G})$ *une représentation qui le réalise comme dans le tableau dans (2.2).*

J'ai démontré ce théorème en collaboration avec Laszlo dans [L-S] pour G classique ou G_2, puis j'ai traité le cas des groupes exceptionnels qui restaient dans [S5]. La démonstration fait intervenir de façon essentielle deux autres théorèmes, également démontrés dans [L-S] et intéressants en eux-mêmes. Le premier est le *théorème d'uniformisation* qui donne une description de $\mathcal{M}^{par}_{\mathrm{G,X}}(\underline{p},\underline{\mathrm{P}})$ comme un double quotient et dont l'idée remonte à A. Weil; le second donne la construction d'une racine, que nous avons appelé fibré *pfaffien*, du fibré déterminant associé à une famille de fibrés vectoriels munis d'une structure quadratique non dégénérée. Cette racine dépend du choix d'une thêta-caractéristique sur la courbe.

(4.5) *Uniformisation.* Supposons G semi-simple (non nécessairement simplement connexe). Pour simplifier l'exposé, supposons $n = 0$. Le point de départ est l'observation qu'*ensemblistement* l'ensemble des classes d'isomorphisme des G-fibrés est en bijection canonique avec le double quotient $\mathrm{G}\big(\mathcal{O}(\mathrm{X}^*)\big) \backslash \mathrm{G}\big(\mathbb{C}((z))\big) / \mathrm{G}\big(\mathbb{C}[[z]]\big)$. Ceci est facile à voir. L'observation clé pour cela est que, d'après un théorème de Harder, un G-fibré sur X se trivialise sur X^* si G est semi-simple. Pour $\mathrm{G} = \mathrm{SL}_r$ ceci est bien connu et se traduit algébriquement par le fait qu'un module projectif sur un anneau de Dedekind est libre si et seulement si son déterminant est libre. L'hypothèse de semi-simplicité pour G est essentielle : c'est faux pour $\mathrm{G} = \mathbb{C}^*$. Supposons alors donné un G-fibré E muni de deux trivialisations $\tau : \mathrm{X}^* \times \mathrm{G} \xrightarrow{\sim} \mathrm{E}_{|\mathrm{X}^*}$ et $\sigma : \mathrm{D} \times \mathrm{G} \xrightarrow{\sim} \mathrm{E}_{|\mathrm{D}}$ avec $\mathrm{D} = \mathrm{Spec}\big(\mathbb{C}[[z]]\big)$. Ces trivialisations diffèrent par un morphisme $\mathrm{D}^* \to \mathrm{G}$, où $\mathrm{D}^* = \mathrm{Spec}\big(\mathbb{C}((z))\big)$ est le produit fibré de D et X^* au-dessus de X, qu'on peut voir comme un élément de $\mathrm{G}\big(\mathbb{C}((z))\big)$. Réciproquement, la donnée d'un élément de $\mathrm{G}\big(\mathbb{C}((z))\big)$ permet de recoller les fibrés triviaux sur X^* et D et

de retrouver le fibré E muni de deux trivialisations τ et σ. Ainsi, les éléments de $\mathrm{G}\big(\mathbb{C}((z))\big)$ correspondent aux classes d'isomorphisme $(\mathrm{E}, \tau, \sigma)$. Ensuite, quotienter $\mathrm{G}\big(\mathbb{C}((z))\big)$ par $\mathrm{G}\big(\mathbb{C}[[z]]\big)$ signifie oublier σ, et quotienter ensuite $\mathrm{G}\big(\mathbb{C}((z))\big)/\mathrm{G}\big(\mathbb{C}[[z]]\big)$ par $\mathrm{G}\big(\mathcal{O}(\mathrm{X}^*)\big)$ signifie oublier aussi τ.

La nature *algébrique* des objets et de l'isomorphisme en question est autrement plus délicate à établir. On appelle $\mathbb{C}$-*espace* (resp. $\mathbb{C}$-*groupe*) un foncteur de la catégorie des $\mathbb{C}$-algèbres dans la catégorie des ensembles (resp. groupes) qui est un faisceau pour la topologie fidèlement plate. On verra la catégorie des $\mathbb{C}$-schémas comme sous-catégorie pleine des $\mathbb{C}$-espaces. La catégorie des $\mathbb{C}$-espaces est fermée par limites inductives. Un $\mathbb{C}$-espace est un *ind-schéma* s'il est limite inductive d'un système filtrant de schémas. Un *ind-groupe* est un $\mathbb{C}$-groupe qui est un ind-schéma. Soit $\mathrm{L}^+\mathrm{G}$ [resp. LG] le $\mathbb{C}$-groupe défini par $\mathrm{A} \mapsto \mathrm{G}\big(\mathrm{A}[[z]]\big)$ [resp. par $\mathrm{A} \mapsto \mathrm{G}\big(\mathrm{A}((z))\big)$]. Il est facile de voir que $\mathrm{L}^+\mathrm{G}$ est représenté par un schéma affine (de dimension infinie sur $\mathbb{C}$) et on peut filtrer LG (grosso modo par l'orde du pôle) par des schémas ce qui fait de LG un ind-groupe. Finalement, soit $\mathrm{L}_\mathrm{X}\mathrm{G}$ le sous-$\mathbb{C}$-group $\mathrm{G}\big(\mathcal{O}(\mathrm{X} - \{p\})\big)$ de LG. Ce $\mathbb{C}$-groupe a également une structure naturelle de ind-groupe, en filtrant par l'ordre du pôle en p. Remarquons que les algèbres de Lie de ces groupes ne sont autres que $\mathrm{Lie}(\mathrm{LG}) = \mathrm{L}\mathfrak{g}$, $\mathrm{Lie}(\mathrm{L}^+\mathrm{G}) = \mathrm{L}^+\mathfrak{g}$ et $\mathrm{Lie}(\mathrm{L}_\mathrm{X}\mathrm{G}) = \mathrm{L}_\mathrm{X}\mathfrak{g}$.

Le quotient $\mathcal{Q}_\mathrm{G} = \mathrm{LG}/\mathrm{L}^+\mathrm{G}$ est naturellement un $\mathbb{C}$-espace (c'est le faisceau quotient) et on a montré dans [L-S] que $\mathcal{Q}_\mathrm{G}$ est un aussi ind-schéma, limite directe de variétés algébriques *projectives et intègres.* Ce dernier résultat est important dans la suite car il permet, entre autres, d'identifier $\mathcal{Q}_\mathrm{G}$ avec la grassmannienne infinie de Kumar et Mathieu, dont la définition est a priori différente de celle donnée ici.

La version algébrique de l'identification ensembliste ci-dessus est la suivante, appelée *uniformisation* :

Théorème 4.6.— *Supposons* G *semi-simple. Il y a un isomorphisme canonique de champs algébriques*

$$\mathrm{L}_\mathrm{X}\mathrm{G}\backslash\mathcal{Q}_\mathrm{G} \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}_{\mathrm{G},\mathrm{X}}$$

et, de plus, $\pi : \mathcal{Q}_\mathrm{G} \to \mathcal{M}_{\mathrm{G},\mathrm{X}}$ *est un* $\mathrm{L}_\mathrm{X}\mathrm{G}$*-fibré.*

Ce théorème est montré pour $\mathrm{G} = \mathrm{SL}_r$ dans [B-L]; l'extension à G semi-simple se trouve dans ([L-S], 1.3). Cette extension a été possible, grâce à un résultat de Drinfeld et Simpson [D-S] en réponse à une question que nous leur avons posée. Ils démontrent que la restriction d'un G-fibré à X^* est triviale même quand on considère des familles : si E est un G-fibré sur $\mathrm{X} \times \mathrm{S}$ alors localement pour la topologie étale sur S, la restriction de E à $\mathrm{X}^* \times \mathrm{S}$ est triviale, ce qui est essentiel pour la preuve.

(4.7) *Stratégie de la preuve de 4.4.* Par le théorème d'uniformisation, on voit que $\mathrm{Pic}(\mathcal{M}_{\mathrm{G},\mathrm{X}}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}_{\mathrm{L}_\mathrm{X}\mathrm{G}}(\mathcal{Q}_\mathrm{G})$ ou $\mathrm{Pic}_{\mathrm{L}_\mathrm{X}\mathrm{G}}(\mathcal{Q}_\mathrm{G})$ désigne le groupe des fibrés

inversibles $\mathrm{L_X G}$-linéarisé sur $\mathcal{Q}_{\mathrm{G}}$. Par conséquent, pour calculer $\mathrm{Pic}(\mathcal{M}_{\mathrm{G,X}})$, il s'agit de comprendre $\mathrm{Pic}_{\mathrm{L_X G}}(\mathcal{Q}_{\mathrm{G}})$. Le groupe $\mathrm{Pic}(\mathcal{Q}_{\mathrm{G}})$ lui même est connu de Kumar, Narasimhan, Ramanathan [K-N-R] et Mathieu : c'est un groupe cyclique infini dont le générateur positif peut se décrire en termes d'extensions centrales de LG. En fait, le $\mathbb{C}$-groupe LG admet une extension centrale canonique de $\mathbb{C}$-groupes

$$1 \longrightarrow \mathrm{G}_m \longrightarrow \widehat{\mathrm{LG}} \longrightarrow \mathrm{LG} \longrightarrow 1 \tag{4.7.1}$$

qui donne au niveau des algèbres de Lie, l'extension (2.3.1) de $\mathrm{L}\mathfrak{g}$. Cette extension se scinde au-dessus de $\mathrm{L^+G}$ ([L-S], 4.9). Il en découle que l'on peut définir un fibré inversible sur l'espace homogène $\mathcal{Q}_{\mathrm{G}} = \widehat{\mathrm{LG}}/\widehat{\mathrm{L^+G}}$ par le caractère $\mathrm{G}_m \times \mathrm{L^+G} \to \mathrm{G}_m$ défini par la première projection. Alors on peut montrer que ce fibré engendre $\mathrm{Pic}(\mathcal{Q}_{\mathrm{G}})$; on désigne par $\mathcal{O}_{\mathcal{Q}_{\mathrm{G}}}(1)$ son dual. On démontre ensuite que le morphisme d'oubli $\mathrm{Pic}_{\mathrm{L_X G}}(\mathcal{Q}_{\mathrm{G}}) \to \mathrm{Pic}(\mathcal{Q}_{\mathrm{G}})$ est injectif ([L-S], 6.1). Ceci consiste essentiellement à vérifier que le ind-groupe $\mathrm{L_X G}$ n'a pas de caractères non-triviaux ce que l'on montre en établissant que le ind-groupe $\mathrm{L_X G}$ est intègre ([L-S], 5.1). Mais, a priori, il n'est pas clair que $\mathcal{O}_{\mathcal{Q}_{\mathrm{G}}}(1)$ admette une $\mathrm{L_X G}$-linéarisation. En fait, ceci équivaut ([L-S], 6.4) à dire que (4.7.1) se scinde au-dessus de $\mathrm{L_X G}$, ce qui n'est pas évident. Nous procédons en construisant des fibré inversibles sur $\mathcal{M}_{\mathrm{G,X}}$ dont l'image réciproque est égale à $\mathcal{O}_{\mathcal{Q}_{\mathrm{G}}}(1)$. Pour $\mathrm{G} = \mathrm{SL}_r$ ceci est facile : l'image réciproque du fibré déterminant s'identifie à $\mathcal{O}_{\mathcal{Q}_{\mathrm{G}}}(1)$ ([L-S], 6.6). Dans le cas général on considère une représentation $\rho : \mathrm{G} \to \mathrm{SL}_r$, puis le morphisme obtenu par extension du groupe structural $f_\rho : \mathcal{M}_{\mathrm{G,X}} \to \mathcal{M}_{\mathrm{SL}_r,\mathrm{X}}$ qui permet d'obtenir des fibrés inversibles par image réciproque du fibré déterminant. La question est alors de savoir quelle est l'image réciproque du fibré déterminant par le morphisme composé $\mathcal{Q}_{\mathrm{G}} \to \mathcal{Q}_{\mathrm{SL}_r} \to \mathcal{M}_{\mathrm{SL}_r,\mathrm{X}}$. Pour le voir, il s'agit de former l'image réciproque de l'extension centrale canonique de LSL_r à LG sous $\mathrm{L}\rho$. En considérant ce qui se passe au niveau des algèbres de Lie, on trouve que c'est $\mathcal{O}_{\mathcal{Q}_{\mathrm{G}}}(d_\rho)$ par définition de l'indice de Dynkin: c'est le lemme de Kumar-Narasimhan-Ramanathan [K-N-R] où il est démontré par un calcul de Riemann-Roch et où l'indice de Dynkin est introduit dans la théorie des G-fibrés pour la première fois. Du tableau dans (2.2) on déduit que pour G classique ou G_2 il s'agit de construire une racine du fibré déterminant associé à la représentation standard.

(4.8) *Le fibré pfaffien.* Soit $(\mathcal{F}, \sigma)$ une famille, paramétrée par le schéma S, de fibrés vectoriels sur X munis d'une forme quadratique non dégénérée. Si l'on choisit une thêta-caractéristique κ sur X, la famille $\mathcal{F} \otimes pr_2^*(\kappa)$ est munie d'une forme quadratique non dégénérée à valeurs dans le faisceau dualisant ω_{X}. Pour de telles familles, localement sur S, on peut trouver, d'après Kempf, un complexe de

$\mathcal{O}_{\mathrm{S}}$-modules libres

$$0 \longrightarrow \mathrm{L} \xrightarrow{\alpha} \mathrm{L}^* \longrightarrow 0,$$

avec α antisymétrique, représentant le complexe parfait $\mathrm{R}pr_{1*}(\mathcal{F} \otimes pr_2^*(\kappa))$ dans la catégorie dérivée (voir théorème 8.5 pour l'énoncé précis). Si S est le champ $\mathcal{M}_{\mathrm{SO}_r}$, alors pour r ou κ (*i.e.* $h^0(\kappa)$) pair, le sous-champ fermé $\mathrm{div}\,(\mathrm{R}pr_{1*}(\mathcal{F} \otimes pr_2^*(\kappa)))$ est un diviseur (sinon c'est le tout). C'est le diviseur "thêta" dont le fibré associé est le fibré déterminant; par le résultat ci-dessus il est localement défini par le déterminant d'une matrice antisymétrique. Le pfaffien de cette matrice définit alors un autre diviseur dont le fibré associé est appelé le fibré pfaffien; par construction, son carré est le fibré déterminant. J'ai utilisé une variante de cette construction divisorielle du fibré pfaffien dans [S3] pour le calcul du groupe des Picard des thêta-caractéristiques sur le plan projectif (*cf.* Section 10). Par contre, dans [L-S] nous avions besoin d'une construction fonctorielle pour traiter tous les cas, ce qui est sensiblement plus délicat :

Théorème 4.9.— *Soit $(\mathcal{F}, \sigma)$ une famille de fibrés quadratiques sur* X *paramétrée par le schéma noethérien* S*. Alors pour toute thêta-caractéristique κ sur* X*, il existe une racine $\mathcal{P}_{(\mathcal{F},\sigma)}(\kappa)$ du fibré déterminant $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}$ associé à la famille $\mathcal{F}$. Si $f : \mathrm{S}' \to \mathrm{S}$ est un morphisme de schémas noethériens, alors on a $\mathcal{P}_{(f^*\mathcal{F}, f^*\sigma)}(\kappa) = \mathcal{P}_{(\mathcal{F},\sigma)}(\kappa)$*

Cette construction donne en particulier une racine du fibré dualisant sur le champ $\mathcal{M}_{\mathrm{G,X}}$ (dépendant du choix d'une thêta-caractéristique). En effet, le fibré dualisant $\omega_{\mathcal{M}_{\mathrm{G,X}}}$ s'identifie à $\mathcal{D}^*_{\mathrm{A}d}$ et la représentation adjointe, préservant la forme de Cartan-Killing, se factorise à travers SO_{r^2}. Si G est simplement connexe, cette racine est unique : c'est $\mathcal{O}_{\mathcal{M}_{\mathrm{G,X}}}(-h^\vee)$ dans la description du groupe de Picard du théorème 4.4, puisque l'indice de Dynkin de la représentation adjointe est $2h^\vee$. Cette racine a de l'importance dans le programme de Langlands géométrique de Beilinson et Drinfeld ($-h^\vee$ est le "niveau critique") [B-D].

5. Fonctions thêta généralisées

(5.1) On suppose G simple et simplement connexe. On se fixe n points $\underline{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ sur X étiquetés par des sous-groupes paraboliques $\underline{\mathrm{P}} = (\mathrm{P}_1, \ldots, \mathrm{P}_n)$ standards de G. D'après le théorème 4.4, se donner un fibré inversible sur $\mathcal{M}^{par}_{\mathrm{G,X}}(\underline{p}, \underline{\mathrm{P}})$ signifie se donner un entier ℓ et des caractères χ_i de P_i pour $i = 1, \ldots, n$. Les sections du fibré $\mathcal{L}(\ell, \underline{\chi})$ sont appelés fonctions thêta paraboliques généralisées. Supposons $\ell \geq 0$ et les χ_i dominants. Remarquons que d'après la description de $\mathrm{X}(\mathrm{P}_\Sigma)$ de 4.3, le choix d'un sous-groupe parabolique standard P_Σ et d'un caractère dominant χ de P_Σ équivaut au choix d'un poids dominant λ (prendre $\Sigma = \alpha \in \Pi/\lambda(\alpha^\vee) = 0$). En

particulier, si l'on suppose les χ_i choisis de façon à ce que les λ_i associés soient dans $\mathcal{P}_\ell$ pour $i = 1, ..., n$, on dispose de l'espace des blocs conformes $\mathrm{B}_{\mathrm{G,X}}(\ell; \underline{p}; \underline{\lambda})$.

Théorème 5.2.— *Sous les hypothèses ci-dessus, il y a un isomorphisme canonique*

$$\mathrm{H}^0(\mathcal{M}^{par}_{\mathrm{G,X}}(\underline{p}, \underline{\mathrm{P}}), \mathcal{L}(\ell, \underline{\chi})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{B}_{\mathrm{G,X}}(\ell; \underline{p}; \underline{\lambda})^* \tag{5.2.1}$$

En particulier, $\dim \mathrm{H}^0(\mathcal{M}^{par}_{\mathrm{G,X}}(\underline{p}, \underline{\mathrm{P}}), \mathcal{L}(\ell, \underline{\chi}))$ est donnée par la formule de Verlinde. C'est le théorème 1.2 de [L-S] (où l'on avait supposé que G est classique ou G_2; maintenant que l'on connaît les générateurs aussi dans les cas restants d'après [S5], on peut enlever cette hypothèse). Le cas de $\mathrm{G} = \mathrm{SL}_r$ et $n = 0$ figure dans [B-L] puis pour n quelconque dans [P]. Pour $n = 0$ et G simple et simplement connexe il est démontré par Faltings [F] et Kumar-Narasimhan-Ramanathan [K-N-R] pour les fibrés de type déterminant sur l'espace de modules grossier.

(5.3) Expliquons comment se démontre 5.2. Par le théorème d'uniformisation on a $\mathcal{M}^{par}_{\mathrm{G,X}}(\underline{p}, \underline{\mathrm{P}}) = \mathcal{Q}^{par}_{\mathrm{G}}(\underline{p}, \underline{\mathrm{P}})/\mathrm{L_X G}$ où $\mathcal{Q}^{par}_{\mathrm{G}}(\underline{p}, \underline{\mathrm{P}}) = \mathcal{Q}_{\mathrm{G}} \times \prod_{i=1}^n \mathrm{G}/\mathrm{P}_i$. Ainsi les sections de $\mathcal{L}(\ell, \underline{\chi})$ sont les sections $\mathrm{L_X G}$-invariantes de $\pi^*\mathcal{L}(\ell, \underline{\chi})$ sur $\mathcal{Q}^{par}_{\mathrm{G}}(\underline{p}, \underline{\mathrm{P}})$. Par le théorème de Künneth et de Borel-Weil-Bott dans sa version à la Kumar-Mathieu et celle habituelle, on voit

$$\begin{aligned}\mathrm{H}^0(\mathcal{Q}^{par}_{\mathrm{G}}(\underline{p}, \underline{\mathrm{P}}), \pi^*\mathcal{L}(\ell, \underline{m})) &\xrightarrow{\sim} \mathrm{H}^0(\mathcal{Q}_{\mathrm{G}}, \mathcal{O}_{\mathcal{Q}_{\mathrm{G}}}(\ell)) \otimes \big(\bigotimes_{i=1}^n \mathrm{H}^0(\mathrm{G}/\mathrm{P}_i, \mathcal{L}_{-\lambda_i})\big) \\ &\xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_\ell(0)^* \otimes \big(\bigotimes_{i=1}^n \mathrm{L}(\lambda_i)^*\big)\end{aligned}$$

Mais pour conclure il faut prendre les invariants *par rapport à l'algèbre* $\mathrm{L_X G}$. Pour cela l'argument crucial est que l'ind-schéma $\mathrm{L_X G}$ est intègre. De là, on déduit d'une part que $\mathrm{L_X G}$ n'admet comme caractères que le caractère trivial et d'autre part que l'inclusion de $\mathrm{L_X G}$ dans LG se relève de façon *unique* en une inclusion de $\mathrm{L_X G}$ dans $\widehat{\mathrm{LG}}$. Par conséquent, les $\mathrm{L_X G}$-linéarisations de $\pi^*\mathcal{L}(\ell, \underline{m})$ données d'une part en tant qu'image réciproque et d'autre part par la $\widehat{\mathrm{LG}}$-linéarisation canonique, via l'inclusion ci-dessus de $\mathrm{L_X G}$ dans $\widehat{\mathrm{LG}}$, sont les mêmes. Il s'ensuit que l'action de $\mathrm{L_X}\mathfrak{g}$ sur $\mathrm{H}^0(\pi^*\mathcal{L}(\ell, \underline{m}))$ est la restriction de l'action de $\widehat{\mathrm{L}\mathfrak{g}}$ sur $\mathrm{H}^0(\pi^*\mathcal{L}(\ell, \underline{m})) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}_\ell(0)^* \otimes \big(\otimes_{i=1}^n \mathrm{L}(\lambda_i)^*\big)$. Le théorème se déduit alors du fait que, $\mathcal{Q}^{par}_{\mathrm{G}}(\underline{p}, \underline{\mathrm{P}})$ et $\mathrm{L_X G}$ étant *réduits*, les sections $\mathrm{L_X G}$-invariantes de $\pi^*\mathcal{L}(\ell, \underline{m})$ sont les sections $\mathrm{L_X}\mathfrak{g}$-invariantes.

6. Le cas où G n'est pas simplement connexe.

(6.1) Si G est simple, non nécessairement simplement connexe, on ne dispose pour l'instant pas de théorie satisfaisante des blocs conformes. En vue du théorème 5.2, une façon possible pour définir ces espaces serait de prendre les sections de fibrés inversibles sur $\mathcal{M}_{\mathrm{G,X}}$. Pour connaître ces fibrés inversibles, nous avons calculé

dans [B-L-S] le groupe de Picard du champ des G-fibrés pour G semi-simple non nécessairement simplement connexe. Pour de tels G, le module $\mathcal{M}_{\mathrm{G,X}}$ n'est plus connexe : ses composantes connexes sont paramétrées par $\pi_1(\mathrm{G})$. Pour $\tau \in \pi_1(\mathrm{G})$, on note $\mathcal{M}^{\tau}_{\mathrm{G,X}}$ la composante associée. Contrairement à ce qu'il se passe pour G simplement connexe, le groupe de Picard a de la torsion.

Théorème 6.2.— *Le sous-groupe de torsion* $\mathrm{Pic}_{tor}(\mathcal{M}^{\tau}_{\mathrm{G,X}})$ *de* $\mathrm{Pic}(\mathcal{M}^{\tau}_{\mathrm{G,X}})$ *est canoniquement isomorphe à* $\mathrm{Hom}(\mathrm{H}^1(\mathrm{X}, \pi_1(\mathrm{G})), \mathbb{C}^*)$*; le quotient*

$$\mathrm{Pic}(\mathcal{M}^{\tau}_{\mathrm{G,X}})/\,\mathrm{Pic}_{tor}(\mathcal{M}^{\tau}_{\mathrm{G,X}})$$

est infini cyclique.

Il s'agit ensuite à déterminer le générateur de $\mathrm{Pic}(\mathcal{M}^{\tau}_{\mathrm{G,X}})/\,\mathrm{Pic}_{tor}(\mathcal{M}^{\tau}_{\mathrm{G,X}})$, ce qui est fait dans [B-L-S]. Le degré τ ne joue pas de rôle dans le cas du champ; on supposera dans la suite $\tau = 0$. Pour déterminer le générateur, on considère le générateur $\mathcal{L}$ sur $\mathcal{M}_{\widetilde{\mathrm{G}},\mathrm{X}}$, où $\widetilde{\mathrm{G}}$ est le groupe simplement connexe associé à G, puis on se demande quelles sont les puissances de $\mathcal{L}$ qui descendent à $\mathcal{M}^0_{\mathrm{G,X}}$ sous le morphisme canonique $\mathcal{M}_{\widetilde{\mathrm{G}},\mathrm{X}} \to \mathcal{M}^0_{\mathrm{G,X}}$. Par exemple, si $\mathrm{G} = \mathrm{PSL}_r$, le générateur de $\mathrm{Pic}(\mathcal{M}^0_{\mathrm{G,X}})/\,\mathrm{Pic}_{tor}(\mathcal{M}^0_{\mathrm{G,X}})$ s'identifie à $\mathcal{L}^r$. Il est facile de voir que r est la plus petite puissance possible, puis ce fibré descend en raison de l'existence des pfaffiens : on remarque que l'indice de Dynkin de la représentation adjointe est $2r$, puis que l'on peut extraire une racine de $\mathcal{D}_{\mathrm{A}d}$ étant donné que cette représentation préserve la forme de Killing et donc se factorise à travers SO_{r^2}.

(6.3) À titre d'exemple, je vais encore considérer le cas où $\mathrm{G} = \mathrm{SO}_r$ pour $r \geq 3$ et expliquer la dépendance du fibré pfaffien $\mathcal{P}(\kappa)$ de la thêta-caractéristique κ. D'après le théorème 6.2, le sous-groupe de torsion de $\mathrm{Pic}(\mathcal{M}^{\tau}_{\mathrm{SO}_r,\mathrm{X}})$ est donné par $\mathrm{Hom}(\mathrm{J}_2, \mathbb{C}^*)$ où J_2 désigne le groupe de points d'ordre 2 de la jacobienne. On peut identifier J_2 à $\mathrm{Hom}(\mathrm{J}_2, \mathbb{C}^*)$ par l'accouplement de Weil et l'on obtient une suite exacte canonique

$$0 \longrightarrow \mathrm{J}_2 \xrightarrow{\lambda} \mathrm{Pic}(\mathcal{M}^{\tau}_{\mathrm{SO}_r,\mathrm{X}}) \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow 0$$

où le quotient sans torsion est engendré par un quelconque des $\mathcal{P}(\kappa)$.

Proposition 6.4.— *Soit* $\theta(\mathrm{X})$ *le sous-groupes de* $\mathrm{Pic}(\mathrm{X})$ *engendré par les thêta-caractéristiques. Alors la flèche* $\kappa \mapsto \mathcal{P}(\kappa)$ *s'étend par linéarité en un isomorphisme* $\mathcal{P} : \theta(\mathrm{X}) \to \mathrm{Pic}(\mathcal{M}^{\tau}_{\mathrm{SO}_r,\mathrm{X}})$*, coïncidant avec* λ *sur* J_2*.*

7. Espaces de modules grossiers

(7.1) On suppose G simple (mais pas nécessairement simplement connexe). Soit $\mathrm{M}_{\mathrm{G,X}}$ l'espace de modules grossier des G-fibrés semi-stables. C'est une variété

projective normale qui a été construite par Ramanathan. Ici encore, les composantes connexe sont paramétrées par $\tau \in \pi_1(\mathrm{G})$; on note $\mathrm{M}^{\tau}_{\mathrm{G,X}}$ la composante associée. Pour définir les fonctions thêta généralisées on se sert encore des fibrés inversibles sur $\mathrm{M}^{\tau}_{\mathrm{G,X}}$, mais contrairement à ce qu'il se passe pour les champs, il y a trop peu de fibrés pour obtenir de cette façon tous les espaces de blocs conformes. Ici, il importe, concernant le groupe de Picard, de distinguer entre les composantes; pour simplifier l'exposé je supposerai $\tau = 0$.

Théorème 7.2.— *Le groupe* $\mathrm{Pic}(\mathrm{M}^0_{\mathrm{G,X}})$ *est sans torsion et infini cyclique.*

Ce théorème est démontré avec des méthodes différentes dans [L-S] et [K-N] sous l'hypothèse G simplement connexe, puis en général dans [B-L-S] où on détermine aussi le générateur (*cf.* 7.3) : si $\widetilde{\mathrm{G}}$ désigne le groupe simplement connexe associé à G, on montre, en étudiant l'action de $\mathrm{H}^1(\mathrm{X}, \pi_1(\mathrm{G}))$ sur $\mathrm{M}_{\widetilde{\mathrm{G}},\mathrm{X}}$ dont le quotient est $\mathrm{M}^0_{\mathrm{G,X}}$, que $\mathrm{Pic}(\mathrm{M}^0_{\mathrm{G,X}}) \subset \mathrm{Pic}(\mathrm{M}_{\widetilde{\mathrm{G}},\mathrm{X}})$. Ensuite, pour G simplement connexe, on se ramène dans [L-S] à ce que l'on sait sur le champ en utilisant un principe de comparaison entre le champ et le module grossier : il existe une présentation du sous-champ ouvert $\mathcal{M}^{ss}_{\mathrm{G,X}}$ correspondant aux G-fibrés semi-stables comme quotient d'un schéma lisse R par un groupe réductif H, tel que l'espace de modules grossier $\mathrm{M}_{\mathrm{G,X}}$ soit un bon quotient de R par H :

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{R} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ {[\mathrm{R/H}]} \arrow[rr] & & \mathrm{R//H} \end{tikzcd}$$

Ici $\mathcal{M}^{ss}_{\mathrm{G,X}} = [\mathrm{R/H}]$ désigne le quotient "champêtre" et $\mathrm{M}_{\mathrm{G,X}} = \mathrm{R//H}$ le quotient au sens de Mumford. Par construction, les fibrés inversibles sur $\mathcal{M}^{ss}_{\mathrm{G,X}}$ sont les fibrés inversibles H-invariants et les fibrés inversibles sur $\mathrm{M}_{\mathrm{G,X}}$ sont ceux qui en plus satisfont au critère de descente de Kempf [D-N]. En particulier, $\mathrm{Pic}(\mathrm{M}_{\mathrm{G,X}}) \subset \mathrm{Pic}(\mathcal{M}^{ss}_{\mathrm{G,X}})$. On conclut avec le théorème 4.4 en utilisant que $\mathrm{Pic}(\mathcal{M}^{ss}_{\mathrm{G,X}}) = \mathrm{Pic}(\mathcal{M}_{\mathrm{G,X}})$ ce qui est conséquence de la stratification de Harder-Narasimhan. Quant à la détermination du générateur, elle est donné par la conjecture suivante :

Conjecture 7.3.— *Tous les fibrés inversibles sur* $\mathrm{M}^0_{\mathrm{G,X}}$ *sont de type déterminant.*

En fait, nous avons vérifié cette conjecture dans quasiment tous les cas dans [B-L-S] et [S5] (il reste cependant quelques cas ouverts : $\mathrm{G} = \mathrm{SL}_r/\mu_s$ avec $\mathrm{pgcd}(r,s) > 1$ et pour $\mathrm{F}_4, \mathrm{E}_6, \mathrm{E}_7$ et E_8 on sait seulement que le générateur du groupe de Picard du champ n'existe pas sur le module grossier [S5]). Cette vérification a été faite cas par cas et il serait intéressant d'avoir une meilleure compréhension de ce phénomène,

i.e. de trouver une preuve uniforme. La question est bien entendu très liée au singularités de $\mathrm{M}_{\mathrm{G,X}}$ et en particulier au théorème 7.7.

(7.4) Considérons à titre d'exemple le cas de SO_r pour $r \geq 7$. Dans ce cas, (7.3) signifie que le fibré déterminant associé à la représentation standard n'a pas de racine contrairement à ce qui se passe pour le champs $\mathcal{M}_{\mathrm{G,X}}$. Nous avons démontré cela dans [L-S] : par une construction explicité dans [S1], on écrit $\mathrm{M}^0_{\mathrm{SO}_r,\mathrm{X}}$ comme quotient de Mumford d'une variété lisse $\mathrm{R}(\mathrm{SO}_r)$ sous l'action d'un groupe réductif H. Sur $\mathrm{R}(\mathrm{SO}_r)$, on a le fibré pfaffien puisqu'il y a une famille universelle, puis il s'agit de vérifier que ce fibré pfaffien ne descend pas. Cette vérification se fait en montrant que pour certains points "mauvais" *i.e.* semi-stable, mais loin d'être régulièrement stables, l'action du stabilisateur n'est pas triviale.

(7.5) Il est conséquence de (7.3) que si l'on considère les espaces de modules grossier, on "oublie" certains espaces de blocs conformes, *i.e.* ceux correspondant à des fibrés qui ne sont pas de type détérminantiel sur le champ. Ceci m'avait frappé la première fois en étudiant comment Kumar-Narasimhan-Ramanathan [K-N-R], qui se placent sur l'espace de modules grossier, identifient les espaces des fonctions thêta généralisées avec les espaces de blocs conformes. Comme ils ne considéraient que des fibrés de type déterminant, dans le cas le plus "mauvais", *i.e.* $\mathrm{G} = \mathrm{E}_8$, par exemple, ils ne pouvait obtenir de cette façon qu'un espace de blocs conformes sur 60. Remarquons cependant que, en vue de (7.3), cette méthode donne néanmoins une description complète des espaces de fonctions thêta possibles sur l'espace de modules grossier. Dans ce papier apparaît la première fois l'indice de Dynkin (via un calcul de Riemann-Roch) et c'était le point de départ pour [L-S], où nous nous sommes rendu compte qu'il fallait se placer sur le champ.

(7.6) Revenons sur l'exemple de $\mathrm{M}^0_{\mathrm{SO}_r,\mathrm{X}}$. En regardant l'action de H sur $\mathrm{R}(\mathrm{SO}_r)$ on remarque que sur l'ouvert des SO_r-fibré régulièrement stables (dont le complémentaire est de codimension ≥ 2) l'action est triviale, *i.e.* le pfaffien descend sur cet ouvert. Ceci signifie que l'on est en présence sur la variété normale $\mathrm{M}^0_{\mathrm{SO}_r,\mathrm{X}}$ d'un diviseur de Weil (défini par le pfaffien) qui n'est pas de Cartier. En particulier $\mathrm{M}^0_{\mathrm{SO}_r,\mathrm{X}}$ ne peut être localement factorielle. En fait, on peut classifier tous les G semi-simples pour lesquels $\mathrm{M}_{\mathrm{G,X}}$ est localement factorielle. Le résultat est surprenant :

Théorème 7.7.— *Supposons* G *semi-simple et soit* $\tau \in \pi_1(\mathrm{G})$. *La variété* $\mathrm{M}^\tau_{\mathrm{G,X}}$ *est localement factorielle si et seulement si* G *est spécial au sens de Serre.*

Ce théorème est démontré dans [B-L-S] pour G classique et G_2 et dans [S5] pour les cas restants. On retrouve le théorème de Drezet-Narasimhan : $\mathrm{M}_{\mathrm{SL}_r,\mathrm{X}}$ est localement factorielle [D-N]. Bien que ces espaces de modules ne soient donc pas localement factoriels en général, ils sont néanmoins de Gorenstein ([K-N] pour G simplement

connexe, [B-L-S], 13.6 en général)

8. Le cas où X n'est pas lisse

(8.1) En vue de la formule de décomposition (3.1.2) qui lie les espaces de blocs conformes d'une courbe stable singulière aux espaces de blocs conformes de sa désingularisée, on peut se demander si l'on ne peut pas démontrer une telle formule directement pour les espaces de G-fonctions thêta généralisées. Ceci a été fait par Narasimhan et Ramadas [N-R] pour SL_2. Le cas général se heurte cependant à une difficulté : on ne dispose pas, sauf pour GL_r et O_r, des espaces de modules des G-fibrés semi-stables sur une courbe singulière. Déjà, la définition même d'un G-fibré semi-stable n'est pas connue. Ainsi, dans l'argument de dégénérescence, Narasimhan et Ramadas considèrent GL_2 et se ramènent ensuite à SL_2 en utilisant la formule de comparaison de GL_r-fonctions thêta aux SL_r-fonctions thêta de Donagi et Tu.

(8.2) Pour $\mathrm{G} = \mathrm{GL}_r$, Simpson a construit l'espace de modules dans [Si], puis j'ai fait de même dans le cas orthogonal dans [S1]. La construction est valable pour les courbes de Cohen-Macaulay et marche aussi dans le cas relatif. Il s'avère qu'il faut considérer les faisceaux cohérents de Cohen-Macaulay $\mathcal{F}$ qui dans le cas orthogonal sont munis d'une identification symétrique σ avec $\mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \omega_{\mathrm{X}})$. J'ai appelé un tel couple $(\mathcal{F}, \sigma)$ un faisceau ω_{X}-quadratique. Pour définir la semi-stabilité on procède comme dans le cas lisse en remplaçant le rang par la multiplicité (le premier coefficient du polynôme de Hilbert par rapport à une polarisation fixé à l'avance) et le degré par la caractéristique d'Euler-Poincaré.

Théorème 8.3.— *Il existe un espace de modules grossier $\mathcal{Q}_{\mathrm{X}}(r)$ pour les faisceaux ω_{X}-quadratiques semi-stables sur une courbe de Cohen-Macaulay. C'est une variété projective dont les points fermés correspondent aux classes de $\mathcal{S}$-équivalence de tels faisceaux.*

Ce théorème (et la définition de $\mathcal{S}$-équivalence dans ce cas) se trouve dans [S1].

(8.4) À part leur construction, on sait très peu de choses sur ces espaces de modules. J'ai montré dans le cas orthogonal, que l'espace de modules $\mathcal{Q}_{\mathrm{X}}(r)$ a au moins deux composantes, en généralisant le théorème d'invariance mod 2 de Riemann-Atiyah-Mumford-Kempf aux courbes de Cohen-Macaulay. Ce théorème affirme que si $\mathcal{F}$ est une famille de fibrés vectoriels sur une courbe lisse, paramétrée par la variété S, alors la dimension de $\mathrm{H}^0(\mathrm{X}, \mathcal{F}_s)$ modulo 2 est localement constante sur S. Plus précisément, j'ai montré le résultat suivant, valable aussi en dimension supérieure. Soit $\mathrm{X} \to \mathrm{S}$ un morphisme de Cohen-Macaulay, projectif de dimension relative n entre deux schémas de dimension finie définis sur un corps de caractéristique $\neq 2$. Soit $(\mathcal{F}, \sigma)$ un faisceau cohérent sur X, plat sur S et tel que $\mathcal{F}_s$

soit de Cohen-Macaulay et de dimension m sur les fibres. Supposons de plus que $\mathcal{F}$ est muni d'une identification symétrique (resp. anti-symétrique) $\sigma : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^\vee$, où l'on pose $\mathcal{F}^\vee = \underline{Ext}^{n-m}_{\mathcal{O}_{\mathrm{X}}}(\mathcal{F}, \omega_{\mathrm{X}/\mathrm{S}})$.

Théorème 8.5.— *Sous ces hypothèses,* $\mathrm{R}\pi_*\mathcal{F}$ *est représentée dans la catégorie dérivée* $\mathrm{D}^b_c(\mathrm{S})$ *par un complexe parfait* $\mathrm{L}^\cdot$ *de longueur* m *munie d'un isomorphisme symétrique (resp. antisymétrique)* $\psi : \mathrm{L}^\cdot \to \mathrm{L}^{\cdot *}[-m]$.

Considérons plus particulièrement le cas $\mathrm{X} \times \mathrm{S} \to \mathrm{S}$, où X est une courbe de Cohen-Macaulay. Alors on peut déduire du théorème que, localement sur S, la cohomologie de $\mathcal{F}$ est la cohomologie d'un complexe de $\mathcal{O}_{\mathrm{S}}$-modules libre

$$0 \longrightarrow \mathrm{L} \xrightarrow{\alpha} \mathrm{L}^* \longrightarrow 0$$

avec α antisymétrique. Mais alors $h^0(\mathrm{X}, \mathcal{F}_s)$ est congruent modulo 2 au rang de L, le rang d'une matrice antisymétrique étant pair, et donc localement constant.

9. Thêta-caractéristiques des courbes planes

(9.1) Les deux dernières sections sont consacrées aux thêta-caractéristiques des courbes sur une surface. Cette classe de faisceaux sur une surface, ayant pour support une courbe, apparaît naturellement dans la classification des fibrés vectoriels sur le plan ou l'espace projectif. Je me restreindrai ici au cas où X est le plan projectif. Une thêta-caractéristique (généralisée) d'une courbe plane C est un $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$-module $\mathcal{F}$ de dimension 1 muni d'une identification σ symétrique avec son $\omega_{\mathbb{P}^2}$-dual $\underline{\mathrm{Ext}}^1_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}}(\mathcal{F}, \omega_{\mathbb{P}^2})$ dont le support schématique, *i.e.* le 0-ème idéal de Fitting, est égal à C.

Théorème 9.2.— *Il existe un espace de modules grossier* $\Theta_{\mathbb{P}^2}(d)$ *pour les thêta-caractéristiques semi-stables de multiplicité* d. *De plus, la variété* $\Theta_{\mathbb{P}^2}(d)$ *est normale, n'a que des singularités rationnelles et sa dimension est* $d(d+3)/2$

Cet espace compactifie la variété des thêta-caractéristiques des courbes planes lisse (c'était le but de sa construction). Je l'obtiens comme sous-schéma fermé de l'espace de modules des faisceaux ω_{X}-quadratiques de Cohen-Macaulay semi-stables relatif à la famille universelle des courbes de degré d sur $\mathbb{P}^2$.

(9.3) D'après le théorème 8.5 pour $n = 2$ et $m = 1$, $\Theta_{\mathbb{P}^2}(d)$ a au moins deux composantes correspondant aux thêta-caractéristiques paires, *i.e.* $(\mathcal{F}, \sigma)$ telles que $h^0(\mathcal{F}) = 0 \bmod 2$, et aux thêta-caractéristiques impaires, *i.e.* telles que $h^0(\mathcal{F}) = 1 \bmod 2$. Si d est impair on a une troisième composante, noté $\Theta_{can}(d)$, correspondant aux thêta-caractéristiques canoniques, *i.e.* de la forme $\mathcal{O}_{\mathrm{C}}((d-3)/2)$, où C est une courbe de degré d. Si $d = 1$, toute thêta-caractéristique est canonique : $\Theta(d) = \Theta_{can}(d)$. Si $d = 2$ on a $\Theta(d) = \Theta_0(d) \simeq \mathbb{P}_5$.

Théorème 9.4.— *La variété $\Theta_{\mathbb{P}^2}(d)$ est formée, si $d \geq 4$ est pair, de deux composantes irréductibles et, si $d \geq 3$ est impair, de trois composantes irréductibles correspondant aux thêta-caractéristiques paires, impaires et canoniques.*

J'ai donné deux démonstrations de ce théorème. La première, dans [S1], consistait à se ramener au résultat correspondant pour l'ouvert des thêta-caractéristiques ayant support schématique lisse étudié précédemment par Beauville [B1] et Catanese. La seconde preuve est plus directe : je retrouve le théorème en étudiant le lieu de Brill-Noether via les ouverts des thêta-caractéristiques ne passant pas par un point, qui ont une description simple en termes de fibrés de Higgs quadratiques [S3].

(9.5) On a un morphisme $\sigma_\Theta : \Theta(d) \longrightarrow \mathbb{P}^{\mathrm{N}}$ avec $\mathrm{N} = d(d+3)/2$, défini en associant à la classe d'une thêta-caractéristique semi-stable sa courbe sous-jacente. Au-dessus de l'ouvert des courbes lisses, σ_Θ est étale de degré 2^{2g}, la fibre au dessus d'une courbe lisse C s'identifiant à l'ensemble de thêta-caractéristiques classiques sur C. Par contre, ce morphisme n'est pas quasi-fini : si C est intègre, la fibre est finie si et seulement si C n'a que de singularités simples; si C est une courbe lisse à structure multiple (*i.e.* $\mathrm{C} = r\mathrm{C}'$ en tant que diviseur de Weil avec C' lisse), la fibre contient l'espace des $\mathrm{O}(r)$-fibrés principaux sur C'. Désignons par $\mathcal{C}^f_{\mathbb{P}^2}(d)$ l'ouvert des courbes au-dessus desquelles la fibre est finie. En utilisant le théorème précédent, on peut montrer qu'il y a 2^{2g} thêta-caractéristiques, comptées avec multiplicité, dont $2^{g-1}(2^g+1)$ paires et $2^{g-1}(2^g-1)$ impaires sur toute courbe de $\mathcal{C}^f_{\mathbb{P}^2}(d)$. La définition de thêta-caractéristique généralisée m'a ainsi permis de retrouver toutes les thêta-caractéristiques, ce qui répondait à une question de J. Harris dans [H], qui avait calculé le nombre des thêta-caractéristiques localement libres sur leur support.

10. Groupe de Picard et famille universelle de $\Theta(d)$

(10.1) Dans [S3] je calcule le groupe de Picard de $\Theta(d)$ et j'étudie la question de la factorialité locale avec celle de l'existence d'une famille universelle. Il y a deux fibrés en droites naturels sur $\Theta(d)$: l'image réciproque $\mathcal{L}$ de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{\mathrm{M}}}(1)$ sous σ_Θ et le fibré déterminant $\mathcal{D}$.

Théorème 10.2.— *On a pour le groupe de Picard de la composante paire :*

$$\mathrm{Pic}(\Theta_0(d)) = \begin{cases} \mathbb{Z}\mathcal{L} & si\ d = 3,4 \\ \mathbb{Z}\mathcal{L} \times \mathbb{Z}\mathcal{P} & si\ d = 5 \\ \mathbb{Z}\mathcal{L} \times \mathbb{Z}\mathcal{D} & si\ d \geq 6 \end{cases}$$

où, dans le cas $d = 5$, $\mathcal{P}$ est une racine canonique de $\mathcal{D}$. De plus, sur l'ouvert $\Theta_0^{reg}(d)$ des thêta-caractéristiques paires régulièrement stables, la restriction de $\mathcal{D}$ admet une racine $\mathcal{P}$ pour $d \geq 5$, ainsi que la restriction de $\mathcal{L}$ si $d \geq 4$ est pair.

La racine $\mathcal{P}$ est à nouveau un pfaffien. Son existence se montre comme dans le cas des courbes en utilisant le théorème 8.5. On déduit de ces théorème que ces variétés sont rarement localement factorielles : pour la composante paire c'est exactement le cas quand $d = 1, 2, 3, 5$. Pour la composante impaire, on a un résultat analogue, voir ([S3], 1.2). Bien que ce théorème ressemble à ce qui se passe dans le cas des courbes, sa démonstration est radicalement différente, étant donné que l'on ne dispose pas d'uniformisation ici. Soit $\Theta_{=0}(d) \subset \Theta_0(d)$ l'ouvert des thêta-caractéristiques $(\mathcal{F}, \sigma)$ *ineffectives* (*i.e.* $h^0(\mathcal{F}) = 0$). Le théorème ci-dessus est démontré en étudiant d'une part le groupe de Picard de l'ouvert $\Theta_{=0}(d) \subset \Theta_0(d)$ via une résolution canonique des thêta-caractéristiques ineffectives, et d'autre part le lieu de Brill-Noether des thêta-caractéristiques spéciales (*i.e.* non ineffectives).

(10.3) Pour l'existence d'une famille universelle, j'obtiens le résultat suivant. Soit U un ouvert non-vide du module des thêta-caractéristiques régulièrement stables paires (resp. impairs). On appelle famille universelle sur U une famille $(\mathcal{F}, \sigma)$ paramétrée par U telle que le morphisme modulaire induit $\mathrm{U} \to \Theta^{reg}(d)$ soit l'inclusion.

Théorème 10.4.— *Soit $d \geq 3$. Si d est pair il n'existe pas de famille universelle sur* U. *Si d est impair il existe une famille universelle localement dans la topologie de Zariski, mais il n'existe pas de famille universelle globalement sur $\Theta^{reg}(d)$.*

La non-existence d'une famille universelle dans le cas $d = 4$ est l'obstruction majeure à contourner si l'on veut démontrer la rationalité des 4-instantons via l'approche aux 4-instantons de Ellingsrud et Strømme.

Tableau A

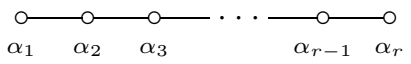
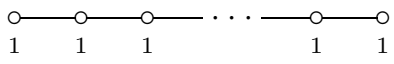
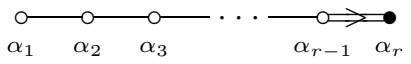
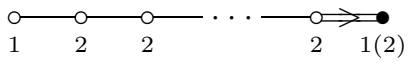
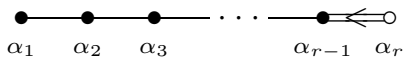
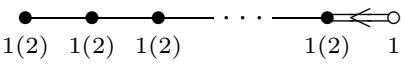
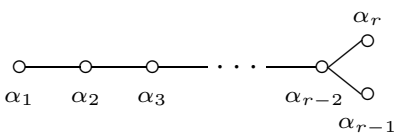
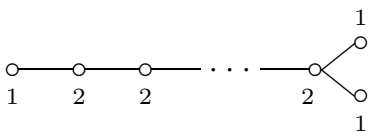
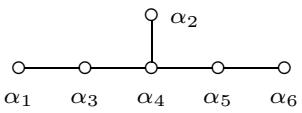
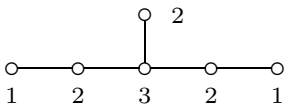
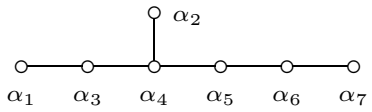
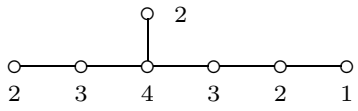
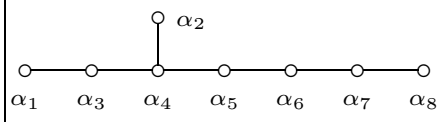
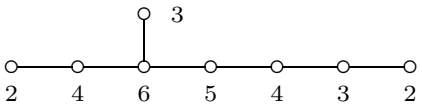
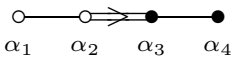
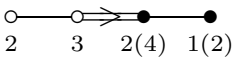
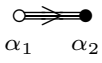
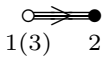
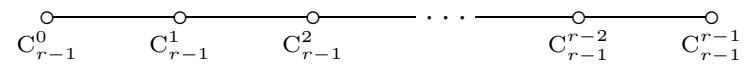
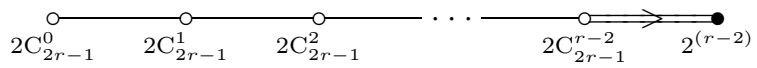
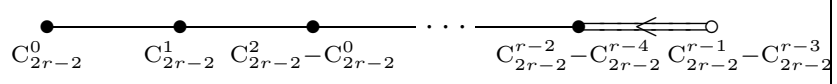
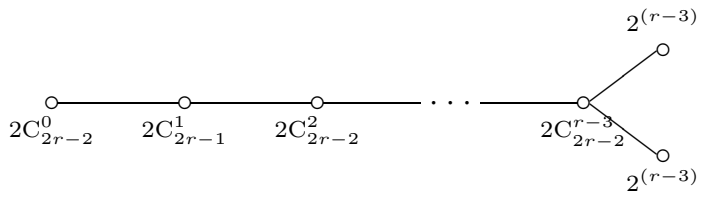
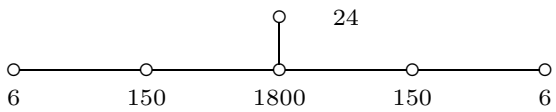
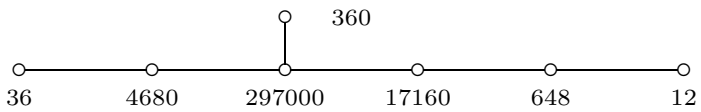
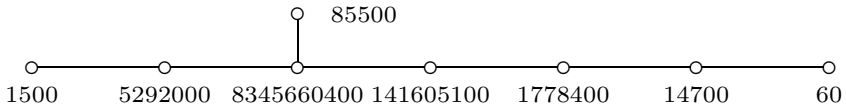
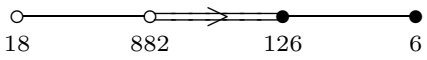
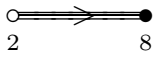
	Diagramme étiquettes : α_i	q	I_c	**Diagramme** étiquettes: $c_i(c_i^\vee)$	$h^\vee$
A_r		1	$r+1$		$r+1$
B_r		2	2		$2r-1$
C_r		2^{r-1}	2		$r+1$
D_r		1	4		$2r-2$
E_6		1	3		12
E_7		1	2		18
E_8		1	1		30
F_4		4	1		4
G_2		6	1		9

Tableau B

Type	d_{Ad}	**Diagramme (étiquettes: indice de Dynkin)**	$d_{\mathfrak{g}}$
A_r	$2r+2$		1
$\mathrm{B}_{r(\geq 3)}$	$4r-2$		2
C_r	$2r+2$		1
$\mathrm{D}_{r(\geq 4)}$	$4r-4$		2
E_6	24		6
E_7	36		12
E_8	60		60
F_4	8		6
G_2	18		2

References

[B1] A. Beauville Le groupe de monodromie des familles universelles d'hypersurfaces et d'inter sections complètes. *Lecture Notes in Math.* 1194:8–18, 1986

[B2] A. Beauville. Conformal blocks, fusion rules and the Verlinde formula. In *Proceedings of the Hirzebruch 65 Conference on Algebraic Geometry (Ramat Gan, 1993)*, volume 9 of *Israel Math. Conf. Proc.*, pages 75–96, Ramat Gan, 1996. Bar-Ilan Univ.

[B-L] A. Beauville and Y. Laszlo. Conformal blocks and generalized theta functions. *Comm. Math. Phys.*, 164(2):385–419, 1994.

[B-D] A. Beilinson and V. Drinfeld. Quantization of Hitchin's integrable system and Hecke eigensheaves. *Vérsion préliminaire.*

[D-N] J.-M. Drezet and M. S. Narasimhan. Groupe de Picard des variétés de modules de fibrés semi-stables sur les courbes algébriques. *Invent. Math.*, 97(1):53–94, 1989.

[D-S] V. G. Drinfeld and C. Simpson. B-structures on G-bundles and local triviality. *Math. Res. Lett.*, 2(6):823–829, 1995.

[D] E. Dynkin. Semisimple subalgebras of semisimple lie algebras. *AMS Tranl. Ser. II*, 6:111–244, 1957.

[F] G. Faltings. A proof for the Verlinde formula. *J. Algebraic Geom.*, 3(2):347–374, 1994.

[H] J. Harris. Theta-characteristics on Algebraic Curves *Trans. Amer. Math. Soc.* 271:611–638, 1982

[K] V. G. Kac. *Infinite-dimensional Lie algebras.* Cambridge University Press, Cambridge, third edition, 1990.

[N-R] M. S. Narasimhan and T. R. Ramadas Factorisation of generalized Theta functions I *Inv. Math.* 114:565–623, 1993

[K-N-R] S. Kumar, M. S. Narasimhan, and A. Ramanathan. Infinite Grassmannians and moduli spaces of G-bundles. *Math. Ann.*, 300(1):41–75, 1994.

[K-N] S. Kumar and M.S. Narasimhan, Picard group of the moduli spaces of G-bundles *Math. Ann.*, 308(1):155–173, 1997.

[P] C. Pauly. Espaces de modules paraboliques et blocs conformes. *Duke Math. Journal*, 84:217–235, 1996.

[Si] *C. Simpson.* Moduli of representations of the fundamental group of a smooth projective variety. I *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, 79:47–129, 1994.

[T] C. Teleman. Lie algebra cohomology and the fusion rules. *Comm. Math. Phys.*, 173:265–311, 1995.

[T-U-Y] A. Tsuchiya, K. Ueno and Y. Yamada. Conformal field theory on universal family of stable curves with gauge symmetries. *Adv. Studies in Pure Math.*, 19:459–566, 1989.

Bibliographie

[S1] C. Sorger. Thêta-caractéristiques des courbes tracées sur une surface lisse. *J. reine angew. Math. (Crelle)*, 435:83–118, 1993.

[S2] C. Sorger. La semi-caractéristique d'Euler-Poincaré des faisceaux ω-quadratiques sur un schéma de Cohen-Macaulay. *Bull. Soc. Math. France*, 122:225–233, 1994.

[S3] C. Sorger. Groupes de Picard de la variété des thêta-caractéristiques des courbes planes. *Ann. congrès européen d'Europroj, Catania, Marcel Dekker to appear.*

[S4] C. Sorger. La formule de Verlinde. *Astérisque*, 237:Exp. No. 794, 3, 87–114, 1996. Séminaire Bourbaki, Vol. 1994/95.

[L-S] Y. Laszlo and C. Sorger. The line bundles on the moduli of parabolic G-bundles over curves and their sections. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 30(4):499–525, 1997.

[B-L-S] A. Beauville, Y. Laszlo, and C. Sorger. The Picard group of the Moduli of G-bundles on a Curve. *To appear in Compostio Math.*, 1996.

[S5] C. Sorger. On Moduli of G-bundles for exceptionnal G. *alg-geom/9709025.*

Christoph Sorger
Institut de mathématiques – CP 7012
Université Paris 7
2, place Jussieu
F-75251 PARIS Cedex 05