Le groupe de Picard de la variété des thêta-caractéristiques des courbes planes

CH. SORGER, Institut de mathématiques Jussieu (UMR 9994); Université Paris 7 (Denis Diderot) - Case Postale 7012; 2, place Jussieu; F-75251 Paris CEDEX 05; e-mail: christoph.sorger@math.jussieu.fr

1. INTRODUCTION

Dans le présent travail je poursuis l'étude de l'espace des modules des thêta-caractéristiques des courbes tracées sur une surface de [S1] dans le cas du plan projectif: je calcule le groupe de Picard des composantes irréductibles et j'étudie les questions de factorialité locale et de l'existence d'une famille universelle.

On se place sur un corps algébriquement clos k de caractéristique 0. Rappelons qu'une *thêta-caractéristique* (généralisée) sur $\mathbb{P}^2$ est un $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$-module $\mathcal{F}$ de dimension 1 muni d'une identification symétrique σ avec son $\omega_{\mathbb{P}^2}$-dual. À $(\mathcal{F}, \sigma)$ on associe une courbe, le support schématique de $\mathcal{F}$, définie par le 0-ème idéal de Fitting de $\mathcal{F}$, dont le degré est appelé *multiplicité* de $\mathcal{F}$. Soit $\Theta(d)$ l'espace de modules grossier pour les thêta-caractéristiques semi-stables de multiplicité d sur $\mathbb{P}^2$ D'après ([S1], 0.5), c'est une variété algébrique normale et projective de dimension $\mathrm{M} = d(d+3)/2$; l'ouvert $\Theta^{reg}(d)$ correspondant aux thêta-caractéristiques $(\mathcal{F}, \sigma)$ régulièrement stables (*i.e.* telles que $\mathcal{F}$ soit stable) est lisse. On a un morphisme

$$\sigma_\Theta : \Theta(d) \longrightarrow \mathbb{P}^{\mathrm{M}},$$

défini en associant à la classe d'une thêta-caractéristique semi-stable son support schématique. Au-dessus de l'ouvert des courbes lisses, σ_Θ est étale de degré 2^{2g}: la fibre au dessus d'une courbe lisse C s'identifie à l'ensemble des thêta-caractéristiques classiques sur C. Par contre, ce morphisme n'est pas quasi-fini: si C est à structure multiple d'une courbe lisse (*i.e.* $\mathrm{C} = r\mathrm{C}'$ en tant que diviseur de Weil avec C' lisse), la fibre contient l'espace des modules de fibrés $\omega_{\mathrm{C}'}$-quadratiques de rang r sur C'.

À part la composante irréductible $\Theta_{can}(d)$ (existant pour d impair) des thêta-caractéristiques *canoniques*, *i.e.* de la forme $\mathcal{O}_{\mathrm{C}}((d-3)/2)$ avec C une courbe de degré d, la variété $\Theta(d)$ admet deux composantes irréductibles, notés $\Theta_0(d)$ et $\Theta_1(d)$,

distingués par la parité de $h^0(\mathcal{F})$ [S1]. Si $d = 1$, toute thêta-caractéristique est canonique: $\Theta(d) = \Theta_{can}(d)$. Si $d = 2$ on a $\Theta(d) = \Theta_0(d) \simeq \mathbb{P}_5$. On supposera dans ce qui suit que $d \geq 3$.

Il y a deux fibrés en droites naturels sur $\Theta(d)$: l'image réciproque $\mathcal{L}$ de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{\mathbb{M}}}(1)$ sous σ_Θ et le fibré déterminant $\mathcal{D}$ (*cf.* 6.2 pour sa définition).

Théorème 1.1.— *On a pour le groupe de Picard de la composante paire:*

$$\mathrm{Pic}(\Theta_0(d)) = \begin{cases} \mathbb{Z}\mathcal{L} & si\ d = 3, 4 \\ \mathbb{Z}\mathcal{L} \times \mathbb{Z}\mathcal{P} & si\ d = 5 \\ \mathbb{Z}\mathcal{L} \times \mathbb{Z}\mathcal{D} & si\ d \geq 6 \end{cases}$$

où, dans le cas $d = 5$, $\mathcal{P}$ est une racine canonique de $\mathcal{D}$. De plus, sur l'ouvert $\Theta_0^{reg}(d)$ des thêta-caractéristiques paires régulièrement stables, la restriction de $\mathcal{D}$ admet une racine $\mathcal{P}$ pour $d \geq 5$ ainsi que la restriction de $\mathcal{L}$ si $d \geq 4$ est pair.

Le fibré $\mathcal{P}$ du théorème, défini dans (6.3), sera appelé fibré *pfaffien*.

Considérons le diagramme commutatif de groupes abéliens (où Cl désigne le groupes des classes d'équivalence de diviseurs de Weil)

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Pic}(\Theta_0(d)) \arrow[r, "c"] \arrow[d, "r_1"'] & \mathrm{Cl}(\Theta_0(d)) \arrow[d, "r_2"] \\ \mathrm{Pic}(\Theta_0^{reg}(d)) \arrow[r, "c^{reg}"] & \mathrm{Cl}(\Theta_0^{reg}(d)) \end{tikzcd}$$

Le morphisme canonique c^{reg} est un isomorphisme, $\Theta_0^{reg}(d)$ étant lisse. D'après ([S1], 8.6) on sait que $\mathrm{codim}_{\Theta_0(d)}(\Theta_0(d) - \Theta_0^{reg}(d)) \geq 2$ pour $d \geq 3$: la restriction r_2 est donc un isomorphisme. Il découle de la normalité de $\Theta_0(d)$ que la restriction r_1 est injectif. Par conséquent, $\Theta_0(d)$ est localement factorielle si et seulement si r_1 est un isomorphisme. En vue du résultat précédent, ceci est le cas (autre pour $d = 1, 2$) exactement quand $d = 3$ ou 5.

Pour la composante impaire, on a un résultat analogue:

Théorème 1.2.— *On a pour le groupe de Picard de la composante impaire:*

$$\mathrm{Pic}(\Theta_1(d)) = \begin{cases} \mathbb{Z}\mathcal{L} \times \mathbb{Z}\mathcal{D} \times \mathbb{Z}\mathcal{M} & si\ d = 6 \\ \mathbb{Z}\mathcal{L} \times \mathbb{Z}\mathcal{D} & si\ d \geq 4, d \neq 6 \end{cases}$$

où pour $d = 6$ le fibré $\mathcal{M}$ provient du fermé des thêta-caractéristiques telles que $h^0(\mathcal{F}) \geq 3$, qui est un diviseur irréductible pour cette valeur de d. De plus, sur l'ouvert $\Theta_1^{reg}(d)$ des thêta-caractéristiques impaires régulièrement stables, la restriction de $\mathcal{L}$ admet une racine pour $d \geq 4$.

On en déduit, comme ci-dessus, que la variété $\Theta_1(d)$ n'est pas localement factorielle pour $d \geq 4$.

Soit $\Theta_{=0}(d) \subset \Theta_0(d)$ l'ouvert des thêta-caractéristiques $(\mathcal{F}, \sigma)$ *ineffectives* (*i.e.* $h^0(\mathcal{F}) = 0$) et $\Theta_{=1}(d) \subset \Theta_1(d)$ l'ouvert des thêta-caractéristiques qui sont *semi-ineffectives* (*i.e.* $h^0(\mathcal{F}) = 1$). Nous démontrerons les théorèmes ci-dessus en étudiant d'une part, le groupe de Picard des ouverts $\Theta_{=0}(d) \subset \Theta_0(d)$ et $\Theta_{=1}(d) \subset \Theta_1(d)$ via la résolution des thêta-caractéristiques (semi-)ineffectives de la section 5, et d'autre

part (section 4), le lieu de Brill-Noether des thêta-caractéristiques spéciales (*i.e.* ni ineffectives, ni semi-ineffectives)

Enfin, nous étudierons la question de l'existence d'une famille universelle: Soit U un ouvert non-vide de l'ouvert des thêta-caractéristiques régulièrement stables paires (resp. impairs). On appelle famille universelle sur U une famille $(\mathcal{F}, \sigma)$ paramétrée par U telle que le morphisme modulaire induit $\mathrm{U} \to \Theta^{reg}(d)$ soit l'inclusion.

Théorème 1.3.— *Soit $d \geq 3$. Si d est pair il n'existe pas de famille universelle sur* U. *Si d est impair il existe une famille universelle localement dans la topologie de Zariski, mais il n'existe pas de famille universelle globalement sur $\Theta^{reg}(d)$.*

Remerciements: Je tiens à remercier Joseph Le Potier pour les discussions que nous avons eues pendant la préparation du présent travail.

2. THETA-CARACTERISTIQUES DES COURBES PLANES [S1]

(2.1) Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent pur de dimension 1 sur le plan projectif, *i.e.* tel que tout sous-faisceau cohérent non trivial de $\mathcal{F}$ soit de dimension 1. C'est un faisceau de Cohen-Macaulay; il admet donc une résolution

$$0 \longrightarrow \mathrm{A} \xrightarrow{\alpha} \mathrm{B} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

par des faisceaux localement libres sur $\mathbb{P}^2$. Le *support schématique* de $\mathcal{F}$, noté $\mathrm{supp}_s(\mathcal{F})$ est la courbe définie par $\det(\alpha)$. Posons $\mathcal{F}^\vee = \underline{\mathrm{Ext}}^1_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}}(\mathcal{F}, \omega_{\mathbb{P}^2})$. Si l'on considère $\mathcal{F}$ comme faisceau sur son support schématique C, on a $\mathcal{F}^\vee \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_{\mathrm{C}}}(\mathcal{F}, \omega_{\mathrm{C}})$. De plus, $\chi(\mathcal{F}^\vee) = -\chi(\mathcal{F})$ et le morphisme canonique d'évaluation $\mathcal{F} \to \mathcal{F}^{\vee\vee}$ est un isomorphisme ([S1], 1.1). Une *thêta-caractéristique* sur $\mathbb{P}^2$ est un couple $(\mathcal{F}, \sigma)$ formé d'un $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$-module cohérent de dimension 1 et d'un isomorphisme symétrique $\sigma : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^\vee$. Par conséquent, si $(\mathcal{F}, \sigma)$ est une thêta-caractéristique, alors $\chi(\mathcal{F}) = 0$. Un *morphisme* de thêta-caractéristiques $\varphi : (\mathcal{E}, \tau) \to (\mathcal{F}, \sigma)$ est la donnée d'un morphisme de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$-modules $\varphi : \mathcal{E} \to \mathcal{F}$ tel que $\tau =^\vee \varphi \circ \sigma \circ \varphi$. Soit $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$ un sous-faisceau cohérent de $\mathcal{F}$. On appelle *σ-orthogonal* de $\mathcal{E}$ et on note $\mathcal{E}^\perp$ le noyau du morphisme composé $\mathcal{F} \to \mathcal{F}^\vee \to \mathcal{E}^\vee$. Un sous-faisceau cohérent $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$ est dit *σ-isotrope* si $\mathcal{E} \cap \mathcal{E}^\perp \neq (0)$. Si l'on a $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}^\perp$ on dit que $\mathcal{E}$ est *totalement σ-isotrope*. Une thêta-caractéristique $(\mathcal{F}, \sigma)$ est dite *semi-stable (resp. stable)* si pour tout sous-faisceau totalement σ-isotrope non nul $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$ on a $\chi(\mathcal{E}) \leq 0$ (resp. $<$). Une thêta-caractéristique $(\mathcal{F}, \sigma)$ est semi-stable si et seulement si son faisceau sous-jacent $\mathcal{F}$ est semi-stable. Une thêta-caractéristique stable est somme directe orthogonale de thêta-caractéristiques dont les faisceaux sous-jacents sont stables et 2 à 2 non-isomorphes ([S1], Prop. 1.4). On dit qu'une thêta-caractéristique est *régulièrement stable* si son faisceau sous-jacent est stable.

La catégorie des thêta-caractéristiques semi-stables n'est pas abélienne. On peut néanmoins définir une notion de $\mathcal{S}$-équivalence de deux faisceaux quadratiques: Soit $(\mathcal{F}, \sigma)$ une thêta-caractéristique semi-stable. Alors il existe une filtration par des sous-faisceaux cohérents totalement isotropes $0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{F}_\ell \subset \mathcal{F}$ telle que les faisceaux $\mathcal{E}_i = \mathcal{F}_i/\mathcal{F}_{i-1}$ avec $\mathcal{F}_0 = 0$, soient stables de caractéristique d'Euler-Poincaré nulle pour $i = 1, \ldots, \ell$ et telle que $(\mathcal{F}_\ell^\perp/\mathcal{F}_\ell, \sigma)$ soit une thêta-caractéristique stable. Une thêta-caractéristique $(\mathcal{H}, \sigma)$ est dite *hyperbolique* si elle est isomorphe

à une thêta-caractéristique $(\mathcal{G}\oplus\mathcal{G}^\vee,\tau)$, où $\mathcal{G}$ est stable en tant que faisceau et où τ est donné par la matrice suivante:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc}\mathcal{G} & \mathcal{G}^\vee\end{array} \\ \begin{array}{c}\mathcal{G}^\vee \\ \mathcal{G}\end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\end{array}$$

Munissons $\mathcal{H}_i=\mathcal{E}_i\oplus\mathcal{E}_i^\vee$ de la structure hyperbolique $\sigma_i=\tau$. On définit la thêta-caractéristique gradué associée à $(\mathcal{F},\sigma)$ comme la somme directe orthogonale suivante:

$$\mathrm{gr}(\mathcal{F},\sigma)=\left(\mathcal{F}_\ell^\perp/\mathcal{F}_\ell,\sigma\right)\oplus\left(\bigoplus_{i=1}^{\ell}(\mathcal{H}_i,\sigma_i)\right).$$

La filtration n'est pas unique. Le gradué par contre, ne dépend pas, à isomorphisme près, de la filtration choisie. Par conséquent, on dira que deux thêta-caractéristiques $(\mathcal{E},\tau)$ et $(\mathcal{F},\sigma)$ sont *$\mathcal{S}$-équivalentes* si leurs gradués associés respectifs sont isomorphes. On dira que $(\mathcal{F},\sigma)$ est *poly stable* si

$$(\mathcal{F},\sigma)=\left(\bigoplus_i\mathcal{H}_i^{m_i}\right)\oplus\left(\bigoplus_j\mathcal{F}_j^{n_j}\right),$$

la somme directe étant orthogonale, les $\mathcal{H}_i$ (et de même les $\mathcal{F}_j$) étant deux à deux non-isomorphes et $\mathcal{H}_i=\mathcal{E}_i\oplus\mathcal{E}_i^\vee$ étant hyperbolique *strict i.e.* $\mathcal{E}_i\not\simeq\mathcal{E}_i^\vee$. D'après ce qui précède le gradué d'une thêta-caractéristique est poly-stable et une thêta-caractéristique poly-stable est isomorphe à son gradué. Les points fermés de $\Theta(d)$ correspondent exactement aux thêta-caractéristiques poly-stables ([S1], 0.2).

Soit S une variété algébrique, $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_{\mathrm{S}\times\mathbb{P}^2}$-module. On pose

$$\mathcal{F}^\vee=\underline{\mathrm{Ext}}^1_{\mathcal{O}_{\mathrm{S}\times\mathbb{P}^2}}(\mathcal{F},pr_2^*\omega_{\mathbb{P}^2}).$$

Si $\mathcal{F}$ est une famille S-plate de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$-modules purs de dimension 1, alors $\mathcal{F}^\vee$ est encore S-plat, le morphisme canonique $\mathcal{F}\to\mathcal{F}^{\vee\vee}$ est un isomorphisme et l'on a $(\mathcal{F}^\vee)_s\simeq(\mathcal{F}_s)^\vee$ ([S1], 3.1). Une *famille de thêta-caractéristiques* paramétrée par la variété algébrique S est la donnée d'un couple $(\mathcal{F},\sigma)$, formé d'un $\mathcal{O}_{\mathrm{S}\times\mathbb{P}^2}$-module cohérent $\mathcal{F}$, S-plat, et d'un isomorphisme symétrique $\sigma:\mathcal{F}\to\mathcal{F}^\vee$.

(2.2) Dans ce qui suit on a besoin d'expliciter la construction de $\Theta(d)$: soit N un entier tel que pour toute thêta-caractéristique semi-stable $(\mathcal{F},\sigma)$ le faisceau $\mathcal{F}(\mathrm{N})$ soit engendré par ses sections globales et de cohomologie supérieure nulle. Ceci est possible, la famille des thêta-caractéristiques semi-stables de degré fixé étant limitée ([S1], Prop. 3.3]). Soit $\mathrm{H}=k^{d\mathrm{N}}$ et considérons la variété $\mathrm{T}^{ss}(d,\mathrm{N})$ paramétrant les classes d'équivalence des triplets $[\mathcal{F},\sigma,\alpha]$ avec $(\mathcal{F},\sigma)$ une thêta-caractéristique semi-stable et α une identification de $\mathrm{H}^0(\mathcal{F}(\mathrm{N}))$ avec H (deux triplets $(\mathcal{F},\sigma,\alpha)$ et $(\mathcal{F}',\sigma',\alpha')$ sont équivalents s'il existe un isomorphisme de thêta-caractéristiques $f:(\mathcal{F},\sigma)\to(\mathcal{F}',\sigma')$ tel que $\alpha'=f\circ\alpha$). Le groupe $\mathrm{GL}(\mathrm{H})$ opère sur $\mathrm{T}^{ss}(d,\mathrm{N})$ en associant à $g\in\mathrm{GL}(\mathrm{H})$ et au triplet $[\mathcal{F},\alpha,\sigma]$ le triplet $[\mathcal{F},\alpha\circ g^{-1},\sigma]$. Le stabilisateur d'un point $[\mathcal{F},\alpha,\sigma]$ s'identifie au groupe des automorphismes de la thêta-caractéristiques $(\mathcal{F},\sigma)$. D'après [S1], il existe, quitte à augmenter encore N, un bon quotient de $\mathrm{T}^{ss}(d,\mathrm{N})$ par l'action de $\mathrm{GL}(\mathrm{H})$ qui est l'espace de modules $\Theta(d)$.

La variété $\mathrm{T}^{ss}(d,\mathrm{N})$ est une variété lisse ([S1], Prop. 7.4) et $\mathrm{GL}(\mathrm{H})/\{\pm \mathrm{I}d\}$ opère librement sur l'ouvert des thêta-caractéristiques régulièrement stables. Il en découle que $\Theta(d)$ est normale et n'a que des singularités rationnelles. Il en découle aussi que l'ouvert $\Theta^{reg}(d)$ des thêta-caractéristiques régulièrement stables est lisse. La codimension du fermé des thêta-caractéristiques semi-stables, non régulièrement stables est au moins 2 ([S1], Prop. 8.6).

3. LES THÊTA-CARACTÉRISTIQUES NE PASSANT PAS PAR UN POINT FIXÉ $a \in \mathbb{P}^2$

Dans la démonstration du théorème 4.1, on se ramènera à considérer l'ouvert des thêta-caractéristiques ne passant pas par un point fixé $a \in \mathbb{P}^2$. Cet ouvert a une description simple en termes de fibrés de Higgs *quadratiques* sur $\mathbb{P}^1$.

(3.1) Soit C une courbe projective lisse et soit L un fibré en droites sur C. Un L-*fibré de Higgs* est la donnée d'un couple (G,φ) formé d'un fibré vectoriel G et d'un morphisme $\varphi : \mathrm{G} \to \mathrm{G} \otimes \mathrm{L}$. Un morphisme de fibrés de Higgs de $\mathrm{F}' = (\mathrm{G}',\varphi')$ dans $\mathrm{F}'' = (\mathrm{G}'',\varphi'')$ est la donnée d'un morphisme $f : \mathrm{G}' \to \mathrm{G}''$ tel que $f = \varphi'' \circ (f \otimes \mathrm{Id}) \circ \varphi'$. Ainsi un sous-fibré de Higgs est la donnée d'un sous-fibré $\mathrm{G}' \subset \mathrm{G}$ tel que $\varphi(\mathrm{G}') \subset \mathrm{G}' \otimes \mathrm{L}$. Un fibré de Higgs est dit *semi-stable* (resp. *stable*) si pour tout sous-fibré de Higgs propre et non trivial G' de $\mathrm{F} = (\mathrm{G},\varphi)$ on a $\mu(\mathrm{G}') \leq \mu(\mathrm{G})$ (resp. $<$). Si $\mathrm{F} = (\mathrm{G},\varphi)$ est un fibré de Higgs on note $\mathrm{H}^i(\mathrm{C},\mathrm{F})$ la cohomologie de F, *i.e.* l'hypercohomologie du complexe

$$0 \longrightarrow \mathrm{G} \xrightarrow{\varphi} \mathrm{G} \otimes \mathrm{L} \longrightarrow 0.$$

Si $\mathrm{F}' = (\mathrm{G}',\varphi')$ et $\mathrm{F}'' = (\mathrm{G}'',\varphi'')$ sont deux fibrés de Higgs le fibré des homomorphismes de F' dans F'' est défini par $(\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{G}',\mathrm{G}''),\varphi)$ avec $\varphi(s) = \varphi'' s - s\varphi'$ où s est une section locale de $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{G}',\mathrm{G}'')$. On note $\mathrm{Ext}^q(\mathrm{F}',\mathrm{F}'')$ la cohomologie de $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{F}',\mathrm{F}'')$. Bien sûr, on a $\mathrm{Ext}^0(\mathrm{F}',\mathrm{F}'') = \mathrm{Hom}(\mathrm{F}',\mathrm{F}'')$. Le ω_{C}-dual d'un fibré de Higgs $\mathrm{F} = (\mathrm{G},\varphi)$, noté $\mathrm{F}^\vee$, est défini par la paire $(\mathrm{G}^\vee,\psi)$ où $\psi : \mathrm{G}^\vee \to \mathrm{G}^\vee \otimes \mathrm{L}$ est défini par la transposée ${}^\vee\varphi : \mathrm{G}^\vee \otimes \mathrm{L}^* \to \mathrm{G}^\vee$ de φ. Le morphisme canonique d'évaluation est un isomorphisme.

Définition 3.2.— *On appelle fibré de Higgs quadratique la donnée d'un fibré de Higgs* F *et d'un isomorphisme de Higgs symétrique* $\sigma : \mathrm{F} \to \mathrm{F}^\vee$.

Soit (F,σ) un fibré de Higgs quadratique, $\mathrm{F}' \subset \mathrm{F}$ un sous-fibré de Higgs. On définit *l'orthogonal* de F' et l'on note $\mathrm{F}'^\perp$ le noyau du morphisme composé $\mathrm{F} \to \mathrm{F}^\vee \to \mathrm{F}'^\vee$. Un sous-fibré F' est dit isotrope si $\mathrm{F}' \cap \mathrm{F}'^\perp \neq 0$ et totalement isotrope si $\mathrm{F}' \subset \mathrm{F}'^\perp$. Un fibré de Higgs quadratique est dit *semi-stable* (resp. *stable*) si pour tout sous-fibré totalement isotrope $\mathrm{F}' = (\mathrm{G}',\varphi)$ de $\mathrm{F} = (\mathrm{G},\varphi)$ on a $\mu(\mathrm{G}') \leq \mu(\mathrm{G})$ (resp. $<$). Comme dans 1.4 de [S1], on voit qu'un fibré de Higgs quadratique est semi-stable si et seulement si son fibré de Higgs sous-jacent est semi-stable. Cette équivalence n'est pas vraie pour la notion de stabilité. On dira qu'un fibré de Higgs quadratique est *régulièrement stable* si son fibré de Higgs sous-jacent est stable.

(3.3) Soit $\Gamma_{\mathrm{C,L}}(d)$ l'espace de modules des classes d'isomorphisme de L-fibrés Higgs quadratiques régulièrement stables sur C. Cet espace peut se construire comme suit. Soit N tel que pour tout fibré de Higgs quadratique semi-stable $(\mathrm{G},\varphi,\tau)$

de rang d, le fibré vectoriel $\mathrm{G(N)}$ n'ait pas de cohomologie supérieure et soit engendré par ses sections globales (la famille des fibrés de Higgs semi-stables de rang et degré fixé étant limitée, celle des fibrés de Higgs quadratiques semi-stables de rang fixé l'est aussi). Soit $\mathrm{H} = k^{d\mathrm{N}}$ et $\mathrm{Q}(d, \mathrm{N})$ la variété ([S1], 3.2) des classes d'équivalence des triplets $[\mathrm{G}, \tau, \alpha]$ formés d'un fibré vectoriel ω-quadratique semi-stables (G, τ) et d'une identification α de $\mathrm{H}^0(\mathrm{G(N)})$ avec H (deux triplets sont équivalents s'il existe un isomorphisme de fibrés quadratiques $f : (\mathrm{G}, \tau) \to (\mathrm{G}', \tau')$ tel que $\alpha' = f \circ \alpha$).

Soit $[\underline{\mathrm{G}}, \underline{\tau}, \underline{\alpha}]$ le triplet universel sur $\mathrm{Q}(d, \mathrm{N}) \times \mathrm{C}$. Le sous-faisceau des homomorphismes symétriques $\underline{\mathrm{Sym}}(\underline{\mathrm{G}} \otimes \mathrm{L}, \underline{\mathrm{G}}^\vee \otimes \omega_{\mathrm{C}}) \subset \underline{\mathrm{Hom}}(\underline{\mathrm{G}} \otimes \mathrm{L}, \underline{\mathrm{G}}^\vee \otimes \omega_{\mathrm{C}})$ définit, via $\underline{\tau}$, un sous-faisceau de $\underline{\mathrm{Hom}}(\underline{\mathrm{G}} \otimes \mathrm{L}, \underline{\mathrm{G}} \otimes \omega_{\mathrm{C}})$ qu'on note $\underline{\mathrm{Sym}}(\underline{\mathrm{G}} \otimes \mathrm{L}, \underline{\mathrm{G}} \otimes \omega_{\mathrm{C}})$. Soit

$$\mathrm{HQ}(d, \mathrm{N}) = \mathrm{Vect}(\mathrm{R}^1 pr_{1*} \underline{\mathrm{Sym}}(\underline{\mathrm{G}} \otimes \mathrm{L}, \underline{\mathrm{G}} \otimes \omega_{\mathrm{C}})) \longrightarrow \mathrm{Q}(d, \mathrm{N})$$

le fibré vectoriel (au sens de Grothendieck) associé: sa fibre au-dessus de $[\mathrm{G}, \alpha, \tau]$ s'identifie, par dualité de Serre, aux morphismes $\varphi : \mathrm{G} \to \mathrm{G} \otimes \mathrm{L}$ qui sont τ-symétriques, *i.e.* aux morphismes φ tels que $(\mathrm{G}, \varphi, \tau)$ soit un fibré de Higgs quadratique. Soit $\mathrm{HQ}(d, \mathrm{N})^{reg}$ l'ouvert paramétrant les fibrés de Higgs quadratiques qui sont régulièrement stables. Le groupe $\mathrm{GL(H)}/\{\pm 1\}$ opère librement sur $\mathrm{HQ}^{reg}(d, \mathrm{N})$ et $\Gamma(d)$ est le quotient géométrique par cette action.

(3.4) Soit $\mathbb{P}_1$ une droite du plan projectif ne passant pas par a. Considérons la projection de centre a sur la droite:

$$\pi : \mathbb{P}^2 - \{a\} \longrightarrow \mathbb{P}_1.$$

L'espace total du fibré normal $\mathcal{N} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$ s'identifie à l'ouvert $\mathbb{P}^2 - \{a\}$. Soit $\mathrm{U}_a(d) \subset \Theta(d)$ l'ouvert des thêta-caractéristiques régulièrement stables ne passant pas par a et soit $\Gamma(d) = \Gamma_{\mathbb{P}^1, \mathcal{N}}(d)$ (*cf.* 3.3).

Proposition 3.5.— *L'image directe définit un isomorphisme entre* $\mathrm{U}_a(d)$ *et* $\Gamma(d)$.

Démonstration. Si $\mathcal{F}$ est un faisceau cohérent pur de dimension 1 dont le support $\mathrm{C} = \mathrm{supp}_s(\mathcal{F})$ ne passe pas par a alors l'image directe $\mathrm{G} = \pi_*(\mathcal{F})$ est localement libre (par pureté) de rang $\mathrm{mult}(\mathcal{F})$ et munie d'une structure de $\pi_*(\mathcal{O}_{\mathcal{N}})$-module. La donnée d'une telle structure équivaut à se donner un morphisme $\varphi : \mathrm{G} \to \mathrm{G} \otimes \mathcal{N}$ d'où la structure de Higgs sur G. Réciproquement, la donnée d'un fibré vectoriel sur $\mathbb{P}^1$ muni d'une structure de $\pi_*(\mathcal{O}_{\mathcal{N}})$-module définit un faisceau cohérent pur $\mathcal{F}$ sur $\mathcal{N}$ dont le support est fini au-dessus de $\mathbb{P}^1$: Soit λ la section canonique de $\pi^*(\mathcal{N})$ et considérons le morphisme

$$\varphi - \lambda id_{\mathrm{G}} : \pi^*(\mathrm{G}) \longrightarrow \pi^*(\mathrm{G}) \otimes \pi^*(\mathcal{N}).$$

Le support schématique de $\mathcal{F}$ est alors défini par le déterminant de ce morphisme (c'est la courbe spectrale associé à φ) et $\mathcal{F}$ s'identifie au conoyau du morphisme $(\varphi - \lambda id_{\mathrm{G}}) \otimes \mathrm{Id}_{\mathcal{N}^{-1}}$. Le $\omega_{\mathbb{P}^2}$-dual de $\mathcal{F}$ s'identifie au $\omega_{\mathbb{P}^1}$-dual du fibré de Higgs associé:

Lemme 3.6.— *Soit* $\mathcal{F}$ *un faisceau pur dont le support ne passe pas par* a *et* (G, φ) *le fibré de Higgs associé par la correspondance de la proposition 3.5. Alors le fibré de Higgs associé à* $\mathcal{F}^\vee$ *s'identifie au* $\omega_{\mathbb{P}^1}$*-dual* $(\mathrm{G}^\vee, {}^\vee\varphi)$ *de* (G, φ)

Démonstration. Soit C le support schématique de $\mathcal{F}$. Considéré sur C, le faisceau $\mathcal{F}^\vee$ s'identifie à $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_{\mathrm{C}}}(\mathcal{F},\omega_{\mathrm{C}})$. On va considérer le morphisme fini $\mathrm{C}\to\mathbb{P}^1$ défini par π. La dualité de Serre-Grothendieck fournit un isomorphisme

$$\mathrm{R}\pi_*\mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_{\mathrm{C}}}(\mathcal{F},\omega_{\mathrm{C}})\simeq\mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}}(\mathrm{R}\pi_*\mathcal{F},\omega_{\mathbb{P}^1})$$

dans la catégorie dérivée. Maintenant, comme $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{O}_{\mathrm{C}}$-module de Cohen-Macaulay, on a $\underline{\mathrm{Ext}}^i(\mathcal{F},\omega_{\mathrm{C}})=0$ pour $i\geq 1$ [S2]. Par conséquent, les images directes supérieures étant nulles et $\pi_*\mathcal{F}$ étant localement libre, l'isomorphisme ci-dessus se lit $\pi_*\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_{\mathrm{C}}}(\mathcal{F},\omega_{\mathrm{C}})\simeq\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}}(\pi_*\mathcal{F},\omega_{\mathbb{P}^1})$. Et puisque un isomorphisme dans la catégorie dérivée entre deux complexes de longueur 1 définit un isomorphisme entre les objets on a l'isomorphisme cherché. ∎

La correspondance cherchée est donc obtenu en associant à la thêta-caractéristique $(\mathcal{F},\sigma)$ le fibré de Higgs quadratique $(\mathrm{G},\varphi,\tau)$ où $\mathrm{G}=\pi_*(\mathcal{F})$ et $\tau=\pi_*(\sigma)$. De plus, on déduit de la suite spectrale de Leray qu'elle préserve la caractéristique d'Euler-Poincaré. En particulier, $\mathcal{F}$ est stable si et seulement si le fibré de Higgs associé (G,φ) est stable. Ainsi, si $(\mathcal{F},\sigma)$ est une thêta-caractéristique et $(\mathrm{G},\varphi,\tau)$ le fibré de Higgs quadratique associé alors $(\mathcal{F},\sigma)$ est régulièrement stable si et seulement si $(\mathrm{G},\varphi,\tau)$ est régulièrement stable. ∎

(3.7) On termine la section en montrant une propriété de rigidité pour les fibrés de Higgs quadratiques qu'on utilisera dans la démonstration du théorème 4.1.

Soit (G,σ) un fibré vectoriel ω_{C}-quadratique. L'isomorphisme σ définit une involution $\imath$ sur l'espace vectoriel $\mathrm{Ext}^1(\mathrm{G},\mathrm{G}^\vee)$; le sous-espace vectoriel des éléments symétriques (antisymétriques) est noté $\mathrm{Ext}^1_{sym}(\mathrm{G},\mathrm{G}^\vee)$ ($\mathrm{Ext}^1_{asym}(\mathrm{G},\mathrm{G}^\vee)$). En notant $\mathrm{Ext}^1_{sym}(\mathrm{G},\mathrm{G})$ ($\mathrm{Ext}^1_{asym}(\mathrm{G},\mathrm{G})$) on suppose identifié G et $\mathrm{G}^\vee$ via σ.

Définition 3.8.— *Un fibré vectoriel ω_{C}-quadratique (G,σ) est dit rigide si*

$$\mathrm{Ext}^1_{asym}(\mathrm{G},\mathrm{G})=0.$$

Un fibré de Higgs quadratique dont le fibré vectoriel quadratique sous-jacent est rigide est dit quasi-rigide.

Soit $\mathrm{C}=\mathbb{P}_1$ et $\mathrm{L}=\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)$. Étant donné un fibré vectoriel G sur $\mathbb{P}^1$ on écrit $\mathrm{G}=\bigoplus_{\ell\in\mathbb{Z}} r_\ell\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(\ell)$. La suite des entiers (r_ℓ) tels que $r_\ell\neq 0$ s'appelle *spectre* de G.

Lemme 3.9.— *Soit $(\mathrm{G},\varphi,\sigma)$ un fibré de Higgs quadratique semi-stable. Alors le spectre de* G *est connexe.*

Démonstration. Le fibré de Higgs (G,φ) sous-jacent $(\mathrm{G},\varphi,\sigma)$ étant de même semi-stable on peut appliquer le lemme 3.12 de [LP]. ∎

Soit (G,σ) un fibré quadratique, de spectre (r_ℓ). Comme $\mathrm{Ext}^1_{asym}(\mathrm{G},\mathrm{G})$ est $\mathrm{H}^1(\Lambda^2\mathrm{G}^*\otimes\omega_{\mathbb{P}_1})$, on obtient

$$\begin{aligned}\mathrm{ext}^1_{asym}(\mathrm{G},\mathrm{G})&=h^1\left(\bigoplus_\ell\frac{r_\ell(r_\ell-1)}{2}\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(-2\ell-2)\oplus(\bigoplus_{\ell<m}r_\ell r_m\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(-\ell-m-2))\right)\\&=\sum_{\ell\geq 0}\frac{r_\ell(r_\ell-1)}{2}(2\ell+1)+\sum_{\ell<m\,,\,\ell+m\geq 0}r_\ell r_m(\ell+m+1)\end{aligned}$$

On déduit de ce calcul, en raison de la connexité du spectre d'un fibré de Higgs quadratique semi-stable, le lemme suivant:

Lemme 3.10.— *Le fibré vectoriel* G *sous-jacent à un fibré de Higgs quadratique de rang* d *à la fois semi-stable et quasi-rigide* $(\mathrm{G}, \varphi, \tau)$ *s'identifie ou bien à* $\mathrm{R}_0 = d\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(-1)$ *ou bien à* $\mathrm{R}_1 = \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1} \oplus (d-2)\mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}_1}(-2)$ *(si* $d \geq 3$*).*

4. LIEU DE BRILL-NOETHER DES THÊTA-CARACTÉRISTIQUES

Considérons les ensembles

$$\Theta_r(d) = \{[\mathcal{F}, \sigma] \in \Theta(d)/h^0(\mathcal{F}) \geq r, h^0(\mathcal{F}) = r \bmod 2\},$$

qu'on munit dans 4.2 de leur structure de sous-schéma fermé. Le théorème type Brill-Noether dont on a besoin dans la suite est le suivant:

Théorème 4.1.— *Le fermé* $\Theta_2(d)$ *est un diviseurs irréductible de* $\Theta_0(d)$ *et le fermé* $\Theta_4(d)$ *est de codimension au moins* 2 *pour tout* d*. Le fermé* $\Theta_3(d)$ *est de codimension au moins* 2 *pour tout* d *sauf pour* $d = 6$ *où il est irréductible de codimension* 1*.*

Le but de cette section est de démontrer ce théorème. La méthode employée donne d'ailleurs aussi une nouvelle preuve de l'irréductibilité des composantes paires et impaires de [S1].

(4.2) Soit $(\mathcal{F}, \sigma)$ une famille de thêta-caractéristiques paramétrée par la variété algébrique S et considérons les ensembles

$$\mathrm{S}_r = \{s \in \mathrm{S}/h^0(\mathcal{F}_s) \geq r, h^0(\mathcal{F}_s) = r \bmod 2\}.$$

Les propriétés de base de ces ensembles découlent du fait que d'après [S2], il existe, pour tout $s \in \mathrm{S}$ un voisinage de Zariski U de s et un complexe de $\mathcal{O}_{\mathrm{U}}$-modules libres

$$0 \longrightarrow \mathrm{E} \xrightarrow{\alpha} \mathrm{E}^* \longrightarrow 0, \tag{4.2.1}$$

tel que α soit anti-symétrique et tel que pour tout changement de base $\mathrm{U}' \xrightarrow{g} \mathrm{U}$,

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{U}' \times \mathbb{P}^2 & \xrightarrow{g'} & \mathrm{U} \times \mathbb{P}^2 \\ {\scriptstyle f'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \mathrm{U}' & \xrightarrow{g} & \mathrm{U} \end{array}$$

on ait $\mathrm{H}^i(g^*\mathrm{E}^\bullet) = (\mathrm{R}^i f'_*)g'^*\mathcal{F}$. On en déduit que $h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{F}_s)$ est localement constant modulo 2, une matrice anti-symétrique étant de rang pair, et donc, avec le théorème de semi-continuité, que les S_r sont fermés. Localement, considérons l'idéal engendré par les mineurs d'ordre $(\mathrm{rg}\,(\mathrm{E}) - r + 1)$ de α. Cet idéal ne dépend pas du complexe anti-symétrique particulier choisi. De ce fait, cette construction définit un faisceau d'idéaux sur S entier et l'on munit S_r par la structure schématique ainsi définie. De plus, toujours d'après [S2], étant donné $s \in \mathrm{S}$, on peut supposer que E soit de rang $h^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{F}_s)$ et que $\alpha(s) = 0$. En particulier, pour $s \in \mathrm{S}_r \backslash \mathrm{S}_{r+1}$, le sous-schéma S_r est

défini au voisinage de s par les 1-mineurs d'une $r \times r$-matrice anti-symétrique, donc par $\frac{r(r-1)}{2}$ équations. Par conséquent, par le lemme de Krull,

$$\mathrm{codim}_{\mathrm{S}}(\mathrm{S}_r) \leq \frac{r(r-1)}{2},$$

si $\mathrm{S}_r \backslash \mathrm{S}_{r+1}$ est non-vide.

Pour les ensembles $\Theta_r(d)$ on revient à la construction de $\Theta(d)$ de 2.2: on a une famille universelle sur $\mathrm{T}^{ss}(d,\mathrm{N})$ et donc des sous-schémas $\mathrm{T}^{ss}_r(d,\mathrm{N}) \subset \mathrm{T}^{ss}(d,\mathrm{N})$ définis comme ci-dessus. Ces sous-schémas sont invariants sous l'action de $\mathrm{GL}(\mathrm{H})$ et d'après les propriétés de bons quotients, les images $\Theta_r(d)$ définissent les sous-schémas fermés cherchés de $\Theta(d)$.

(4.3) Soit $a \in \mathbb{P}^2$ et considérons les sous-schémas fermés de $\mathrm{U}_a(d)$

$$\mathrm{U}_{a,r}(d) := \{[\mathcal{F},\sigma] \in \mathrm{U}_a / h^0(\mathcal{F}) \geq r, h^0(\mathcal{F}) = r \bmod 2\}.$$

Proposition 4.4.— *L'ouvert $\mathrm{U}_a(d)$ est, si d est pair, réunion de deux composantes irréductibles correspondant aux thêta-caractéristiques paires et impaires; si d est impair, il est réunion de trois composantes irréductibles correspondant aux thêta-caractéristiques paires, impaires et canoniques. Le fermé $\mathrm{U}_{a,2}(d)$ est irréductible de codimension 1 pour $d \geq 5$, vide sinon. Le fermé $\mathrm{U}_{a,3}(d)$ est de codimension au moins deux sauf si $d = 6$ où il est irréductible de codimension 1.*

Démonstration. On utilise l'interprétation de U_a en termes de fibrés de Higgs de la Proposition 3.5 et l'on reprend les notation de 3.3. Soit $\mathrm{Q}^{reg}(d,\mathrm{N})$ l'ouvert de $\mathrm{Q}(d,\mathrm{N})$ défini par l'image de $\mathrm{HQ}^{reg}(d,\mathrm{N})$ sous la projection canonique

$$p : \mathrm{HQ}(d,\mathrm{N}) \longrightarrow \mathrm{Q}(d,\mathrm{N})$$

et considérons un point fermé $[\mathrm{G},\alpha,\tau]$ de $\mathrm{Q}^{reg}(d,\mathrm{N})$. L'orbite $\mathrm{O}(\mathrm{G},\alpha,\tau)$ de $[\mathrm{G},\alpha,\tau]$ dans $\mathrm{Q}^{reg}(d,\mathrm{N})$ sous l'action de $\mathrm{GL}(\mathrm{H})$ ne dépend que de G (on a $\tau \in k^*$ par stabilité régulière); soit $\mathrm{Z}(\mathrm{G})$ l'image réciproque de $\mathrm{O}(\mathrm{G},\alpha,\tau)$ sous p. On s'intéresse à calculer la codimension de $\mathrm{Z}(\mathrm{G})$ dans $\mathrm{HQ}^{reg}(d,\mathrm{N})$ en fonction du spectre (r_ℓ) de G.

Remarquons déjà que par construction (3.3), $\mathrm{HQ}^{reg}(d,\mathrm{N})$ est lisse de dimension $d(d+3)/2 + n^2$ (avec $n = d\mathrm{N}$) en vue de la Proposition 3.5 et de la lissité de U_a. La variété $\mathrm{Q}^{reg}(d,\mathrm{N})$ est également lisse de dimension $n^2 - d^2 + \mathrm{ext}^0(\mathrm{G},\mathrm{G}) - \mathrm{ext}^1(\mathrm{G},\mathrm{G})$ (on utilise les notations de 3.7). Pour le voir on peut réaliser $\mathrm{Q}(d,\mathrm{N})$, comme dans ([S1], 7.2), comme schéma des points fixes sous une involution d'une variété lisse puis utiliser que de tels schémas sont toujours lisses [F]; sa dimension se calcule suivant la suite exacte (7.6) de [S1]. En appliquant la formule de Riemann-Roch à $\mathrm{S}^2\mathrm{G}^* \otimes \omega_{\mathbb{P}_1}$ on voit $\dim \mathrm{Q}^{reg}(d,\mathrm{N}) = n^2 - d(d-1)/2$. Étant donnée que la codimension de l'orbite de $[\mathrm{G},\alpha,\tau]$ dans $\mathrm{Q}^{reg}(d,\mathrm{N})$ est $\mathrm{ext}^1_{asym}(\mathrm{G},\mathrm{G})$, on déduit des calculs précédents que la la codimension de $\mathrm{Z}(\mathrm{G})$ dans $\mathrm{HQ}^{reg}(d,\mathrm{N})$ est donnée par

$$\begin{aligned}\mathrm{ext}^1_{asym}(\mathrm{G},\mathrm{G}) - \mathrm{ext}^1_{sym}(\mathrm{G},\mathrm{G}(1)) = &\quad h^1(\Lambda^2\mathrm{G}^* \otimes \omega_{\mathbb{P}_1}) - h^1(\mathrm{S}^2\mathrm{G}^* \otimes \omega_{\mathbb{P}_1}(1)) \\ = &\sum_{\ell \geq 0}\left(\frac{r_\ell(r_\ell - 1)}{2} - 2\ell r_\ell\right) + \sum_{\ell+m\geq 0, \ell<m} r_\ell r_m\end{aligned}$$

Par connexité du spectre (lemme 3.9), cette expression est toujours positive, nulle dans exactement trois cas: celui où G est égale à R_0 ou R_1 du lemme 3.10 ou si

$$\mathrm{G} = \mathcal{O}(\ell) \oplus \mathcal{O}(\ell-1) \oplus \ldots \oplus \mathcal{O}(-\ell-1) \oplus \mathcal{O}(-\ell-2).$$

Les images réciproques Z(G) sont, dans ces trois cas, GL(H)/$\{\pm id\}$-invariants et irréductibles. Et comme ils définissent respectivement les thêta-caractéristiques ineffectives, semi-ineffectives et canoniques on déduit la première partie du théorème, la codimension du complémentaire de $\mathrm{U}_{a,2}(d)$ étant, sauf dans le cas des thêta-caractéristiques canoniques, supérieure ou égale à 1 d'après ce qui précède. L'expression ci-dessus vaut 1 exactement, toujours par connexité du spectre, pour

a) $\mathrm{G} = \mathrm{R}_2 = 2\mathcal{O} \oplus (d-4)\mathcal{O}(-1) \oplus 2\mathcal{O}(-2)$ ($d \geq 5$ pour avoir la connexité)

b) $\mathrm{G} = \mathrm{R}_3 = \mathcal{O}(1) \oplus \mathcal{O} \oplus 2\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-2) \oplus \mathcal{O}(-3)$ (ce qui impose $d = 6$)

Les images réciproques Z(G) sont, dans ces deux cas, GL(H)/$\{\pm id\}$-invariants et irréductibles. Ils définissent, respectivement, les sous-schémas localement fermés $\mathrm{U}_{a,2}(d) \backslash \mathrm{U}_{a,4}(d)$ et $\mathrm{U}_{a,3}(6) \backslash \mathrm{U}_{a,5}(6)$ d'où le théorème. ∎

La démonstration montre que le nombre maximal possible de sections linéairement indépendants d'une thêta-caractéristique semi-stable de degré d est donnée, si d est impair, par la dimension de l'espace des sections de (avec $\ell = (d-3)/2$)

$$\mathcal{O}(\ell) \oplus \mathcal{O}(\ell-1) \oplus \ldots \oplus \mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-2) \ldots \oplus \mathcal{O}(-\ell-1) \oplus \mathcal{O}(-\ell-2).$$

Si d est pair, ce nombre est donné par la dimension de l'espace des sections de

$$\mathcal{O}(\ell) \oplus \mathcal{O}(\ell-1) \oplus \ldots \oplus \mathcal{O} \oplus 2\mathcal{O}(-1) \oplus \mathcal{O}(-2) \ldots \oplus \mathcal{O}(-\ell-1) \oplus \mathcal{O}(-\ell-2),$$

On en déduit le corollaire suivant:

Corollaire 4.5.— *Soit $d \geq 3$. Si $(\mathcal{F}, \sigma)$ est une thêta-caractéristique semi-stable de degré d alors on a*

a) On a $h^0(\mathcal{F}) \leq \frac{(d-3)^2}{8} + \frac{3(d-3)}{4} + 1$ si d est impair.

b) On a $h^0(\mathcal{F}) \leq \frac{(d-4)^2}{8} + \frac{3(d-4)}{4} + 1$ si d est pair.

En particulier, $\Theta_2(d) = \emptyset$ si $d \leq 4$, $\Theta_3(d) = \emptyset$ si $d \leq 5$ et $\Theta_4(d) = \emptyset$ si $d \leq 7$.

Lemme 4.6.— *Si $d \geq 5$, il existe une thêta-caractéristique $(\mathcal{F}, \sigma)$ semi-stable de degré d telle que $h^0(\mathcal{F}) = 2$.*

Démonstration. Si $d \geq 6$, on peut considérer par exemple la somme directe orthogonale $\mathcal{O}_{\mathrm{C}} \oplus \mathcal{O}_{\mathrm{C}} \oplus (d-6)\mathcal{O}_\ell(-1)$ avec C une courbe de degré 3 et ℓ une droite de $\mathbb{P}^2$. Si $d = 5$, considérons le fibré vectoriel $\mathrm{G} = 2\mathcal{O} \oplus \mathcal{O}(-1) \oplus 2\mathcal{O}(-2)$ sur $\mathbb{P}^1$ et l'isomorphisme $\sigma : \mathrm{G} \to \mathrm{G}^\vee$ défini par 1 sur l'anti-diagonale, 0 sinon. Soit de plus $\varphi : \mathrm{G} \to \mathrm{G}(1)$ défini par la matrice suivante:

$$\begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec λ et μ des constantes non nuls, α et β non proportionnels. On vérifie cas par cas qu'aucun sous-fibré de G contenant $\mathcal{O}$ n'est de Higgs. Ainsi $(\mathrm{G}, \varphi, \sigma)$ est un fibré de Higgs quadratique semi-stable, définissant, pour $a \in \mathbb{P}^2$ fixé, par le procédé ci-dessus une thêta-caractéristique semi-stable de degré 5 ne passant pas par a. ∎

Proposition 4.7.— *Le complémentaire* $\mathrm{F}_{a,0}(d)$ *de* $\mathrm{U}_{a,0}(d)$ *dans* $\Theta_0(d)$ *(resp.* $\mathrm{F}_{a,1}(d)$ *de* $\mathrm{U}_{a,1}(d)$ *dans* $\Theta_1(d)$*) est une hypersurface irréductible de* $\Theta_0(d)$ *(resp. de* $\Theta_1(d)$*).*

Démonstration. Soient $a, b \in \mathbb{P}^2$. Quitte à échanger a et b il s'agit de montrer l'énoncé ci-dessus pour les thêta-caractéristiques ne passant pas par b. On note $\mathrm{Sym}(\mathrm{R}_0, \mathrm{R}_0(1))$ l'espace vectoriel des morphismes symétriques et $\mathrm{Sym}^{reg}(\mathrm{R}_0, \mathrm{R}_0(1))$ l'ouvert des morphismes symétriques définissant des fibrés de Higgs régulièrement stables.

Lemme 4.8.— *On a, pour* $[\mathrm{R}_0, \alpha, \tau] \in \mathrm{Q}^{reg}$*, l'isomorphisme suivant:*

$$\mathrm{Sym}^{reg}(\mathrm{R}_0, \mathrm{R}_0(1))/\mathrm{K} \simeq \mathrm{U}_{a,=0}(d)$$

avec $\mathrm{K} = \mathrm{Aut}(\mathrm{R}_0, \tau)$ *et où* $\mathrm{U}_{a,=0}(d) \subset \mathrm{U}_{a,0}(d)$ *désigne l'ouvert correspondant aux thêta-caractéristiques ineffectives régulièrement stables.*

Démonstration. Le groupe K s'identifie au stabilisateur de $[\mathrm{R}_0, \alpha, \tau]$ sous l'action de $\mathrm{GL}(\mathrm{H})$ sur Q^{reg}. Ce groupe agit sur $\mathrm{Sym}^{reg}(\mathrm{R}_0, \mathrm{R}_0(1))$ par conjugaison et l'on a le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Sym}^{reg}(\mathrm{R}_0, \mathrm{R}_0(1)) \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "\pi'"'] & \mathrm{Z}(\mathrm{G}) \arrow[d, "\pi"] \\
& \mathrm{U}_{a,=0}(d)
\end{tikzcd}$$

L'inclusion i est compatible aux actions de K et $\mathrm{GL}(\mathrm{H})$ et de plus, π est un quotient géométrique. Il s'ensuit que π' est un quotient géométrique aussi. ∎

Si $(\mathrm{R}, \varphi, \tau)$ est le fibré de Higgs quadratique associé à la thêta-caractéristique $(\mathcal{F}, \sigma)$, le support du faisceau $\mathcal{F}$ est défini par les couples (x, λ) tels que

$$\det(\varphi(x) - \lambda\, \mathrm{Id}_{\mathrm{R}(x)}) = 0.$$

Le fibré des morphismes symétriques $\underline{\mathrm{Sym}}(\mathrm{R}_0, \mathrm{R}_0(1))$ est engendré par ses sections globales. Par conséquent, l'image réciproque sous le morphisme évaluation

$$\mathrm{Sym}(\mathrm{R}_0, \mathrm{R}_0(1)) \longrightarrow \underline{\mathrm{Sym}}(\mathrm{R}_0, \mathrm{R}_0(1))(b)$$

de l'hypersurface des applications linéaires symétriques de R_0 dans $\mathrm{R}_0(1)$ qui sont de déterminant nul est une hypersurface irréductible de $\mathrm{Sym}^{reg}(\mathrm{R}_0, \mathrm{R}_0(1))$. Cette hypersurface est K-invariante et définit, par passage au quotient, l'hypersurface des thêta-caractéristiques de $\mathrm{U}_{a,=0}(d)$ dont le support passe par b. Cette hypersurface est donc irréductible et comme le fermé des thêta-caractéristiques non régulièrement stables est de codimension au moins deux ceci est encore vrai sans supposer la stabilité régulière. Pour voir que l'hypersurface $\mathrm{F}_b(d)$ est encore irréductible dans Θ_0, il suffit de montrer qu'il existe des thêta-caractéristiques ayant au moins deux sections linéairement indépendantes ne passant ni par a ni par b. Pour cela, considérons $\mathrm{Sym}(\mathrm{R}_2, \mathrm{R}_2(1))$. Ce fibré n'est pas engendré par ses sections. Cependant l'image de

$$\mathrm{Sym}(\mathrm{R}_2, \mathrm{R}_2(1)) \longrightarrow \underline{\mathrm{Sym}}(\mathrm{R}_2, \mathrm{R}_2(1))(b)$$

est un espace linéaire de codimension 3 qui n'est pas inclus dans l'hypersurface des applications linéaires symétriques de $\mathrm{R}_2 \to \mathrm{R}_2(1)$ de déterminant nul. Ceci démontre la dernière assertion et par conséquent la première partie de la proposition.

Un argument analogue à celui ci-dessus montre qu'on a, pour $[\mathrm{R}_1, \alpha, \tau] \in \mathrm{Q}^{reg}$, l'isomorphisme suivant, avec $\mathrm{K} = \mathrm{Aut}(\mathrm{R}_1, \tau)$:

$$\mathrm{Sym}^{reg}(\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_1(1))/\mathrm{K} \simeq \mathrm{U}_{a,=1}(d),$$

où $\mathrm{U}_{a,=1}(d) \subset \mathrm{U}_{a,1}(d)$ désigne l'ouvert correspondant aux thêta-caractéristiques semi-ineffectives. Par contre, le fibré vectoriel $\underline{\mathrm{Sym}}(\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_1(1))$ n'est plus engendré par ses sections. Cependant, l'intersection de l'hyperplan image de $\mathrm{Sym}(\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_1(1))$ dans $\underline{\mathrm{Sym}}(\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_1(1))(b)$ avec l'hypersurface des application linéaires symétriques de $\mathrm{R}_1 \to \mathrm{R}_1(1)$ de déterminant nul est irréductible de codimension 1 dans l'image. L'image réciproque de cette intersection définit une hypersurface K-invariante de $\mathrm{Sym}^{reg}(\mathrm{R}_1, \mathrm{R}_1(1))$, définissant l'hypersurface des thêta-caractéristiques de $\mathrm{U}_{a,=1}(d)$ passant par b. Cette hypersurface est donc irréductible et ceci est encore vrai sans supposer la stabilité régulière. Si $d \neq 6$ ceci démontre la proposition, si $d = 6$ il faut encore voir qu'il existe des thêta-caractéristiques ayant 3 sections linéairement indépendantes ne passant ni par a ni par b. Pour cela, considérons l'évaluation

$$\mathrm{Sym}(\mathrm{R}_3, \mathrm{R}_3(1)) \longrightarrow \underline{\mathrm{Sym}}(\mathrm{R}_3, \mathrm{R}_3(1))(b)$$

L'image est un espace linéaire de codimension 5 qui n'est pas inclus dans l'hypersurface des application linéaires symétriques de $\mathrm{R}_2 \to \mathrm{R}_2(1)$ de déterminant nul. Par conséquent il existe de telles thêta-caractéristiques dans $\mathrm{U}_a(6)$ qui sont dans $\mathrm{U}_b(6)$, d'où la proposition. ∎

(4.9) *Démonstration du théorème 4.1:* L'énoncé est vrai pour l'ouvert $\mathrm{U}_{a,0}(d)$ d'après la proposition 4.4. Il suffit donc de montrer que $\Theta_2(d)$ coupe $\mathrm{F}_{a,0}(d)$ suivant un fermé de codimension au moins 2. Soit ℓ une droite de $\mathbb{P}^2$ passant par a, $(\mathcal{F}, \sigma)$ la thêta-caractéristique somme directe orthogonale $d\mathcal{O}(-1)$. Alors $(\mathcal{F}, \sigma) \in \mathrm{F}_{a,0}(d)$. Ainsi, $\mathrm{F}_{a,2}(d)$ est un fermé strict de $\mathrm{F}_{a,0}(d)$. Comme, par la proposition 4.7, $\mathrm{F}_{a,0}(d)$ est irréductible, $\mathrm{F}_{a,2}(d)$ est de codimension au moins 1 dans $\mathrm{F}_{a,0}(d)$. L'assertion sur $\Theta_4(d)$ se déduit de l'assertion analogue pour l'ouvert $\mathrm{U}_{a,0}(d)$ et de ce qui précède. La démonstration pour la composante impaire est analogue. ∎

5. RÉSOLUTION MINIMALE D'UNE THÊTA-CARACTÉRISTIQUE

(5.1) Soit $(\mathcal{F}, \sigma)$ une thêta-caractéristique de degré d. Considérons la k-algèbre gradué $\mathrm{S} = k[\mathrm{X}_0, \mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2]$ et le S-module gradué $\mathrm{M} = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathrm{H}^0(\mathcal{F}(n))$. La résolution minimale gradué de M fournit une résolution:

$$0 \longrightarrow \mathrm{E} \xrightarrow{\phi} \mathrm{F} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0 \tag{5.1.1}$$

avec $\mathrm{E} = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-a_i)$ et $\mathrm{F} = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-b_j)$. Le morphisme ϕ s'identifie à une $n \times n$-matrice ϕ_{ij} avec $\phi_{ij} \in \mathrm{Hom}(\mathcal{O}(-a_i), \mathcal{O}(-b_i))$. Par minimalité de la résolution, il ne peut exister de i, j tel que ϕ_{ij} soit une constante non nulle. On utilisera ce fait un peu plus loin. En appliquant le foncteur $\underline{\mathrm{Hom}}(\bullet, \omega_{\mathbb{P}^2})$ à la résolution 5.1.1 on voit, comme deux résolution minimales sont isomorphes, que $\mathrm{F} \simeq \mathrm{E}^\vee$, *i.e.* que $-b_i = a_i - 3$ après rénumerotation. Posons $b = h^1(\mathcal{F}) = h^0(\mathcal{F})$, $c = h^1(\mathcal{F}(1)) = h^0(\mathcal{F}(-1))$. On a $b > c$.

Proposition 5.2.— *Supposons $(\mathcal{F},\sigma)$ semi-stable. Alors la résolution minimale 5.1.1 est de la forme suivante:*

a) si $b=0$ on a $n=d$ et $(a_i)=(2,\dots,2)$
b) si $b=1$ on a $n=d-2$ et $(a_i)=(2,\dots,2,3)$

De plus, on peut supposer ϕ symétrique dans le deux cas.

Cette proposition est due à Dixon, si $b=0$ [D], à Catanese [C] sinon (*cf.* aussi Laszlo [L]) dans le cas où le support schématique de $(\mathcal{F},\sigma)$ est lisse. L'argument de Laszlo se généralise à notre situation, quitte à remplacer l'argument d'irréductibilité du support qu'il invoque par un argument utilisant la semi-stabilité de $(\mathcal{F},\sigma)$. Nous omettons les détails ici en raison de la proposition suivante.

Proposition 5.3.— *Soit $(\mathcal{F},\sigma)$ une thêta-caractéristique semi-stable. Si $(\mathcal{F},\sigma)$ est ineffective, $\mathcal{F}$ est conoyau du morphisme d_2 symétrique et génériquement injectif, donné par la suite spectrale de Beilinson et σ:*

$$\mathrm{H}^1(\mathcal{F}(-1))\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2)\xrightarrow{d_2}\mathrm{H}^1(\mathcal{F}(-1))^*\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)$$

Si $(\mathcal{F},\sigma)$ est semi-ineffective, alors $\mathcal{F}$ est conoyau du morphisme d_2 symétrique et génériquement injectif, donné par la suite spectrale de Beilinson et σ:

$$\mathrm{K}\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2)\oplus\mathrm{H}^1(\mathcal{F})\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-3)\xrightarrow{d_2}\mathrm{K}^*\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)\oplus\mathrm{H}^1(\mathcal{F})^*\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2},$$

où K *est le noyau de l'application canonique* $\mathrm{H}^1(\mathcal{F}(-1))\to\mathrm{H}^1(\mathcal{F})\otimes\mathrm{V}$ *avec* $\mathrm{V}=\mathrm{H}^0(\mathrm{Q})$*,* Q *étant le quotient tautologique sur* $\mathbb{P}^2$*.*

Démonstration. Soit $\mathcal{E}$ un $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$-module cohérent. La suite spectrale de Beilinson est donnée, en degré 1, par:

$$\mathrm{E}_1^{p,q}=\mathrm{H}^q(\mathbb{P}^2,\mathcal{E}(p))\otimes\Lambda^{-p}\mathrm{Q}^*.$$

Elle est d'aboutissement $\mathcal{E}$ en degré 0, nul sinon.
Soit $(\mathcal{F},\sigma)$ une thêta-caractéristique de degré d. Supposons que $h^0(\mathbb{P}^2,\mathcal{F})\leq 1$. Par décroissance de la suite des $h^1(\mathcal{F}(i))$, on a $h^1(\mathbb{P}^2,\mathcal{F}(1))=0$. Nous allons appliquer la suite spectrale de Beilinson à $\mathcal{F}(1)$, puis tordre par $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)$.

0	0	0
$\mathrm{H}^1(\mathcal{F}(-1))\otimes\Lambda^2\mathrm{Q}^*(-1)$	$\mathrm{H}^1(\mathcal{F})\otimes\mathrm{Q}^*(-1)$	0
0	$\mathrm{H}^0(\mathcal{F})\otimes\mathrm{Q}^*(-1)$	$\mathrm{H}^0(\mathcal{F}(1))\otimes\mathcal{O}(-1)$

Soient H_1 et H_2 les $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$-modules de cohomologie du complexe

$$0\longrightarrow\mathrm{H}^1(\mathcal{F}(-1))\otimes\Lambda^2\mathrm{Q}^*(-1)\xrightarrow{d_1^{-2,1}}\mathrm{H}^1(\mathcal{F})\otimes\mathrm{Q}^*(-1)\longrightarrow 0,$$

et K_2 et K_3 les $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$-modules de cohomologie du complexe

$$0\longrightarrow\mathrm{H}^0(\mathcal{F})\otimes\mathrm{Q}^*(-1)\xrightarrow{d_1^{-1,0}}\mathrm{H}^0(\mathcal{F}(1))\otimes\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)\longrightarrow 0.$$

Le terme $E_2^{p,q}$ s'écrit par conséquent:

0	0	0
H_1	H_2	0
0	K_2	K_3

Soient L_1 et L_3 les $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$-modules de cohomologie du complexe

$$0 \longrightarrow H_1 \xrightarrow{d_2} K_3 \longrightarrow 0$$

Par suite, on a pour le terme E_3:

0	0	0
L_1	H_2	0
0	K_2	L_3

Du fait que $E_3 = E_\infty$, on déduit que $K_2 = L_1 = 0$ et qu'on a la suite exacte

$$0 \longrightarrow L_3 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow H_2 \longrightarrow 0.$$

Déterminons K_3 : Si $b = 0$, on a bien sûr $K_3 = H^0(\mathcal{F}(1)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)$. Si $b = 1$, considérons le diagramme commutatif avec lignes et colonnes exactes, la première ligne étant la dualisé tordue par $H^0(\mathcal{F}) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)$ de la suite exacte d'Euler:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & & M_1 \arrow[r] \arrow[d] & M_2 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & H^0(\mathcal{F}) \otimes Q^*(-1) \arrow[r] \arrow[d, equal] & H^0(\mathcal{F}) \otimes V^* \otimes \mathcal{O}(-1) \arrow[r] \arrow[d] & H^0(\mathcal{F}) \otimes \mathcal{O} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & H^0(\mathcal{F}) \otimes Q^*(-1) \arrow[r] & H^0(\mathcal{F}(1)) \otimes \mathcal{O}(-1) \arrow[r] \arrow[d] & K_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & N_1 \arrow[r] \arrow[d] & N_2 \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Par le lemme du serpent, $M_1 \simeq M_2$ et $N_1 \simeq N_2$. Supposons d'abord que M_1 (et donc aussi M_1) nul. A ce moment-là, N_1 (et aussi N_2) est isomorphe à $H \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)$, où H est le conoyau de l'application canonique $H^0(\mathcal{F}) \otimes V^* \to H^0(\mathcal{F}(1))$. Par conséquent,

K_3 s'identifie à une extension de $\mathrm{H}^0(\mathcal{F}) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$ et $\mathrm{H} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)$. L'espace de telles extensions étant nul, on a, si b=1,

$$\mathrm{K}_3 = \mathrm{H}^0(\mathcal{F}) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \oplus \mathrm{H} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1).$$

Montrons que M_1 non nul est impossible. Sinon, ce faisceau est nécessairement isomorphe à $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)$. Mais ceci signifie que K_3 s'identifie à $\mathcal{O}_\ell \oplus \mathcal{O}(-1)^{d-2}$, ℓ étant une droite. Puisque H_1 est localement libre, ce $\mathcal{O}_\ell$ est contenu dans L_3 et par suite dans $\mathcal{F}$. Mais ceci est en contradiction avec la semi-stabilité de $\mathcal{F}$, la caractéristique d'Euler-Poincaré de $\mathcal{O}_\ell$ étant strictement positive.

Lemme 5.4.— *La suite spectrale de Beilinson appliquée à $\mathcal{F}^\vee(1)$ puis tordue par $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)$ est naturellement isomorphe à la suivante, dont le terme E_1 est donné par*

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{H}^0(\mathcal{F}(1))^* \otimes \Lambda^2\mathrm{Q}^*(-1) & \xrightarrow{{}^\vee d_{1,\mathcal{F}}^{-1,0}} & \mathrm{H}^0(\mathcal{F})^* \otimes \mathrm{Q}^*(-1) & & 0 \\
0 & & \mathrm{H}^1(\mathcal{F})^* \otimes \mathrm{Q}^*(-1) & \xrightarrow{{}^\vee d_{1,\mathcal{F}}^{-2,1}} & \mathrm{H}^1(\mathcal{F}(1))^* \otimes \mathcal{O}(-1)
\end{array}$$

et le terme E_2 par

$$\mathrm{Ker}({}^\vee d_{1,\mathcal{F}}^{-1,0}) \xrightarrow{{}^\vee d_2^{-2,1}} \mathrm{Coker}({}^\vee d_{1,\mathcal{F}}^{-2,1}).$$

Admettons pour un instant ce lemme et terminons la démonstration de la proposition. Montrons d'abord que σ définit un isomorphisme de $\mathrm{K}_3^\vee$ avec H_1: par fonctorialité, σ fournit un isomorphisme au niveau des suites spectrales de Beilinson associés à $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}^\vee$ ce qui donne, en utilisant le lemme précédent, le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{H}^1(\mathcal{F}(-1)) \otimes \Lambda^2\mathrm{Q}^*(-1) & \xrightarrow{d_1^{-2,1}} & \mathrm{H}^1(\mathcal{F}) \otimes \mathrm{Q}^*(-1) \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{H}^0(\mathcal{F}(-1))^* \otimes \Lambda^2\mathrm{Q}^*(-1) & \xrightarrow{{}^\vee d_{1,\mathcal{F}}^{-1,0}} & \mathrm{H}^0(\mathcal{F})^* \otimes \mathrm{Q}^*(-1)
\end{array}$$

Le morphisme induit au niveau des noyaux, donne l'isomorphisme $\tau : \mathrm{H}_1 \to \mathrm{K}_3^\vee$ cherché. On en déduit, en considérant la suite exacte qui définit H_1 et H_2 que H_2 est de degré nul et de caractéristique d'Euler-Poincaré nulle. Comme H_2 est de torsion en tant que conoyau de $\mathcal{F}$, il est nécessairement nul.
Par conséquent, $\mathcal{F}$ s'identifie au conoyau du morphisme $d_2^{-2,1} : \mathrm{H}_1 \to \mathrm{K}_3$. En utilisant la fonctorialité des suites spectrales de Beilinson et la symétrie de σ, on obtient le diagramme commutatif suivant:

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{H}_1 & \xrightarrow{d_2^{-2,1}} & \mathrm{K}_3 \\
{\scriptstyle\tau}\downarrow & \searrow {\scriptstyle d_2} & \downarrow{\scriptstyle {}^\vee\tau} \\
\mathrm{K}_3^\vee & \xrightarrow[{}^\vee d_2^{-2,1}]{} & \mathrm{H}_1^\vee
\end{array}$$

On en déduit que $\mathcal{F}$ s'identifie au conoyau du morphisme symétrique d_2 ∎

Démonstration du lemme 5.4. Revenons à la définition de la suite spectrale de Beilinson: soit $\mathrm{D}^\bullet$ le complexe

$$0 \longrightarrow \Lambda^2\mathrm{Q}^* \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2) \longrightarrow \mathrm{Q}^* \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \longrightarrow 0$$

donné par la résolution de la diagonale $\triangle \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$ de Beilinson. Alors on a $\mathrm{R}p_{1*}(\mathrm{D}^\bullet \boxtimes \mathcal{F}) = \mathcal{F}$ dans $\mathcal{D}^b_c(\mathbb{P}^2)$ et la suite spectrale de Beilinson est donnée par la suite spectrale des foncteurs hyperderivés. Dans notre cas, la suite spectrale considérée est celle obtenue en regardant le complexe

$$\mathrm{L}^\bullet = \mathrm{D}^\bullet \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2\times\mathbb{P}^2}} (\mathcal{O}(-1) \boxtimes \mathcal{O}(1)) \boxtimes \mathcal{F}.$$

Ceci s'applique de même au faisceau $\mathcal{F}^\vee$. Considérons maintenant le complexe $\mathrm{M}^\bullet = \mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{L}^\bullet, p_1^!(\Lambda^2\mathrm{Q}^*(-2)))$ dans $\mathrm{D}^b_c(\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2)$ où $p_1^!(\mathrm{G}) = p_1^*(\mathrm{G}) \otimes p_2^*(\omega_{\mathbb{P}^2})[2]$ pour un $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$-module cohérent G. Par dualité de Grothendieck-Serre, on a, dans $\mathrm{D}^b_c(\mathbb{P}^2)$,

$$\mathrm{R}p_{1*}(\mathrm{M}^\bullet) = \mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{R}p_{1*}(\mathrm{L}^\bullet)) = \mathcal{F}^\vee$$

De plus, dans $\mathrm{D}^b_c(\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2)$, on a

$$\mathrm{M}^\bullet \simeq \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{D}^\bullet, \Lambda^2\mathrm{Q}^* \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2)) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2\times\mathbb{P}^2}} (\mathcal{O}(-1) \boxtimes \mathcal{O}(1)) \boxtimes \mathrm{R}\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{F}, p_2^*(\omega_{\mathbb{P}^2}))[2].$$

La suite spectrale des foncteurs hyperdérivés du dernier complexe est celle cherchée et l'isomorphisme de suites spectrales du lemme se déduit de l'isomorphisme naturel

$$\mathrm{D}^\bullet \simeq \underline{\mathrm{Hom}}(\mathrm{D}^\bullet, \Lambda^2\mathrm{Q}^* \boxtimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2))[2],$$

déduit de l'isomorphisme $\mathrm{Q}^* \boxtimes \mathcal{O}(-1) \simeq \mathrm{Q} \boxtimes \mathcal{O}(+1) \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2\times\mathbb{P}^2}} \Lambda^2\mathrm{Q}^* \boxtimes \mathcal{O}(-2)$. ∎

(5.5) Dans la suite, on aura besoin d'une description de la résolution minimale d'une thêta-caractéristique $(\mathcal{F}, \sigma)$ semi-stable dans le cas où $b = 2$. A ce moment là, $h^1(\mathcal{F}(2)) = h^0(\mathcal{F}(-2)) = 0$ et, a priori, deux cas se présentent suivant si $c = 0$ ou $c = 1$. Considérons d'abord le cas où $c = 1$. Remarquons qu'on a $-a_i + 3 \geq -1$, *i.e.* $a_i \leq 4$ ici, $h^1(\mathcal{F}(2))$ étant nul. De plus, on a forcément $a_i \geq 0$. En effet, s'il existait un i tel que $a_i \leq -1$ on aurait $a_i + a_j - 3 \leq a_j - 4 \leq 0$ pour tout j ce qui est en contradiction à la minimalité de la résolution. Le fibré E est donc de la forme $\bigoplus_{i=0}^{4} n_i\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-i)$. En tordant la résolution par $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)$, on voit que $n_4 = 1$ car $c = 1$. De plus, comme $h^0(\mathcal{F}) = 2$ ceci impose $n_0 \geq 1$ et $n_0 - n_3 = 1$. Encore par minimalité de la résolution $n_0 > 1$ est impossible, d'où nécessairement $n_0 = 1$ et $n_3 = 0$. On a donc la factorisation suivante:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1) \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{O}_\ell(1) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{E} \arrow[r] & \mathrm{E}^\vee \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Le noyau de $\mathcal{O}_\ell(1) \to \mathcal{F}$ est, par le lemme du serpent, dans le conoyau de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \to$ E. Par conséquent, puisque ce conoyau est localement libre, $\mathcal{O}_\ell(1)$ s'injecte dans $\mathcal{F}$ ce qui est en contradiction avec la semi-stabilité de $(\mathcal{F}, \sigma)$. Par suite, c est nécessairement égale à 0. Dans ce cas là, on a $1 \leq a_i \leq 3$, $\mathrm{E} = \bigoplus_{i=1}^{3} n_i \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-i)$ avec $n_3 = 2$ et la factorisation suivante:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & n_1\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1) \arrow[r] \arrow[d] & 2\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{K} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{E} \arrow[r] & \mathrm{E}^\vee \arrow[r] & \mathcal{F} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Si $n_1 = 2$, alors on a $\mathrm{K} \subset \mathcal{F}$ mais $\chi(\mathrm{K}) > 0$ ce qui contredit la semi-stabilité de $\mathcal{F}$. Il reste finalement le cas où $n_1 = 1$ ou $n_1 = 0$. On a donc démontré la proposition suivante:

Proposition 5.6.— *Soit $(\mathcal{F}, \sigma)$ une thêta-caractéristique semi-stable telle que $h^0(\mathcal{F}) = 2$. Alors la résolution minimale de $\mathcal{F}$ est soit de type* (I)*:*

$$0 \longrightarrow (\bigoplus_{i=1}^{d-6} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2)) \oplus 2\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-3) \xrightarrow{\phi} (\bigoplus_{i=1}^{d-6} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)) \oplus 2\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

soit de type (II)*:*

$$0 \to \mathcal{O}(-1) \oplus (\bigoplus_{i=1}^{d-5} \mathcal{O}(-2)) \oplus 2\mathcal{O}(-3) \xrightarrow{\phi} \mathcal{O}(-2) \oplus (\bigoplus_{i=1}^{d-5} \mathcal{O}(-1)) \oplus 2\mathcal{O} \to \mathcal{F} \to 0.$$

La première résolution impose $d \geq 6$. Donc si $d = 5$, la résolution est nécessairement du deuxième type.

Proposition 5.7.— *Si $(\mathcal{F}, \sigma)$ est une thêta-caractéristique de $\Theta_2(d) \backslash \Theta_4(d)$ localement libre sur son support alors la résolution minimale de $\mathcal{F}$ est de type* (I)*.*

Démonstration. Il s'agit de montrer que $n_1 = 1$ est impossible dans ce cas-là. Le morphisme $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1) \to 2\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$ du diagramme est donné par deux sections α et β. Supposons α et β proportionnel. A ce moment là, K a $\mathcal{O}_\ell$ comme sous-faisceau, ℓ la droite définie par α. Or ce sous-faisceau s'injecte dans $\mathcal{F}$ ce qui donne une contradiction à la semi-stabilité de $\mathcal{F}$. Sinon, les sections α et β définissent deux droites distinctes qui se coupent en un point $a \in \mathbb{P}^2$. Soit F le sous-fibré $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)$ de E. Son φ-orthogonal est donné par la somme directe de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1)$ avec $n_2\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2)$ et le noyau de la flèche $2\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-3) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2)$ défini par α et β. Ce noyau est isomorphe à $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-4)$. Le quotient $\mathrm{E}/\mathcal{F}^\perp$ est isomorphe à $\mathcal{I}_a(-2)$ où $\mathcal{I}_a$ est le faisceau d'idéaux du point a. Considérons le diagramme suivant avec suites verticales des 0-suites,

suites horizontales exactes:

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{F} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathrm{E} \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{E}/\mathrm{F}^{\perp} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{F} \arrow[r] & \mathrm{E}^{\vee} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F}^{\vee} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{C}_a \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Chaque 0-suite verticale n'a de la cohomologie uniquement en degré 0. Soient $\mathcal{H}$, $\mathcal{L}$ et $\mathcal{F}'$ les faisceaux de cohomologie respectivement. On a donc une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{F}' \longrightarrow 0.$$

Soit $\mathrm{K}^{\bullet}$ le complexe $0 \to \mathrm{F} \to \mathrm{E} \to \mathrm{E}/\mathrm{F}^{\perp} \to 0$. Les suites spectrales ${}'\mathrm{E}_2^{p,q} = \mathrm{H}^p(\underline{\mathrm{E}xt}^q(\mathrm{K}^{\bullet}, \omega))$ et ${}''\mathrm{E}_2^{p,q} = \underline{\mathrm{E}xt}^p(\mathrm{H}^q(\mathrm{K}^{\bullet}, \omega))$ sont d'aboutissement $\underline{\mathbb{E}xt}^{p+q}(\mathrm{K}^{\bullet}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2})$. On en déduit la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow \underline{\mathbb{E}xt}^0(\mathrm{K}^{\bullet}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}) \longrightarrow \mathbb{C}_a \longrightarrow 0$$

et l'identification $\underline{\mathbb{E}xt}^0(\mathrm{K}^{\bullet}, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}) = \mathcal{H}^{\vee}$. On obtient un diagramme

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{H} \arrow[r] \arrow[d, equal] & \mathcal{L} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F}' \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{H} \arrow[r] & \mathcal{H}^{\vee} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{E} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & \mathbb{C}_a \arrow[r, phantom, "="] \arrow[d] & \mathbb{C}_a \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Les thêta-caractéristiques $\mathcal{F}$ et $\mathcal{E}$ sont donc toutes les deux extensions de $\mathbb{C}_a$ avec $\mathcal{F}'$. La première a deux, la deuxième trois sections. Mais si $\mathcal{F}$ est localement libre sur en a, l'espace de telles extensions est de dimension 1. En particulier, toutes ces extensions sont munies d'une forme quadratique. On obtient ainsi une famille connexe de thêta-caractéristiques. Mais pour une telle famille la dimension de l'espace des sections est invariante modulo 2, d'où la contradiction cherchée. ∎

Corollaire 5.8.— *La thêta-caractéristique générale de* $\Theta_2(d)\backslash\Theta_4(d)$ *admet une résolution de type* (I).

Démonstration. D'après ([S1] Prop. 8.3), le fermé de $\Theta(d)$ des thêta-caractéristiques non localement libres sur leur support schématique, est de codimension au moins 1. Ce fermé coupe, par irréductibilité de Θ_2, le fermé Θ_2 suivant un fermé de codimension au moins 2, d'où le corollaire par la proposition précédente. ∎

6. FIBRÉS INVERSIBLES SUR $\Theta(d)$

(6.1) Soit $\mathcal{F}$ une famille de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$-modules semi-stables de dimension 1, paramétrée par la variété algébrique S. Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd} \mathrm{S}\times\mathbb{P}^2 \arrow[r, "p"] \arrow[d, "q"'] & \mathbb{P}^2 \\ \mathrm{S} & \end{tikzcd}$$

où p et q sont les projections canoniques. Alors à tout élément u de l'anneau de Grothendieck $\mathrm{K}(\mathbb{P}^2)$, on peut associer l'élément

$$\mathcal{L}_{\mathcal{F}}(u) = \det(q_!(\mathcal{F}.p^*(u)))^{-1}$$

du groupe Pic(S) des fibré inversibles sur S (*cf.* [LP, 2.3]).

Soit $\mathrm{N}(d,\chi)$ l'espace de modules des faisceaux semi-stables de dimension 1 de multiplicité d et de caractéristique d'Euler-Poincaré χ sur $\mathbb{P}^2$. D'après [LP, 2.10], si l'on choisit u tel que $\chi(\mathrm{F}.u) = 0$ pour $\mathrm{F} \in \mathrm{N}(d,\chi)$, il existe dans $\mathrm{Pic}(\mathrm{N}(d,\chi))$ un élément $\mathcal{L}(u)$ caractérisé par la propriété universelle suivante: pour toute famille plate $\mathcal{F}$ de faisceaux semi-stables sur $\mathbb{P}^2$ de degré d et de caractéristique d'Euler-Poincaré χ paramétrée par la variété algébrique S on a

$$\mathcal{L}_{\mathcal{F}}(u) = f_{\mathcal{F}}^*(\mathcal{L}(u))$$

où $f_{\mathcal{F}} : \mathrm{S} \to \mathrm{N}(d,\chi)$ est le morphisme modulaire associé à la famille $\mathcal{F}$.

Considérons le cas où $\chi = 0$, $d \geq 3$ et définissons $\mathcal{D}_{\mathrm{N}} = \mathcal{L}([\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}])$ et $\mathcal{L}_{\mathrm{N}} = \mathcal{L}([\mathcal{O}_p])^{-1}$, où $p \in \mathbb{P}^2$. D'après [LP, Théorème 3.5], $\mathrm{Pic}(\mathrm{N}(d,0))$ est un groupe abélien libre, engendré par $\mathcal{L}_{\mathrm{N}}$ et $\mathcal{D}_{\mathrm{N}}$. On utilisera ce résultat plus tard, ainsi que la description fonctorielle des générateurs. Remarquons que ces générateurs peuvent aussi se décrire de la manière suivante: le fibré $\mathcal{D}_{\mathrm{N}}$ est le fibré inversible associé au diviseur "thêta" des classes de faisceaux $\mathcal{F}$ tels que $h^0(\mathbb{P}^2,\mathcal{F}) \neq 0$; le fibré $\mathcal{L}_{\mathrm{N}}$ est l'image réciproque de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{\mathrm{M}}}(1)$ sous l'application $\sigma_{\mathrm{N}} : \mathrm{N}(d,0) \to \mathbb{P}^{\mathrm{M}}$ avec $\mathrm{M} = d(d+3)/2$ qui associe à la classe du faisceau $\mathcal{F}$ le support schématique de $\mathcal{F}$.

(6.2) D'après ce que précède, on obtient deux fibrés inversibles sur $\Theta(d)$: les images réciproques de $\mathcal{D}_{\mathrm{N}}$ et $\mathcal{L}_{\mathrm{N}}$ sous le morphisme d'oubli

$$\Theta(d) \longrightarrow \mathrm{N}(d,0)$$

qu'on notera $\mathcal{D}$ et $\mathcal{L}$ respectivement.

(6.3) Considérons une famille $(\mathcal{F},\sigma)$ de thêta-caractéristiques paramétrée par S et plus particulièrement le fibré déterminant $\mathcal{D}_{\mathcal{F}} = \mathcal{L}_{\mathcal{F}}(\mathcal{O})$ associé à la famille $\mathcal{F}$. Pour le calculer, on peut utiliser ([S2], 2.1) qu'il existe un complexe $\mathrm{K}^\bullet$ de $\mathcal{O}_{\mathrm{S}}$-modules cohérents localement libres

$$0 \longrightarrow \mathrm{K}^0 \longrightarrow \mathrm{K}^1 \longrightarrow 0$$

tels que, dans la catégorie dérivé des complexes bornés de $\mathcal{O}_{\mathrm{S}}$-modules à cohomologie cohérente $\mathcal{D}^b_c(\mathrm{S})$, on ait $\mathrm{R}q_*(\mathcal{F}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{K}^\bullet$, puis former le déterminant de $\mathrm{K}^\bullet$. Cette construction ne dépend pas, à isomorphisme canonique près, du choix de $\mathrm{K}^\bullet$, et commute avec changements de base. En particulier, pour $s \in \mathrm{S}$, la fibre de $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}$ au point s est $\Lambda^{max}\mathrm{H}^0(\mathbb{P}^2,\mathcal{F}_s)^* \otimes \Lambda^{max}\mathrm{H}^1(\mathbb{P}^2,\mathcal{F}_s)$.

L'identification σ définit une racine canonique de $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}$, appelé *pfaffien* et noté $\mathcal{P}_{(\mathcal{F},\sigma)}$: d'après [S2], σ définit dans la catégorie dérivé $\mathcal{D}^b_c(\mathrm{S})$ un isomorphisme symétrique

$$\mathrm{K}^\bullet \longrightarrow \mathrm{K}^{\bullet *}[-1]$$

ensuite l'existence d'une racine canonique de $\det(\mathrm{K}^\bullet)$ pour de tels $\mathrm{K}^\bullet$ est prouvé dans [L-S, §7]. Cette construction commute avec changements de base. En particulier, pour $s \in \mathrm{S}$, la fibre de $\mathcal{P}_{(\mathcal{F},\sigma)}$ au point s est $\Lambda^{max}\mathrm{H}^1(\mathbb{P}^2,\mathcal{F}_s)$.

(6.4) Soit $d \geq 5$. Soit $[\mathcal{F},\sigma,\alpha]$ le triplet universel sur $\mathrm{T}^{ss}(d,\mathrm{N}) \times \mathbb{P}^2$ (*cf.* 2.2), $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}$ le fibré déterminant de (6.3) associé à $\mathcal{F}$ et $\mathcal{P}_{(\mathcal{F},\sigma)}$ le fibré pfaffien de (6.3) associé à $(\mathcal{F},\sigma)$. L'action de $\mathrm{GL(H)}$ sur $\mathrm{T}^{ss}(d,\mathrm{N})$ définit une $\mathrm{GL(H)}$-linéarisation de $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}$ et $\mathcal{P}_{(\mathcal{F},\sigma)}$. En un point fermé t de $\mathrm{T}^{ss}(d,\mathrm{N})$ l'action du stabilisateur $\mathrm{Aut}(\mathcal{F}_t,\sigma_t)$ est l'action naturelle sur $\Lambda^{max}\mathrm{H}^0(\mathbb{P}^2,\mathcal{F}_t)^* \otimes \Lambda^{max}\mathrm{H}^1(\mathbb{P}^2,\mathcal{F}_t)$ pour $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}$ respectivement sur $\Lambda^{max}\mathrm{H}^1(\mathbb{P}^2,\mathcal{F}_t)$ pour $\mathcal{P}_{(\mathcal{F},\sigma)}$. D'après (6.1) et (6.2), le fibré $\mathcal{D}_{\mathcal{F}}$ descend à $\Theta(d)$.

Proposition 6.5.— *Soit $d \geq 5$. Alors $\mathcal{P}_{(\mathcal{F},\sigma)}$ descend à $\Theta_0^{reg}(d)$ mais ne descend pas à $\Theta_1^{reg}(d)$. De plus, $\mathcal{P}_{(\mathcal{F},\sigma)}$ descend à $\Theta_0(d)$ entier si et seulement si $d = 5$.*

Démonstration. En un point $t \in \mathrm{T}_0^{reg}(d,\mathrm{N})$ l'action du stabilisateur $\{\pm 1\}$ sur $\mathcal{P}_{(\mathcal{F}_t,\sigma_t)}$ est donnée par $g \mapsto g^{h^1(\mathcal{F}_t)}$. L'action est donc triviale si $h^1(\mathcal{F}_t)$ est pair et, par le lemme de Kempf [D-N], la restriction de $\mathcal{P}_{(\mathcal{F},\sigma)}$ à $\mathrm{T}_0^{reg}(d,\mathrm{N})$ descend à $\Theta_0^{reg}(d)$. Dans le cas de $t \in \mathrm{T}_1^{reg}(d,\mathrm{N})$, l'action du stabilisateur est non trivial et la restriction de $\mathcal{P}_{(\mathcal{F},\sigma)}$ à $\mathrm{T}_1^{reg}(d,\mathrm{N})$ ne peut descendre à $\Theta_1^{reg}(d)$.

Si $d = 5$, toute thêta-caractéristique poly-stable paire $(\mathcal{F},\sigma)$ de degré d ayant des sections est régulièrement stable: sinon on pourrait l'écrire comme somme directe orthogonale de deux thêta-caractéristiques semi-stables $(\mathcal{F}_1,\sigma_1)$ et $(\mathcal{F}_2,\sigma_2)$ dont le degré est compris entre 1 et 4. On aurait alors $h^0(\mathcal{F}) \leq h^0(\mathcal{F}_1) + h^0(\mathcal{F}_2)$ d'où $h^0(\mathcal{F}) \leq 1$ par le corollaire 4.5 ce qui est une contradiction, $(\mathcal{F},\sigma)$ étant pair. L'action du stabilisateur est donc triviale en tout point d'orbite fermée de $\mathrm{T}_0^{ss}(d,\mathrm{N})$ et, par le lemme de Kempf, $\mathcal{P}_{(\mathcal{F},\sigma)}$ descend à $\Theta_0(d)$.

Si $d \geq 6$, on considère la thêta-caractéristique somme directe orthogonale

$$(\mathrm{G},\tau) = \mathcal{O}_{\mathrm{C}} \oplus \mathcal{O}_{\mathrm{C}'} \oplus (d-6)\mathcal{O}_\ell(-1)$$

avec ℓ une droite, C et C′ deux courbes elliptiques non proportionnelles du plan projectif. Choisissons une identification $\alpha : \mathrm{H}^0(\mathrm{G(N)}) \simeq k^{d\mathrm{N}}$ et considérons le point

$(\mathrm{G}, \tau, \alpha)$ de $\mathrm{T}_0^{ss}(d, \mathrm{N})$. Le stabilisateur en ce point s'identifie à $\{\pm 1\} \times \{\pm 1\} \times \mathrm{O}(d-6)$ et son action sur $\Lambda^2(\mathrm{H}^1(\mathrm{G}))$ est donnée par

$$(g_1, g_2, g_3) \mapsto g_1^{h^1(\mathcal{O}_{\mathrm{C}})} g_2^{h^1(\mathcal{O}_{\mathrm{C}'})}.$$

On voit alors que $(-1, 1, g_3)$ et $(1, -1, g_3)$ n'opèrent pas trivialement et que $\mathcal{P}_{(\mathcal{F}, \sigma)}$ ne peut descendre à $\Theta_0^{reg}(d)$ entier. ∎

7. GROUPE DE PICARD DE LA COMPOSANTE PAIRE

Si $d \geq 5$, le diviseur $\Theta_2(d)$ est non-vide. Ce qui est important pour notre propos est qu'il est irréductible (*cf.* Théorème 4.1) et génériquement réduit, comme le montre la proposition suivante:

Proposition 7.1.— *Soit $d \geq 5$. Le fermé $\Theta_2(d) \subset \Theta_0(d)$ est lisse aux points régulièrement stables de $\Theta_2(d) \backslash \Theta_4(d)$.*

Remarquons que $\Theta_2(d) \backslash \Theta_4(d)$ est non vide d'après le lemme 4.6. Ainsi, $\Theta_4(d)$ est un fermé propre du diviseur irréductible $\Theta_2(d)$. Comme le fermé des thêta-caractéristiques qui ne sont pas régulièrement stables est de codimension au moins deux, il existe des points régulièrement stables de $\Theta_2(d) \backslash \Theta_4(d)$.

Démonstration. Soit $(\mathrm{G}, \tau) \in \Theta_2(d) \backslash \Theta_4(d)$ une thêta-caractéristique régulièrement stable, S un voisinage étale de (G, τ) et $(\mathcal{F}, \sigma)$ une famille sur $\mathrm{S} \times \Theta_0(d)$ telle que le morphisme modulaire déduit de $(\mathcal{F}, \sigma)$ et S soit le revêtement étale $\mathrm{S} \to \Theta_0(d)$ donné. Un tel voisinage existe en tout point régulièrement stable, le morphisme $\mathrm{T}^{reg}(d, \mathrm{N}) \to \Theta^{reg}(d)$ étant un $\mathrm{GL}(\mathrm{H})/\{\pm 1\}$-fibré principal (2.2). Il s'agit donc de montrer l'assertion pour un point $s \in \mathrm{S}$ dont l'image est (G, τ), *i.e.* tel que $(\mathcal{F}_s, \sigma_s) \simeq (\mathrm{G}, \tau)$. Choisissons, au voisinage de s, un complexe comme dans (4.2.1). En général, la variété déterminantielle S^1 est lisse de codimension 1 en s si et seulement si le morphisme canonique

$$\phi : \mathrm{T}_s\mathrm{S} \longrightarrow \Lambda^2(\mathrm{Ker}\, \alpha_s)^*$$

est surjectif. Comme dans [H] on montre qu'on a un diagramme anti-commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{T}_s\mathrm{S} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\psi"'] & \Lambda^2\mathrm{H}^0(\mathcal{F}_s)^* \\
\mathrm{Ext}^1_{asym}(\mathcal{F}_s, \mathcal{F}_s) \arrow[ur, "\chi"'] &
\end{tikzcd}$$

où ψ désigne le morphisme de déformation de Kodaira-Spencer et χ le co-morphisme de Petri, *i.e.* le morphisme défini par l'accouplement de Yoneda:

$$\mathrm{H}^0(\mathcal{F}_s) \times \mathrm{Ext}^1(\mathcal{F}_s, \mathcal{F}_s) \longrightarrow \mathrm{H}^1(\mathcal{F}_s)$$

Comme ψ est surjectif en s il suffira de montrer que χ est surjectif en s. Pour montrer que χ est surjectif il suffira de montrer que le morphisme naturel

$$\zeta : \mathrm{Ext}^1(\mathrm{G},\mathrm{G}) \longrightarrow \mathrm{L}(\mathrm{H}^0(\mathrm{G}),\mathrm{H}^1(\mathrm{G}))$$

est surjectif. En effet, si $f \in \Lambda^2\mathrm{H}^0(\mathrm{G})^*$, il existerait $g \in \mathrm{Ext}^1(\mathrm{G},\mathrm{G})$ tel $\zeta(g) = f$. Or $g' = 1/2(g -^\vee g) \in \mathrm{Ext}^1_{asym}(\mathrm{G},\mathrm{G})$ et $\chi(g') = f$. Pour montrer la surjectivité de ζ on utilise la résolution de la proposition 5.3 de G:

$$0 \longrightarrow \mathrm{F} \xrightarrow{\varphi} \mathrm{F}^\vee \longrightarrow \mathrm{G} \longrightarrow 0.$$

avec $\mathrm{F} = (\overset{d-6}{\underset{i=1}{\oplus}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2)) \oplus 2\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-3)$ ou $\mathrm{F} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1) \oplus (\overset{d-6}{\underset{i=1}{\oplus}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2)) \oplus 2\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-3)$. Considérons l'accouplement $\mathrm{H}^0(\mathrm{F}^\vee) \times \mathrm{Ext}^2(\mathrm{F}^\vee,\mathrm{F}) \longrightarrow \mathrm{H}^2(\mathrm{F})$ puis le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ext}^1(\mathrm{G},\mathrm{G}) & \xrightarrow{\quad f \quad} & \mathrm{Ext}^2(\mathrm{F}^\vee,\mathrm{F}) \\ \varphi\downarrow & & \downarrow\vartheta \\ \mathrm{L}(\mathrm{H}^0(\mathrm{G}),\mathrm{H}^1(\mathrm{G})) & \xrightarrow{g} & \mathrm{L}(\mathrm{H}^0(2\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}),\mathrm{H}^2(2\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-3)) \end{array}$$

où les flèches verticales sont donnés par les accouplements et où f est donnée par la suite spectrale qui calcule les $\mathrm{Ext}^i(\mathrm{G},\mathrm{G})$ à partir de la résolution de G. Le morphisme f est surjectif et g est un isomorphisme. De plus, ϑ est un isomorphisme par dualité de Serre. Par suite, φ est surjectif aussi et $\mathrm{S}_2\backslash\mathrm{S}_4$ est lisse aux points fermés correspondant à des thêta-caractéristiques régulièrement stables. ∎

(7.2) Considérons le fibré vectoriel $\mathrm{E}_0 = \mathrm{A} \otimes_k \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2)$, avec $\mathrm{A} = k^d$. Soit $\widetilde{\mathrm{X}}_0(d)$ l'espace vectoriel des morphismes symétriques $q : \mathrm{E}_0 \to \mathrm{E}_0^\vee$. Si q est injectif comme morphisme de faisceaux, son conoyau $\mathcal{F}$ est de dimension 1, muni d'une structure de thêta-caractéristique σ provenant de la symétrie de q. Le faisceau $\mathcal{F}$ est forcément semi-stable. En effet, aucun sous-faisceau cohérent $\mathcal{E}$ de $\mathcal{F}$ ne peut avoir des sections non nulles, ce qui implique $\chi(\mathcal{E}) \leq 0$. On note $\mathrm{X}_0(d) \subset \widetilde{\mathrm{X}}_0(d)$ l'ouvert des morphismes q qui sont injectifs comme morphisme de faisceau.

Le groupe $\mathrm{G}_0 = \mathrm{Aut}(\mathrm{E}_0) = \mathrm{GL}(d)$ opère sur $\mathrm{X}_0(d)$ en associant au morphisme symétrique q le morphisme symétrique $g.q =^t g^{-1} \circ q \circ g^{-1}$.

Proposition 7.3.— *Le morphisme modulaire $f : \mathrm{X}_0(d) \to \Theta_{=0}(d)$ fait de $\Theta_{=0}(d)$ un bon quotient de $\mathrm{X}_0(d)$ par G_0*

Démonstration. On aura besoin du lemme de transitivité de bons quotients de Seshadri: soit H un groupe algébrique, N un sous-groupe distingué fermé de H. Supposons que H opère sur les variétés algébriques Y et Z et que la variété algébrique Q est un bon quotient de Y par N. Soit de plus $g : \mathrm{Y} \to \mathrm{Z}$ un morphisme H-équivariant qui se factorise suivant un morphisme H/N-équivariant $h : \mathrm{Q} \to \mathrm{Z}$. Alors g est un bon quotient si et seulement si h est un bon quotient.

On reprend les notations de (2.2). Considérons le triplet universel $[\mathcal{F}, \sigma, \alpha]$ sur $\mathrm{T}^{ss}_{=0}(d,\mathrm{N}) \times \mathbb{P}^2$, où $\mathrm{T}^{ss}_{=0}(d,\mathrm{N})$ est l'ouvert de $\mathrm{T}^{ss}(d,\mathrm{N})$ correspondant aux triplets dont la thêta-caractéristique sous-jacente est ineffective. Considérons de plus le

fibré de repères R au dessus de $\mathrm{T}^{ss}_{=0}(d,\mathrm{N})$ dont la fibre au-dessus de $[\mathcal{F}_s,\sigma_s,\alpha_s]$ paramètre les isomorphismes $\mathrm{A}\simeq \mathrm{H}^1(\mathbb{P}^2,\mathcal{F}_s(-1))$. Le groupe $\mathrm{GL(H)}\times \mathrm{G}_0$ opère sur R et $\mathrm{R}\to \mathrm{T}^{ss}_{=0}(d,\mathrm{N})$ est un bon quotient de R par G_0, puisque localement triviale dans la topologie de Zariski de groupe structural G_0. La résolution 5.3 fournit un morphisme de R dans $\mathrm{X}_0(d)$. De plus, ce morphisme fait de R un fibré localement trivial dans la topologie de Zariski de groupe structural GL(H) et on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{R} & \longrightarrow & \mathrm{X}_0(d) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{T}^{ss}_{=0}(d) & \longrightarrow & \Theta_{=0}(d) \end{array}$$

Le morphisme $\mathrm{T}^{ss}_{=0}(d)\to\Theta_{=0}(d)$ étant un bon quotient, le lemme de Seshadri dit que $\mathrm{R}\to\Theta_{=0}(d)$ est un bon quotient. Par conséquent, encore par le lemme de Seshadri, $\mathrm{X}_0(d)\to\Theta_{=0}(d)$ est un bon quotient. ∎

Proposition 7.4.— *Soit* E *un fibré vectoriel tel que* $\mathrm{S}^2\mathrm{E}^*(-3)$ *soit engendré par ses sections globales. Soit* Γ *l'espace des sections globales de* $\mathrm{S}^2\mathrm{E}^*(-3)$ *et* Γ^i *l'ouvert des sections induisant un morphisme injectif en tant que morphisme de faisceau* $\mathrm{E}\to\mathrm{E}^\vee$. *Alors le fermé* $\Gamma-\Gamma^i\subset\Gamma$ *est de codimension au moins deux.*

Démonstration. Soit $r=\mathrm{rg}\,(\mathrm{E})$, $\gamma=\dim\Gamma$. Considérons le diagramme suivant:

$$\begin{array}{ccc} \Gamma\times\mathbb{P}^2 & \xrightarrow{ev} & \mathrm{S}^2\mathrm{E}^*(-3) \\ \pi\downarrow & & \\ \Gamma & & \end{array}$$

Le morphisme d'évaluation ev est un morphisme de variétés algébriques surjectif. Soit $\mathrm{D}\subset\mathrm{S}^2\mathrm{E}^*(-3)$ le sous-fibré dont la fibre au dessus de $x\in\mathbb{P}^2$ consiste en les q_x, tels que $q_x:\mathrm{E}_x\to\mathrm{E}^*_x$ soit de rang inférieur ou égal à $r-1$. Remarquons que D est de rang $r(r+1)/2-1$. Considérons l'image réciproque $\widetilde{\mathrm{D}}$ de D sous le morphisme d'évaluation. On a $\widetilde{\mathrm{D}}=\{(q,x)/\,\mathrm{rg}\;q(x)\le r-1\}$ et la variété $\widetilde{\mathrm{D}}$ est irréductible de dimension $\gamma+1$. Considérons la projection $\widetilde{\pi}:\widetilde{\mathrm{D}}\to\Gamma$ obtenue par restriction de π à $\widetilde{\mathrm{D}}$. Il s'agit de voir que le fermé Γ_1 de Γ des points où la fibre est de dimension 2 est de codimension au moins 2. Remarquons d'abord que Γ_1 est un fermé strict, la fibre générale de $\widetilde{\pi}$ étant une courbe lisse. Maintenant, la codimension de Γ_1 dans Γ ne peut être 2. Sinon, $\widetilde{\pi}^{-1}(\Gamma_1)$ serait un fermé de $\widetilde{\mathrm{D}}$ de dimension $\gamma+1$ et serait donc, par irréductibilité de $\widetilde{\mathrm{D}}$, égale à $\widetilde{\mathrm{D}}$ ce qui est une contradiction. ∎

Pour les estimations de codimension de cette section et de la suivante, on a besoin de la proposition suivante, variante de la proposition 1.5 de [D-LP].

Proposition 7.5.— *Soit* $(\mathcal{F},\sigma)$ *une famille de thêta-caractéristiques paramétrée par la variété algébrique* S. *Soit*

$$\mathcal{H}=\mathrm{Groth}_{isotr}(\mathcal{F}/\mathrm{S},\mathrm{P})\longrightarrow\mathrm{S}$$

le schéma de Hilbert relatif des paires $(s, \mathcal{E})$ d'un point s de S et d'un quotient cohérent $\mathcal{F}_s/\mathcal{E}$ de polynôme de Hilbert P tel que $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}_s$ soit totalement isotrope pour σ_s. Alors pour tout point $d = (s, \mathcal{E})$ de $\mathcal{H}$ on a la suite exacte

$$\mathrm{T}_t\mathcal{H} \longrightarrow \mathrm{T}_s\mathrm{S} \xrightarrow{\omega_+} \mathrm{Ext}^1_{asym}(\mathcal{E}, \mathcal{E}^\vee),$$

où ω_+ est le composé du morphisme de Kodaira-Spencer $\kappa : \mathrm{T}_s\mathrm{S} \to \mathrm{Ext}^1_{asym}(\mathcal{F}_s, \mathcal{F}_s)$ et du morphisme canonique $\mathrm{Ext}^1_{asym}(\mathcal{F}_s, \mathcal{F}_s) \to \mathrm{Ext}^1_{asym}(\mathcal{E}, \mathcal{E}^\vee)$.

Lemme 7.6.— *Soit $\mathrm{X}_0^{reg}(d) \subset \mathrm{X}_0(d)$ l'ouvert des morphismes q induisant des thêta-caractéristiques régulièrement stables. La codimension du fermé complémentaire à $\mathrm{X}_0^{reg}(d)$ dans $\mathrm{X}_0(d)$ est au moins deux.*

Démonstration. On montre le lemme en deux étapes: d'abord (i) on montre qu'on a $\mathrm{codim}_{\mathrm{X}_0(d)}(\mathrm{X}_0(d) \backslash \mathrm{X}_0^s(d)) \geq 2$, où $\mathrm{X}_0^s(d)$ désigne l'ouvert correspondant aux thêta-caractéristiques stables, puis (ii) on montre que $\mathrm{codim}_{\mathrm{X}_0^s(d)}(\mathrm{X}_0^s(d) \backslash \mathrm{X}_0^{reg}(d)) \geq 2$. Pour (i) on utilise la proposition 7.5, appliquée à la famille des thêta-caractéristiques paramétrée par $\mathrm{X}_0(d)$ et définie par le conoyau du morphisme universel:

$$q : \mathrm{A} \otimes \mathcal{O}_{\mathrm{X}_0^{reg}(d) \times \mathbb{P}^2}(-2) \longrightarrow \mathrm{A}^* \otimes \mathcal{O}_{\mathrm{X}_0^{reg}(d) \times \mathbb{P}^2}(-1).$$

On remarque alors que le morphisme ω_+ est surjectif, la famille en question étant complète et le morphisme canonique $\mathrm{Ext}^1_{asym}(\mathcal{F}_s, \mathcal{F}_s^\vee) \to \mathrm{Ext}^1_{asym}(\mathcal{E}, \mathcal{E}^\vee)$ étant surjectif. On est donc ramené à prouver que si $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$ est un sous-faisceau totalement isotrope non trivial de $\mathcal{F}$ de caractéristique d'Euler-Poincaré 0, la dimension de $\mathrm{Ext}^1_{asym}(\mathcal{E}, \mathcal{E}^\vee)$ est au moins 2. Or, d'après la proposition 8.5 de [S1], on a

$$\dim \mathrm{Hom}^1_{asym}(\mathcal{E}, \mathcal{E}^\vee) - \dim \mathrm{Ext}^1_{asym}(\mathcal{E}, \mathcal{E}^\vee) = -\frac{d(\mathcal{E})(d(\mathcal{E}) + 3)}{2}$$

d'où $\dim \mathrm{Ext}^1_{asym}(\mathcal{E}, \mathcal{E}^\vee) \geq 2$ pour $d(\mathcal{E}) \geq 1$. Pour (ii), considérons deux sous-espaces vectoriels non nuls A' et A'' de A de dimension respectivement a' et a'' et tels que $\mathrm{A} = \mathrm{A}' \oplus \mathrm{A}''$. On a un morphisme

$$\phi : \mathrm{S}^2\mathrm{A}'^* \otimes \mathrm{V} \times \mathrm{S}^2\mathrm{A}''^* \otimes \mathrm{V} \longrightarrow \mathrm{S}^2\mathrm{A}^* \otimes \mathrm{V}$$

en associant à (q', q'') le morphisme symétrique

$$\begin{pmatrix} q' & 0 \\ 0 & q'' \end{pmatrix}$$

L'image de ϕ est un fermé de $\mathrm{X}_0(d)$ de codimension $3a'a''$. Soit $\mathrm{Y} \subset \mathrm{X}_0(d)$ le G_0-saturé de cet image. Comme l'action de $\mathrm{GL}(\mathrm{A})$ sur $\mathrm{X}_0^{reg}(d)$ est propre, l'image réciproque de l'image de Y est égal à Y. Maintenant, le sous-groupe de G_0 des matrices du type

$$\begin{pmatrix} g' & 0 \\ 0 & g'' \end{pmatrix}$$

avec $g' \in \mathrm{GL}(\mathrm{A}')$ et $g'' \in \mathrm{GL}(\mathrm{A}'')$ stabilise l'image de ϕ la codimension de Y est au moins $3a'a'' - a^2 + a'^2 + a''^2 = a'a''$. Pour $a = d \geq 3$ ce nombre est au moins 2.
Il reste, *cf.* ([S1], 1.4), à considérer le cas des thêta-caractéristiques hyperboliques. A ce moment-là, a est pair et l'on considère une décomposition $\mathrm{A} = \mathrm{A}' \oplus \mathrm{A}'$. Un argument analogue à celui ci-dessus montre que la codimension est aussi au moins deux dans ce cas, d'où (ii), ce qui termine la démonstration du lemme. ∎

(7.7) Soit $\overline{\mathrm{G}}_0 = \mathrm{G}/\{\pm \mathrm{Id}\}$. D'après (7.4) et (7.6), $\mathrm{X}_0^{reg}(d)$ est un ouvert dans un espace affine dont le fermé complémentaire est de codimension au moins 2. Il en découle que les seules fonctions inversibles sur $\mathrm{X}_0^{reg}(d)$ sont les constantes non nulles et que le groupe de Picard de $\mathrm{X}_0^{reg}(d)$ est réduit au fibré en droites trivial. Soit $\mathrm{Pic}^{\overline{\mathrm{G}}_0}(\mathrm{X}_0^{reg}(d))$ le groupe des fibrés en droites L sur $\mathrm{X}_0^{reg}(d)$ munis d'une $\overline{\mathrm{G}}_0$-linéarisation, *i.e.* d'un isomorphisme $m^*\mathrm{L} \xrightarrow{\sim} p_2^*\mathrm{L}$ où $m : \overline{\mathrm{G}}_0 \times \mathrm{X}_0^{reg}(d) \to \mathrm{X}_0^{reg}(d)$ est l'action et p_2 la deuxième projection, satisfaisant à la condition de cocycle naturelle. Le noyau du morphisme d'oubli $\mathrm{Pic}^{\overline{\mathrm{G}}_0}(\mathrm{X}_0^{reg}(d)) \to \mathrm{Pic}(\mathrm{X}_0^{reg}(d))$ s'identifie au groupe des caractères $\chi(\overline{\mathrm{G}}_0)$ de $\overline{\mathrm{G}}_0$. En effet, deux linéarisations du fibré trivial sur $\mathrm{X}_0^{reg}(d)$ diffèrent par un automorphisme de $p_2^*\mathcal{O}_{\mathrm{X}_0^{reg}(d)}$, *i.e.* d'une fonction inversible sur $\overline{\mathrm{G}}_0 \times \mathrm{X}_0^{reg}(d)$. Étant donné que $\mathcal{O}^*_{\mathrm{X}_0^{reg}(d)} = k^*$, une telle fonction provient d'une fonction sur $\overline{\mathrm{G}}_0$, et la condition de cocycle implique que cette fonction est nécessairement un caractère. Comme on sait déjà que $\mathrm{Pic}(\mathrm{X}_0^{reg}(d)) = 0$, on voit que $\chi(\overline{\mathrm{G}}_0) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}^{\overline{\mathrm{G}}_0}(\mathrm{X}_0^{reg}(d))$. Le groupe $\chi(\overline{\mathrm{G}}_0)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$. Nous choisissons pour générateur le caractère

$$\chi : f \mapsto \begin{cases} \det^{-1}(f) & \text{si d est pair} \\ \det^{-2}(f) & \text{si d est impair} \end{cases}$$

Soit $\mathcal{L}_\chi$ le $\overline{\mathrm{G}}_0$-fibré inversible associé à χ par l'isomorphisme ci-dessus. Un simple calcul montre que les stabilisateurs de l'action de $\overline{\mathrm{G}}_0$ sur $\mathrm{X}_0^{reg}(d)$ sont tous triviaux. Le morphisme $\mathrm{X}_0^{reg}(d) \to \Theta_{=0}^{reg}(d)$ étant un bon quotient (Proposition 7.3), le lemme de Kempf [D-N] montre que $\mathrm{Pic}(\Theta_{=0}^{reg}(d)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}(\mathrm{X}_0^{reg})$. En particulier, $\mathrm{Pic}(\Theta_{=0}^{reg}(d))$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$; nous choisissons pour générateur le fibré inversible, noté $\mathcal{L}$ dans la suite, obtenu par descente de $\mathcal{L}_\chi$.

Lemme 7.8.— *Soit* $\gamma : \Theta_{=0}^{reg}(d) \longrightarrow \mathrm{N}^s(d,0)$ *le morphisme d'oubli. On a*

$$\gamma^*(\mathcal{L}_\mathrm{N}) = \begin{cases} \mathcal{L}^{\otimes 2} & \textit{si d est pair} \\ \mathcal{L} & \textit{si d est impair} \end{cases}$$

Démonstration. On utilise la propriété universelle qui définit $\mathcal{L}_\mathrm{N}$. Considérons sur $\mathrm{X}_0^{reg}(d) \times \mathbb{P}^2$ le morphisme universel

$$q : \mathrm{A} \otimes \mathcal{O}_{\mathrm{X}_0^{reg}(d)\times\mathbb{P}^2}(-2) \longrightarrow \mathrm{A}^* \otimes \mathcal{O}_{\mathrm{X}_0^{reg}(d)\times\mathbb{P}^2}(-1)$$

dont on note $\mathcal{F}$ le conoyau. Le $\mathcal{O}_{\mathrm{X}_0^{reg}(d)\times\mathbb{P}^2}$-module $\mathcal{F}$ définit une famille de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$-modules régulièrement stables de dimension 1. Soit $f_\mathcal{F}$ le morphisme modulaire associé à cette famille. Par la propriété universelle qui définit $\mathcal{L}_\mathrm{N}$, on a

$$f_\mathcal{F}^*(\mathcal{L}_\mathrm{N}) = \lambda_\mathcal{F}(u) \text{ avec } u = [\mathcal{O}_p] \text{ la classe d'un point } p \in \mathbb{P}^2.$$

Or la résolution de $\mathcal{F}$ montre que $\lambda_\mathcal{F}(u)$ s'identifie au G-fibré inversible

$$(\det(\mathrm{A}))^{-2} \otimes \mathcal{O}_{\mathrm{X}_0^{reg}(d)}.$$

L'image réciproque de $\mathcal{L}_{\mathrm{N}}$ sous $f_{\mathcal{F}}$ s'identifie donc suivant si d est pair ou impair à $\mathcal{L}_{\chi}^{\otimes 2}$ ou $\mathcal{L}_{\chi}$. Par construction on a un diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd} \mathrm{X}_0^{reg}(d) \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "f_{\mathcal{F}}"] & \\ \Theta_{=0}^{reg}(d) \arrow[r, "\gamma"] & \mathrm{N}^s(d,0) \end{tikzcd}$$

Il en découle que, suivant si d est pair ou impair, γ^* envoie $\mathcal{L}_{\mathrm{N}}$ sur $\mathcal{L}^{\otimes 2}$ ou $\mathcal{L}$, ce qui démontre le lemme. ∎

(7.9) *Fin de la démonstration du théorème 1.1:* Considérons la restriction

$$i^* : \mathrm{Pic}(\Theta_0^{reg}(d)) \longrightarrow \mathrm{Pic}(\Theta_{=0}^{reg}(d)).$$

Puisque $\Theta_0^{reg}(d)$ est lisse, le noyau de i^* est donné par $\mathbb{Z}\mathcal{O}(\Theta_2)$. Par construction (4.2 et 6.3), on a $\mathcal{P} = \mathcal{O}(\Theta_2)$ dans $\mathrm{Pic}(\Theta_0^{reg}(d))$. Si $d \leq 4$ on sait que $\Theta_2 = \emptyset$. Le groupe de Picard de $\Theta_0^{reg}(d)$ est donc librement engendré par $\mathcal{L}$ si $d \leq 4$ et par $\mathcal{L}$ et $\mathcal{P}$ pour $d \geq 5$. Considérons maintenant le diagramme commutatif de morphismes naturels

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Pic}(\Theta_0(d)) \arrow[r, "\rho"] & \mathrm{Pic}(\Theta_0^{reg}(d)) \\ \mathrm{Pic}(\mathrm{N}(d,0)) \arrow[u] \arrow[r, "\rho_{\mathrm{N}}"] & \mathrm{Pic}(\mathrm{N}^s(d,0)) \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Le morphisme ρ_{N} est un isomorphisme, $\mathrm{N}(d,0)$ étant localement factorielle [LP, 1.1]; le morphisme ρ est injectif, $\Theta_0(d)$ étant normale. Il découle du lemme 7.8 et du diagramme ci-dessus que, si $d \geq 3$ est impair, $\mathcal{L}$ est dans l'image de ρ. Si $d \geq 4$ est pair $\mathcal{L}^{\otimes 2}$ est de même dans l'image de ρ, mais $\mathcal{L}$ ne l'est pas, puisque $\mathcal{L}_{\chi}$ ne descend pas à $\Theta_{=0}(d)$ entier (le stabilisateur d'un point au dessus de la thêta-caractéristique $\mathcal{O}_{\ell}(-1)^d$ est $\mathrm{O}(d)/\{\pm 1\} \subset \overline{\mathrm{G}}_0$; par conséquent, l'action du stabilisateur sur la fibre correspondant de $\mathcal{L}_{\chi}$ n'est pas triviale en ce point). D'après la proposition 6.5, $\mathcal{P}^2$ est dans l'image de ρ pour $d \geq 5$, mais $\mathcal{P}$ ne l'est que pour $d = 5$. Les fibrés inversibles $\mathcal{P}^2$ (et $\mathcal{P}$ pour $d = 5$) et $\mathcal{L}$ ou $\mathcal{L}^{\otimes 2}$ suivant si d est impair ou pair, s'étendent donc, et ceci de façon unique, à $\Theta_0(d)$ entier.

(7.10) Comme l'image réciproque de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{\mathrm{M}}}(1)$ sous le morphisme schématique

$$\sigma_{\mathrm{N}} : \mathrm{N}(d,0) \longrightarrow \mathbb{P}^{\mathrm{M}},$$

avec $\mathrm{M} = d(d+3)/2$, s'identifie à $\mathcal{L}_{\mathrm{N}}$ on obtient aussi le lemme suivant:

Lemme 7.11.— *Si $\sigma_{\Theta} : \Theta_0(d) \to \mathbb{P}^{\mathrm{M}}$, avec $\mathrm{M} = d(d+3)/2$, est le morphisme qui associe à une thêta-caractéristique son support schématique, l'image réciproque de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{\mathrm{M}}}(1)$ s'identifie, si d est pair, à l'extension unique de $\mathcal{L}^2$ à $\Theta_0(d)$, et, si d est impair, à l'extension unique de $\mathcal{L}$ à $\Theta_0(d)$.*

8. GROUPE DE PICARD DE LA COMPOSANTE IMPAIRE

(8.1) On suppose, dans ce qui suit, que $d \geq 4$. Considérons le fibré vectoriel

$$\mathrm{E}_1 = \mathrm{H}' \otimes_k \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-2) \oplus \mathrm{H}'' \otimes_k \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-3),$$

avec $\mathrm{H}' = k^{d-3}$ et $\mathrm{H}'' = k$. Soit $\widetilde{\mathrm{X}_1}(d)$ l'espace vectoriel des morphismes symétriques $q : \mathrm{E}_1 \to \mathrm{E}_1^\vee$. Si q est injectif comme morphisme de faisceaux son conoyau $\mathcal{F}$ est de dimension 1, muni d'une structure de thêta-caractéristique σ provenant de la symétrie de q. Soit $\mathrm{X}_1'(d) \subset \widetilde{\mathrm{X}}_1(d)$ l'ouvert des morphismes q qui sont injectifs comme morphisme de faisceau. D'après la proposition 7.4 la codimension du complémentaire de $\mathrm{X}_1'(d)$ dans $\widetilde{\mathrm{X}}_1(d)$ est au moins 2. Soit $\mathrm{X}_1(d) \subset \mathrm{X}_1'(d)$ l'ouvert de $\mathrm{X}_1'(d)$ des q définissant une thêta-caractéristique semi-stable.

Proposition 8.2.— *La codimension du fermé complémentaire de* $\mathrm{X}_1(d)$ *dans* $\mathrm{X}_1'(d)$ *est au moins deux.*

Démonstration. On applique la proposition 7.5 à la famille des thêta-caractéristiques $\mathrm{X}_1'(d)$-plate définie par le quotient du morphisme universel sur $\mathrm{X}_1'(d) \times \mathbb{P}^2$. On vérifie que le morphisme ω_+ est surjectif et l'on est donc ramené à prouver que si $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$ est un sous-faisceau totalement isotrope non nul et propre de $\mathcal{F}$ tel que $\chi(\mathcal{E}) = 1$, alors $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}, \mathcal{E}^\vee)$ est de dimension au moins 2. Mais ceci se montre facilement en utilisant une variante de la proposition 8.5 de [S1]. ∎

Le groupe algébrique $\mathrm{G}_1 = \mathrm{Aut}(\mathrm{E}_1)$ opère sur $\mathrm{X}_1(d)$ en associant à $g \in \mathrm{G}_1$ et $q \in \mathrm{X}_1(d)$ l'élément $g.q =^\vee (g^{-1})qg^{-1}$.

Proposition 8.3.— *Le morphisme modulaire* $\mathrm{X}_1(d) \to \Theta_{=1}(d)$ *est un bon quotient par l'action de* G_1.

Démonstration. Identifions d'abord les éléments de $\mathrm{X}_1(d)$ aux matrices

$$q = \begin{pmatrix} u & v \\ {}^\vee v & w \end{pmatrix}$$

avec $u \in \mathrm{L}(\mathrm{S}^2\mathrm{H}'^*, \mathrm{V}^*)$, $v \in \mathrm{Hom}(\mathrm{H}'' \otimes \mathcal{O}(-3), \mathrm{H}'^* \otimes \mathcal{O}(-1))$ et $w \in \mathrm{L}(\mathrm{S}^2\mathrm{H}''^*, \mathrm{W}^*)$ avec $\mathrm{V} = \mathrm{H}^0(\mathcal{O}(1))$ et $\mathrm{W}^* = \mathrm{H}^0(\mathcal{O}(3))$. Soit $\mathrm{N} \subset \mathrm{G}_1$ le sous-groupe distingué et fermé de G_1 formé des éléments

$$g = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec $b \in \mathrm{Hom}(\mathrm{H}'' \otimes \mathcal{O}(-3), \mathrm{H}'^* \otimes \mathcal{O}(-2))$. Le quotient G_1/N s'identifie à $\mathrm{GL}(\mathrm{H}') \times \mathrm{GL}(\mathrm{H}'')$. Le groupe algébrique N opère (comme sous-groupe de G_1) sur $\mathrm{X}_1(d)$. Cette action est donnée en associant à $g \in \mathrm{N}$ et $q \in \mathrm{X}_1(d)$

$$g.q = \begin{pmatrix} u & -ub + v \\ -{}^\vee bu +^\vee v & {}^\vee bub - ({}^\vee bv +^\vee vb) + w \end{pmatrix}$$

Le morphisme u est génériquement injectif. En effet, sinon, soit N son noyau. On obtiendrait un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
 & \mathrm{N} \arrow[r, "="] \arrow[d, "(i,0)"'] & \mathrm{N} \arrow[d, "(0,{}^\vee vi)"'] & & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{H}' \otimes \mathcal{O}(-2) \oplus \mathrm{H}'' \otimes \mathcal{O}(-3) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}'^* \otimes \mathcal{O}(-1) \oplus \mathrm{H}''^* \otimes \mathcal{O} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F} \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Im}(u) \oplus \mathrm{H}'' \otimes \mathcal{O}(-3) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{H}'^* \otimes \mathcal{O}(-1) \oplus \dfrac{\mathrm{H}'' \otimes \mathcal{O}}{\mathrm{N}} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{F} \arrow[r] & 0 \\
 & 0 & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Mais $(\mathrm{H}'' \otimes \mathcal{O})/\mathrm{N}$ est de dimension 1 et, comme $\mathrm{Im}(u)$ est sans torsion, s'injecterait dans $\mathcal{F}$, ce qui est impossible en raison de la semi-stabilité de $\mathcal{F}$. Par conséquent, si le morphisme $ub = 0$, on a $b = 0$. On en déduit que l'action de N sur $\mathrm{X}_1(d)$ est libre, puisque l'application donnée par l'opération

$$\mathrm{Hom}(\mathrm{H}'' \otimes \mathcal{O}(-3), \mathrm{H}'^* \otimes \mathcal{O}(-1)) \times \mathrm{X}_1(d) \to \mathrm{X}_1(d) \times \mathrm{X}_1(d)$$

est une immersion fermée. Par conséquent, il existe un quotient géométrique Y de $\mathrm{X}_1(d)$ par l'action de N.

Considérons le fibré de repères R au dessus de $\mathrm{T}^{ss}_{=1}(d)$ dont la fibre au-dessus de $[\mathcal{F}_s, \sigma_s, \alpha_s]$ paramètre les isomorphismes

$$\beta : k^{d-3} \simeq \mathrm{Ker}(\mathrm{H}^1(\mathcal{F}_s(-1)) \xrightarrow{d_1^{-2,1}} \mathrm{H}^1(\mathcal{F}_s)) \text{ et } \gamma : k \simeq \mathrm{H}^1(\mathcal{F}_s).$$

On a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{R} \arrow[r, "a"] \arrow[d, "p"'] & \mathrm{X}_1(d)/\mathrm{N} \arrow[d, "f"] \\
\mathrm{T}^{ss}_{=1}(d) \arrow[r] & \Theta_{=1}(d)
\end{tikzcd}$$

où le morphisme a est donné par la proposition 5.3 et la propriété universelle évidente de $\mathrm{X}_1(d)/\mathrm{N}$. Comme p est un bon quotient, par le lemme de Seshadri, $\mathrm{R} \to \Theta_{=1}(d)$ l'est aussi. Puisque a est un bon quotient, f l'est aussi, encore par le lemme de Seshadri. Ce lemme, appliqué à nouveau au morphisme modulaire $\mathrm{X}_1(d) \to \Theta_{=1}(d)$ montre que ce dernier est un bon quotient, d'où la proposition. ∎

Lemme 8.4.— *Soit $\mathrm{X}_1^{reg}(d) \subset \mathrm{X}_1(d)$ l'ouvert des morphismes q induisant des thêta-caractéristiques régulièrement stables. La codimension du fermé complémentaire est au moins deux.*

Démonstration. Analogue à la démonstration du lemme 7.6. ∎

(8.5) Soit $\overline{\mathrm{G}}_1 = \mathrm{Aut}(\mathrm{E}_1)/\{\pm \mathrm{Id}\}$. On déduit de ce que précède, comme dans (7.7), que le groupe $\mathrm{Pic}^{\overline{\mathrm{G}}_1}(\mathrm{X}_1^{reg})$ des $\overline{\mathrm{G}}_1$-fibrés inversibles sur $\mathrm{X}_1^{reg}(d)$ est isomorphe au groupe $\chi(\overline{\mathrm{G}}_1)$ des caractères de $\overline{\mathrm{G}}_1$. Le groupe des automorphismes de E_1 est formé de matrices f de la forme

$$f = \begin{pmatrix} \alpha & \gamma \\ 0 & \beta \end{pmatrix}.$$

Le groupe des caractères de $\overline{\mathrm{G}}_1$ est donné par $f \mapsto (\det \alpha)^k (\det \beta)^\ell$ où les entiers k et ℓ satisfont à l'équation $(d-3)k + \ell = 0 \bmod 2$. Si d est impair, ce sont les couples $(k, \ell) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ avec ℓ pair. Si d est pair, ce sont les couples $(k, \ell) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ avec $k + \ell$ pair. Nous choisissons pour générateurs les caractères

$$\chi_1 : f \mapsto \det{}^{-1}(\alpha) \det{}^{-c}(\beta)$$

$$\chi_2 : f \mapsto \det{}^{-2}(\beta)$$

avec $c = 0$ pour d impair et $c = 1$ pour d pair. Soient $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ les $\overline{\mathrm{G}}_1$-fibrés inversibles associés respectivement aux caractères χ_1 et χ_2. Puisque les stabilisateurs de l'action de $\overline{\mathrm{G}}_1$ sur $\mathrm{X}_1^{reg}(d)$ sont triviaux et $\mathrm{X}_1^{reg}(d) \to \Theta_{=1}^{reg}(d)$ est un bon quotient (8.3), par le lemme de Kempf, on voit que $\mathrm{Pic}(\Theta_{=1}^{reg}(d)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Pic}^{\overline{\mathrm{G}}_1}(\mathrm{X}_1^{reg}(d))$. En particulier, $\mathrm{Pic}(\Theta_{=1}^{reg}(d))$ est isomorphe à un groupe abélien libre à deux générateurs. Pour générateurs nous choisissons le fibré inversible $\mathcal{L}$, obtenu par descente de $\mathcal{L}_1$ et le fibré inversible $\mathcal{D}$, obtenu par descente de $\mathcal{L}_2$.

(8.6) *Fin de la démonstration du théorème 1.2.* Si $d \neq 6$, la codimension du fermé des thêta-caractéristiques telles que $h^0(\mathcal{F}) \geq 3$ est au moins deux dans $\Theta_1(d)$, d'après les résultats de la section 2. Si $d = 6$, ce fermé est de codimension 1.

Question 8.7.— *Si $d = 6$, ce fermé est irréductible. Est-il réduit?*

On en déduit que, si $d \neq 6$, alors on a $\mathrm{Pic}(\Theta_{=1}^{reg}(d)) \simeq \mathrm{Pic}(\Theta_1^{reg}(d))$ et si $d = 6$, alors on a $\mathrm{Pic}(\Theta_1^{reg}(d)) \simeq \mathrm{Pic}(\Theta_{=1}^{reg}(d)) \oplus \mathbb{Z}$.

Considérons le morphisme $\gamma : \Theta_1^{reg}(d) \to \mathrm{N}^s(d, 0)$.

Lemme 8.8.— *Soit $d \geq 4$. On a $\gamma^*(\mathcal{D}_\mathrm{N}) = \mathcal{D}$ et*

$$\gamma^*(\mathcal{L}_\mathrm{N}) = \begin{cases} \mathcal{L}^{\otimes 2} & \textit{si } d \textit{ est pair} \\ \mathcal{L}^{\otimes 2} \otimes \mathcal{D} & \textit{si } d \textit{ est impair} \end{cases}$$

Démonstration. On utilise encore la propriété universelle qui définit $\mathcal{L}_\mathrm{N}$ et $\mathcal{D}_\mathrm{N}$, cette fois-ci appliquée à la famille des faisceaux semi-stables définie comme conoyau du morphisme universel sur $\mathrm{Z} \times \mathbb{P}^2$, avec $\mathrm{Z} = \mathrm{X}_1^{reg}(d)$,

$$\mathrm{H}' \otimes \mathcal{O}_{\mathrm{Z} \times \mathbb{P}^2}(-2) \oplus \mathrm{H}'' \otimes \mathcal{O}_{\mathrm{Z} \times \mathbb{P}^2}(-3) \xrightarrow{q} \mathrm{H}'^* \otimes \mathcal{O}_{\mathrm{Z} \times \mathbb{P}^2}(-1) \oplus \mathrm{H}''^* \otimes \mathcal{O}_{\mathrm{Z} \times \mathbb{P}^2}.$$

Si $u = [\mathcal{O}_p]$ est la classe d'un point $p \in \mathbb{P}^2$, alors le fibré $\mathcal{L}_\mathcal{F}(u)$ s'identifie à $(\det(\mathrm{H}'))^{-2} \otimes (\det(\mathrm{H}''))^{-2} \otimes \mathcal{O}_\mathrm{Z}$; si $u = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$, alors le fibré $\mathcal{L}_\mathcal{F}(u)$ s'identifie à $(\det(\mathrm{H}''))^{-2} \otimes \mathcal{O}_\mathrm{Z}$. Le lemme en découle, comme dans le cas de l'énoncé analogue pour la composante paire. ∎

Considérons le diagramme commutatif de morphismes naturels

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Pic}(\Theta_1(d)) & \xrightarrow{\rho} & \mathrm{Pic}(\Theta_1^{reg}(d)) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathrm{Pic}(\mathrm{N}(d,0)) & \xrightarrow{\rho_{\mathrm{N}}} & \mathrm{Pic}(\mathrm{N}^s(d,0)) \end{array}$$

Le morphisme $\rho_{\mathrm{N}} : \mathrm{Pic}(\mathrm{N}(d,0)) \to \mathrm{Pic}(\mathrm{N}^s(d,0))$ est un isomorphisme, $\mathrm{N}(d,0)$ étant localement factorielle; le morphisme ρ est injectif, $\Theta(d)$ étant normale. Il découle du lemme et du diagramme que $\mathcal{D}$ est dans l'image de ρ_θ. De plus $\mathcal{L}^{\otimes 2}$ est dans l'image de ρ_θ, mais $\mathcal{L}$ ne l'est pas, puisque $\mathcal{L}_{\chi_1}$ ne descend pas à $\Theta_{=1}(d)$ entier. Ceci termine la démonstration de théorème 1.2. ∎

9. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.3

On reprend les notations de la section (2.2). Soit $d \geq 4$ un entier pair. Supposons qu'il existe une famille universelle sur un ouvert $\mathrm{U} \subset \Theta_0^{reg}(d)$. Par image réciproque, on obtient une famille universelle $(\mathcal{G}, \tau)$ paramétrée par l'ouvert U', image réciproque de U sous le morphisme $\mathrm{T}_0^{ss}(d,\mathrm{N}) \to \Theta_0(d)$. Soit $[\mathcal{F}, \sigma, \alpha]$ le triplet universel sur $\mathrm{T}_0^{ss}(d,\mathrm{N})$ et considérons le faisceau $\mathcal{L} = \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{G}, \mathcal{F})$. Ce faisceau est un fibré en droites sur U', muni d'une action de $\mathrm{GL}(\mathrm{H})$. Pour $\alpha \in \{\pm id\}$ cette action est donnée par

$$\alpha \longrightarrow \alpha\, \mathrm{Id}_{\mathcal{L}}\,.$$

Par lissité de $\mathrm{T}_0^{ss}(d,\mathrm{N})$, $\mathcal{L}$ s'étend à $\mathrm{T}_0^{ss}(d,\mathrm{N})$ entier. Que l'action s'étende est conséquence du lemme suivant, dû à Le Potier [LP].

Lemme 9.1.— *Soit* X *une variété affine, lisse et irréductible sur laquelle opère le groupe réductif et connexe* G*,* $f \in \mathcal{O}(\mathrm{X})$ *un élément non-nul, invariant sous l'action de* G*. Soit* U_f *l'ouvert défini par* $f \neq 0$*. Alors si* L *est un fibré inversible sur* X *toute action linéaire de* G *sur* $\mathrm{L}_{|\mathrm{U}_f}$ *s'étend à* X *entier.*

Considérons maintenant la thêta-caractéristique suivante: Soit ℓ une droite de $\mathbb{P}^2$ et $(\mathcal{M}, \rho)$ définie par la somme directe orthogonale

$$(\mathcal{M}, \rho) = \bigoplus_{i=1}^{i=d} (\mathcal{O}_\ell(-1), 1)$$

Choisissons une identification β de $\mathrm{H}^0(\mathcal{M}(\mathrm{N}))$ avec H. Le stabilisateur de $[\mathcal{F}, \alpha, \sigma]$ sous l'action de $\mathrm{GL}(\mathrm{H})$ s'identifie au groupe orthogonal $\mathrm{O}(d)$, ce qui donne une opération de $\mathrm{O}(d)$ sur $\mathcal{L}_{[\mathcal{M},\beta,\sigma]}$. Une telle opération est donnée par un caractère de $\mathrm{O}(d)$, donc de la forme

$$g \mapsto \det(g)^n \text{ avec } n = 0, 1.$$

Par densité de U' dans $\mathrm{T}_0^{ss}(d,\mathrm{N})$, l'opération de (-1) sur $\mathcal{L}_{[\mathcal{M},\rho,\beta]}$ est donnée par $v \mapsto -v$ pour $v \in \mathcal{L}_{[\mathcal{M},\rho,\beta]}$. Mais ceci n'est pas possible, vu que $\det(-\mathrm{Id}) = 1$ pour d pair, ce qui donne la contradiction cherchée.

Soit $d \geq 3$ un entier impair et considérons la famille universelle $[\mathcal{F}, \sigma, \alpha]$ sur $\mathrm{T}^{reg}(d, \mathrm{N}) \times \mathbb{P}^2$. Soient p et q les projections canoniques dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{T}^{reg}(d,\mathrm{N}) \times \mathbb{P}^2 & \xrightarrow{p_2} & \mathbb{P}^2 \\ {\scriptstyle p_1}\downarrow & & \\ \mathrm{T}^{reg}(d,\mathrm{N}) & & \end{array}$$

Pour $u \in \mathrm{K}(\mathbb{P}^2)$, considérons l'élément suivant dans $\mathrm{Pic}^{\mathrm{GL(H)}}(\mathrm{T}^{reg}(d, \mathrm{N}))$:

$$\mathcal{L}_{\mathcal{F}}(u) = \det(p_{1!}(\mathcal{F} \otimes p_2^*(u)).$$

L'action de $\alpha = \pm 1$ est donnée par $\alpha \mapsto \alpha^{<c,u>}$ où c est la classe de $\mathrm{K}_{top}(\mathbb{P}^2)$ définie par $(0, d, 0)$. Choisissons $u = (0, d', 0)$ avec d' impair, ce qui donne $< c, u >= 1 \bmod 2$, et posons $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\mathcal{F}}(u)$. On a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

sur $\mathrm{T}^{reg}(d, \mathrm{N}) \times \mathbb{P}^2$ avec $\mathcal{B} = \mathrm{H} \otimes_k p_2^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-\mathrm{N}))$ et $\mathcal{A}$ localement libre. Considérons sur $\mathrm{T}^{reg}(d, \mathrm{N}) \times \mathbb{P}^2$ l'injection $\mathcal{A} \otimes p_1^*(\mathcal{L}) \hookrightarrow \mathcal{B} \otimes p_1^*(\mathcal{L})$. Ces GL(H)-fibrés descendent. Le conoyau sera une famille universelle de thêta-caractéristiques sur $\Theta^{reg}(d)$, si $\mathcal{L}$ satisfait à $\mathcal{L} \otimes \mathcal{L} = \mathcal{O}$. Maintenant pour tout point de $\mathrm{T}^{reg}(d, \mathrm{N})$ il existe un voisinage de Zariski U' tel que $\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}$ soit trivial sur U'. On peut supposer cet ouvert GL(H)-invariant (car $\mathcal{L} \otimes \mathcal{L}$ descend), d'où l'existence d'une famille universelle sur l'ouvert U, image de l'ouvert U'. Ainsi, il existe une famille universelle de thêta-caractéristiques localement dans la topologie de Zariski. Globalement sur $\Theta^{reg}(d)$, il ne peut exister une telle famille. Il suffit en effet de considérer par exemple l'ouvert des thêta-caractéristiques ineffectives. D'après ce que précède l'existence d'une telle famille supposerait l'existence d'un GL(A)-fibré inversible d'ordre 2 dans $\mathrm{Pic}^{\mathrm{GL(A)}}(\mathrm{X}^{reg})$ (avec les notations de la section 7). Mais on a vu que ce groupe est sans torsion. ∎

Question 9.2.— *Peut-on trouver un revêtement étale de degré* 2 *de* $\Theta(d)$*, sur lequel on a une famille universelle?*

Bibliographie

[C] F. Catanese. Babbage's Conjecture, Contact of Surfaces, Symmetric Determinantal Varieties and Applications, *Invent. math.* **63** (1981) 433-465

[D] A. C. Dixon. Note on the reduction of a ternary quantic to a symmetrical determinant, *Proc. Camb. Phil. Soc.* **11** (1902) 350-351

[D-LP] J. M. Drezet et J. Le Potier. Fibrés stables et fibrés exceptionnels sur le plan projectif, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* 4e **série, t.18** (1985) 193-244

[D-N] J. M. Drezet et M. S. Narasimhan. Groupe de Picard des variétés de modules de fibrés semi-stables sur les courbes algébriques, *Invent. Math.* **97** (1989) 53-94

[F] J. Fogarty. Fixed point schemes, *Amer. J. Math.* **95** (1973) 35-51

[H] A. Hirschowitz. Rank techniques and jump stratifications, *Oxford University Press, Bombay* (1987)

[L-S] Y. Laszlo et Ch. Sorger The line bundles on the moduli of parabolic G-bundles and their sections. *À paraître aux Ann. Sci. École Norm. Sup.*

[L] Y. Laszlo. Théorème de Torelli générique pour les intersections complètes de trois quadriques de dimension paire, *Invent. Math.* **98** (1989) 247-264

[LP] J. Le Potier. Faisceaux semi-stables de dimension 1 sur le plan projectif, *Rev. Roum. Math. Pures Appl.* **38** (1993) 635-678

[Si] C. T. Simpson. Moduli of Representations of the Fundamental Group of a Smooth Variety I, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **79** (1994) 47-129

[S1] Ch. Sorger. Thêta-caractéristiques des courbes tracées sur une surface lisse, *J. für die reine u. angew. Math.* **435** (1993) 83-118

[S2] Ch. Sorger. La semi-caractéristique d'Euler-Poincaré des faisceaux ω_X-quadratiques sur un schéma de Cohen-Macaulay, *Bull. Soc. Math. France* **122** (1993) 225-233