Fibrés vectoriels sur le plan projectif (d'après J. Le Potier)

Christoph Sorger¹

1. Introduction

Dans le texte qui suit, je voudrais expliquer certains résultats de Joseph Le Potier sur les fibrés vectoriels et leurs espaces de modules sur le plan projectif.

L'étude des fibrés vectoriels sur \mathbb{P}_2 était pour lui une très grande source d'inspiration. Elle est à l'origine de nombreuses contributions de Joseph, dépassant très largement ce cadre, parmi lesquelles figurent ses travaux sur les espaces de modules de faisceaux semi-stables sur d'autres surfaces ou sur les courbes ainsi que l'introduction d'objets nouveaux comme les faisceaux semi-stables de torsion ou les systèmes cohérents.

Bien entendu, il est hors de mon propos d'être exhaustif ici. Je voudrais plutôt me concentrer, après quelques rappels sur les espaces de modules, sur deux types de résultats. Il s'agit d'une part de théorèmes généraux comme les théorèmes d'existence de fibrés stables et d'autre part de théorèmes sur la géométrie des espaces de modules en rang 2, essentiellement centrés autour du morphisme de Barth. En particulier, je montrerai son calcul, non publié, de l'invariant de Lüroth, autrement dit de l'invariant de Donaldson en degré 4.

J'ai débuté en géométrie algébrique avec un cours de Maîtrise de Joseph, suivi d'un cours de DEA, d'un mémoire de DEA puis d'une thèse sous sa direction. Entré ensuite au CNRS, j'ai été affecté à son laboratoire puis installé dans son bureau à Jussieu, pratiques d'un autre temps. Ces conditions de recherches ont été une chance merveilleuse et j'ai énormément profité pendant toutes ces années de l'aide de Joseph et de son soutien, tout comme de son enthousiasme, de sa rigueur et surtout de son amitié infaillible.

Je voudrais remercier Jean-Marc Drézet pour sa relecture détaillée de ce texte.

2. L'espace de modules

Si X est une variété algébrique on cherche à classifier les fibrés vectoriels algébriques de type topologique fixé sur X, autrement dit on cherche une variété algébrique dont les points correspondent aux classes d'isomorphisme de fibrés vectoriels algébriques, avec rang et classes de Chern fixés. Classiquement, le premier exemple est la jacobienne sur une courbe projective lisse C qui s'identifie aux classes d'isomorphismes de fibrés vectoriels de rang C et de degré C. En rang supérieur, on ne peut pas s'attendre à trouver de telles variétés algébriques mais on peut s'en rapprocher en considérant un certain type de fibrés vectoriels : ceux qui sont C0. Cette observation fondamentale est due à C1. Mumford, à qui on doit la définition suivante : un fibré vectoriel sur une courbe est stable si pour tout sous-fibré vectoriel C2. C3 pente de C4, à savoir le rapport C4 est strictement

¹ Institut Universitaire de France & Université de Nantes

inférieure à la pente de F. L'importance de cette notion a été immédiatement comprise par Narasimhan et Seshadri qui ont montré alors que les fibrés vectoriels stables sur C correspondent de manière biunivoque aux représentations unitaires du groupe fondamental de C. Sur une courbe, on peut effectivement mettre une structure de variété algébrique sur l'ensemble des classes d'isomorphisme de fibrés stables de rang et de degré fixés mais la variété obtenue n'est projective que si le degré et le rang sont premier entre eux. Pour pallier ce problème, on considère des fibrés semi-stables en remplaçant l'inégalité stricte ci-dessus par une inégalité large et on s'autorise à regarder l'ensemble des classes de S-équivalence : tout fibré semi-stable admet une filtration $0 = E_0 \subset E_1 \cdots \subset E_m = E$ avec E_i/E_{i-1} stable de même pente que E. La filtration n'est pas unique mais le gradué l'est à isomorphisme près. Deux fibrés semi-stables sont alors dit S-équivalents si leur gradués respectifs sont isomorphes. Bien entendu, pour les fibrés stables, la relation d'équivalence se réduit à celle d'isomorphisme.

En dimension supérieure, pour obtenir des espaces de modules projectifs, on doit considérer non seulement des fibrés vectoriels mais aussi des faisceaux sans torsion. La notion de semi-stabilité doit donc être adaptée : non seulement elle devra faire intervenir les autres classes de Chern mais aussi une polarisation de X, c'est-à-dire un plongement de X dans un espace projectif (déjà pour pouvoir définir le degré d'un faisceau cohérent). Dans le cas du plan projectif, cela se simplifie et il s'avère utile de considérer deux rationnels naturellement associés à un faisceau cohérent : la pente et le discriminant.

Soit E un faisceau cohérent sur \mathbb{P}_2 de rang r > 0 et de classes de Chern c_1 et c_2 . On définit respectivement la pente

$$\mu(E) = \frac{c_1}{r}$$

et le discriminant de E

$$\Delta(E) = \frac{1}{r}(c_1 - \frac{r-1}{2r}c_1^2).$$

Le faisceau E est dit semi-stable (resp. stable) s'il est sans torsion et si pour tout sous-faisceau non trivial et strict $E'\subset E$ on a $\mu(E')\leqslant \mu(E)$ et, en cas d'égalité, $\Delta(E')\geqslant \Delta(E)$ (resp. >).

On note $M_{\mathbb{P}_2}(r,c_1,c_2)$ l'espace de modules grossier des faisceaux semi-stables de rang r et de classes de Chern c_1 et c_2 . C'est une variété projective dont les points fermés sont les classes de S-équivalence.

Il y a des ouverts naturels $\mathsf{M}^s_{\mathbb{P}_2}(r,c_1,c_2)\subset \mathsf{M}_{\mathbb{P}_2}(r,c_1,c_2)$ correspondant aux faisceaux stables et $\mathsf{M}^o_{\mathbb{P}_2}(r,c_1,c_2)\subset \mathsf{M}_{\mathbb{P}_2}(r,c_1,c_2)$ correspondant aux fibrés vectoriels.

L'espace $\mathsf{M}_{\mathbb{P}_2}(r,c_1,c_2)$ est un espace de modules *grossier*. Ceci signifie essentiellement que si $\mathcal E$ est une famille de faisceaux semi-stables de rang r et de classes de Chern c_1 et c_2 paramétrée par la variété S, il existe un morphisme dit *modulaire* $f_{\mathcal E}:S\to \mathsf{M}_{\mathbb{P}_2}(r,c_1,c_2)$ associant à $\mathcal E_s$ la classe $[\mathcal E_s]\in \mathsf{M}_{\mathbb{P}_2}(r,c_1,c_2)$.

On peut se demander s'il existe une famille universelle disons au moins sur l'ouvert des fibrés vectoriels stables $\mathsf{M}^{os}_{\mathbb{P}_2}(r,c_1,c_2)$, c'est-à-dire un fibré vectoriel \mathcal{U} sur $\mathsf{M}^{os}_{\mathbb{P}_2}(r,c_1,c_2)\times\mathbb{P}_2$ tel que pour tout $[s]\in\mathsf{M}^{os}_{\mathbb{P}_2}(r,c_1,c_2)$ la classe d'isomorphisme de \mathcal{U}_s soit [s] (on dit aussi fibré de Poincaré). Il n'en est rien en général comme le montre Joseph Le Potier en 1979 dans son premier article sur les fibrés vectoriels

sur le plan projectif [10] : par exemple si r=2 et $c_1=0$ alors pour c_2 pair il n'existe pas de telle famille.

Soit E un faisceau stable. Les déformations infinitésimales de E sont gouvernées par le groupe $\operatorname{Ext}^1(E,E)$. Par ailleurs, on a $\operatorname{Hom}(E,E)=\mathbb{C}$ par stabilité; pour le groupe d'obstructions on a $\operatorname{Ext}^2(E,E)\simeq \operatorname{Hom}(E,E(-3))^*=0$ d'abord par dualité de Serre puis par stabilité de E. Ainsi, [E] définit un point lisse de $\operatorname{M}_{\mathbb{P}_2}(r,c_1,c_2)$ d'espace tangent $\operatorname{Ext}^1(E,E)$.

Les espaces de modules $\mathsf{M}_{\mathbb{P}_2}(r,c_1,c_2)$ sont de très belles variétés naturellement associées au plan projectif. Par exemple, si r=1, $c_1=0$ et $c_2=n$, on obtient le schéma de Hilbert $\mathsf{Hilb}_{\mathbb{P}_2}^n$ de n points sur \mathbb{P}_2 . En effet, soit E un faisceau semi-stable de rang 1. Comme il est sans torsion, il se plonge dans son bidual E^{**} . Celui-ci est réflexif donc localement libre de classe de Chern $c_1=0$. C'est donc $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}$ et E est ainsi un faisceau d'idéaux de colongueur n.

3. Théorèmes fondamentaux

3.1. Théorèmes d'existence

On cherche des conditions nécessaires et suffisantes à imposer sur r, c_1 et c_2 pour qu'il existe au moins un fibré vectoriel stable de rang r et de classes de Chern c_1 et c_2 . Pour r=2, le résultat était connu de Schwarzenberger. La condition est

$$c_2 - rac{c_1^2}{4} \geqslant \left\{ egin{array}{ll} 2 & ext{si } c_1 ext{ est pair} \ rac{3}{4} & ext{si } c_1 ext{ est impair} \end{array}
ight.$$

Pour répondre à la question, Joseph Le Potier et Jean-Marc Drézet introduisent la notion fondamentale de fibré *exceptionnel*. Par définition, c'est un fibré stable E tel que $\operatorname{Ext}^1(E,E)=0$, autrement dit un fibré stable rigide. Si E est un tel fibré, l'espace de modules est alors réduit au point défini par [E]. En fait, il est même défini par sa pente : son rang r_μ est le plus petit dénominateur positif de μ et son discriminant est donné par

$$\Delta_{\mu} = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{r_{\mu}^2}).$$

Ceci résulte de la formule de Rieman-Roch :

$$\chi(E,E) = \sum (-1)^i \dim \operatorname{Ext}^i(E,E) = r^2(1-2\Delta)$$

Soit donc $\mathbb{E}\subset\mathbb{Q}$ l'ensemble des pentes des fibrés exceptionnels. Il est tout à fait remarquable que Le Potier et Drézet aient réussi à déterminer complètement cet ensemble. Pour cela, si $\alpha,\beta\in\mathbb{Q}$ sont tels que $3+\alpha-\beta\neq 0$, on pose

$$\alpha.\beta = \frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{\Delta_{\beta} - \Delta_{\alpha}}{3 + \alpha - \beta}.$$

Soit $\mathbb{D} \subset \mathbb{Q}$ l'ensemble des rationnels de la forme $\frac{p}{2^q}$ pour $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{Z}_{\geqslant 0}$. On définit par récurrence l'application $\varepsilon : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{Q}$ en demandant qu'elle soit l'identité sur \mathbb{Z} et satisfasse à

$$\varepsilon\left(\frac{2p+1}{2^{q+1}}\right)=\varepsilon\left(\frac{p}{2^q}\right).\varepsilon\left(\frac{p+1}{2^q}\right).$$

L'application ε permet de calculer l'ensemble $\mathbb E$:

Théorème 1 ([3], théorème A). On a $\mathbb{E} = \varepsilon(\mathbb{D})$.

Pour donner les conditions d'existence de fibrés stables il est utile de considérer la fonction

$$\delta(\mu) = \sup_{\alpha \in \mathbb{E}, |\mu - \alpha| < 3} P(-|\mu - \alpha|) - \Delta_{\alpha},$$

où, $P(X) = 1 + \frac{3}{2}X + \frac{1}{2}X^2$ (c'est aussi le polynôme de Hilbert du fibré trivial).

Théorème 2 ([3], théorèmes C, D). Les entiers r, c_1 et c_2 étant donnés

$$\mathsf{M}_{\mathbb{P}_2}(r, c_1, c_2) \neq \varnothing \iff \Delta \geqslant \delta(\mu).$$

Dans ce cas, $M_{\mathbb{P}_2}(r, c_1, c_2)$ est irréductible de dimension $r^2(2\Delta - 1) + 1$.

Il est hors de mon propos ici d'entrer dans la démonstration des théorèmes cidessus. Remarquons cependant que le fait que ces conditions soient nécessaires résulte de la formule de Riemann-Roch. La démonstration d'existence repose sur la construction d'une très grande famille de fibrés vectoriels à laquelle on enlève le fermé correspondant aux fibrés non stables et dont on montre ensuite que l'ouvert qui reste est toujours non vide. Ceci est fait en minorant la codimension grâce à une version raffinée de la stratification de Shatz. Cette construction est d'ailleurs déjà présente dans le cas du rang 2 dans l'article de Joseph Le Potier en 1979 sur la stabilité et l'amplitude [11].

3.2. Groupe de Picard

Le groupe de Picard de $\mathrm{M}_{\mathbb{P}_2}(r,c_1,c_2)$ a été calculé par J.-M. Drézet dans [5] à la suite de l'article sur l'existence. Joseph Le Potier en a donné une démonstration simplifiée en 1993 [16]. La description précise des générateurs figurant dans [5] fait intervenir une forme quadratique sur $K(\mathbb{P}_2)$ – suggéré par le referee de cet article et qui remonte aux constructions « Det » et « Div » de Mumford – que Joseph Le Potier a par la suite (en 1989 [13]) généralisées aux autres surfaces projectives. Il y met notamment en évidence les fibrés déterminants qui sont liés à d'autres recherches ultérieures comme la dualité étrange (voir le texte de Luca Scala et les travaux de G. Danila)

Soit $K(\mathbb{P}_2)$ l'algèbre de Grothendieck des classes des fibrés vectoriels sur \mathbb{P}_2 , ou ce qui revient au même l'algèbre des classes des faisceaux algébriques cohérents sur \mathbb{P}_2 . C'est un groupe abélien libre de rang 3: on peut par exemple associer à la classe u son rang, la classe de Chern c_1 et la caractéristique d'Euler Poincaré χ . Sur $K(\mathbb{P}_2)$ on a une forme quadratique entière définie par

$$u \mapsto \chi(u^2) = 2r\chi + c_1^2 - r^2$$

Soit $<\cdot,\cdot>$ la forme polaire associée. Par construction, on a

$$\dim \mathsf{M}_{\mathbb{P}_2}(r,c_1,c_2) = 1 - < c^*,c>$$

où c^* désigne la classe obtenue par l'involution sur $K(\mathbb{P}_2)$ définie par passage au dual d'un fibré vectoriel. Ainsi, les fibrés exceptionnels sont les fibrés stables dont la classe satisfait à $< c^*, c>=1$.

Soit c^{\perp} l'orthogonal de c par rapport à la forme quadratique. L'idée consiste à définir un morphisme $\lambda_M:c^{\perp}\longrightarrow {\rm Pic}(M)$.

SMF - Gazette - 112, avril 2007

Pour cela on a besoin de revenir à la construction de l'espace de modules $\mathsf{M}_{\mathbb{P}_2}(r,c_1,c_2)$ qui peut se faire comme suit, d'après C. Simpson [19]. Notons $H(m)=r(P(\mu+m)-\Delta)$ le polynôme de Hilbert. On sait par Maruyama que la famille des faisceaux semi-stables de polynôme de Hilbert fixé est limitée au sens de Grothendieck. Il existe ainsi un entier $N\gg 0$ tel que tout faisceau semi-stable E de polynôme de Hilbert H apparaît comme quotient du fibré $P=\mathbb{C}^{H(N)}\otimes_{\mathbb{C}}\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(-N)$. Soit $R=\mathrm{Quot}(P,H)$ le schéma de Grothendieck des quotients de P de polynômes de Hilbert P0 no sait, quitte à éventuellement encore augmenter P1, que l'ouvert P2 des quotients P3 avec P4 des quotients P4 des quotients P5 des quotients P6 des quotients P7 des quotients P8 des quotients P9 avec P9 avec P9 avec P9 semi-stable et tels que P9 induit un isomorphisme $\mathbb{C}^{H(N)}\stackrel{\sim}{\longrightarrow} E(N)$ correspond exactement à l'ouvert de points semi-stables au sens de Mumford sous l'action de P8 semi-stable et tels que P9 induit un existe un bon quotient de P8 par P9 qui n'est autre que P9. Considérons alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} R^{ss} \times \mathbb{P}_2 & \xrightarrow{q} & \mathbb{P}_2 \\ & & \downarrow & \\ R^{ss} & & \end{array}$$

On définit alors le morphisme $\lambda_{\mathcal{Q}}: \mathcal{K}(\mathbb{P}_2) \longrightarrow \mathsf{Pic}^{\mathcal{G}}(R^{ss})$ par la formule

$$\lambda_{\mathcal{Q}}(u) := \det p_!(\mathcal{Q}.q^*(u))$$

où $\mathcal Q$ désigne le quotient universel sur R^{ss} . Soit $\pi:R^{ss}\longrightarrow \mathsf{M}_{\mathbb{P}_2}(r,c_1,c_2)$ le bon quotient. La question qui se pose alors est de déterminer sous quelles conditions sur u, le fibré en droites $\lambda_{\mathcal Q}(u)$ descend à $\mathsf{M}_{\mathbb{P}_2}(r,c_1,c_2)$. La réponse est très jolie :

Proposition 1. Si < c, u >= 0 alors le fibré inversible $\lambda_Q(u)$ provient d'un élément bien déterminé dans Pic(M), noté $\lambda_M(u)$, caractérisé par la propriété universelle suivante : Pour toute famille $\mathcal E$ de faisceaux semi-stables de rang r et de classes de Chern c_1 et c_2 , paramétrée par la variété algébrique lisse S on a, si $f_{\mathcal E}: S \longrightarrow M_{\mathbb P_2}(r,c_1,c_2)$ désigne le morphisme modulaire, $f_{\mathcal E}^*(\lambda_M(u)) = \lambda_{\mathcal E}(u)$.

La proposition se démontre en utilisant le lemme de Drézet-Narasimhan-Kempf [4], d'après lequel il suffit de vérifier que pour tout point [q] d'orbite fermée, le stabilisateur agit trivialement sur la fibre de $\lambda_Q(u)$ en [q]. Pour cela, on remarque que les orbites fermées correspondent aux quotients poly-stables, i.e. de la forme

$$E=E_1^{k_1}\oplus\cdots\oplus E_\ell^{k_\ell}.$$

Le stabilisateur d'un tel point est $\operatorname{Aut}(E)$, c'est à dire $\operatorname{GL}(k_1) \times \cdots \times \operatorname{GL}(k_\ell)$. On constate alors que l'action du stabilisateur sur la fibre est donnée par

$$(g_1,\ldots,g_\ell)\mapsto \prod_{i=1}^\ell \det(g_i)^{< c(E_i),u>}.$$

Or, dans $K(\mathbb{P}_2) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ on a $\frac{c}{r} = \frac{c(E_i)}{r(E_i)}$. L'hypothèse < c, u >= 0 dit alors précisément que l'action est triviale.

Théorème 3 (Drézet [5]). Soit c la classe dans $K(\mathbb{P}_2)$ des faisceaux cohérents de rang r>0 et de classes de Chern c_1 et c_2 . Soit $\lambda_M:c^\perp\longrightarrow \operatorname{Pic}(M)$ le morphisme ci-dessus.

SMF - Gazette - 112, avril 2007

- (a) $Si \Delta > \delta(\mu)$ alors λ_M est un isomorphisme.
- (b) Si $\Delta=\delta(\mu)$ alors λ_M est un epimorphisme, de noyau engendré par la classe e du fibré exceptionnel associé c.

La variété $M_{\mathbb{P}_2}(r, c_1, c_2)$ est localement factorielle.

Joseph Le Potier démontre le théorème ci-dessus dans [16] en utilisant un théorème type Brill-Noether démontré "sur commande" par L. Göttsche et A. Hirschowitz [8]. La factorialité locale signifie que tout diviseur de Weil est de Cartier. La question de savoir si une variété de modules est localement factorielle a été soulevée par Drézet qui a montré, avec M.S. Narasimhan que c'est aussi le cas pour l'espace de modules des fibrés semi-stables à déterminant trivial de rang r et de degré d sur une courbe algébrique [4]. Ce résultat est faux en général pour d'autres surfaces comme l'a observé Joseph Le Potier : par exemple $M_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}(2,0,2)$ n'est pas localement factorielle au point $\mathcal{O}(1,-1) \oplus \mathcal{O}(-1,1)$. Récemment, D. Kaledin, M. Lehn et moi avons montré que pour les surfaces K3, les espaces de modules associés sont également localement factoriels (sauf dans le cas de dimension 10 considéré par K. O'Grady), ce qui nous a permis de montrer qu'il n'existe pas de résolution de singularités symplectiques de ces espaces de modules (sauf dans le cas de O'Grady) [9].

4. Géométrie des variétés de modules pour r = 2

Considérons le cas r=2, $c_1=0$ et $c_2=n$ avec n un entier $\geqslant 2$. La cohomologie $H^q(E(i))$ d'un faisceau semi-stable ayant ces classes de Chern est obligatoirement nulle pour q=0 et $i\leqslant 0$ ou pour q=2 et $i\geqslant -2$. Par Riemann-Roch, on a $\dim H^1(E(-1))=\dim H^1(E(-2))=n$ et $\dim H^1(E)=n-2$.

W. Barth a introduit dans [1] en 1977 la notion de *droite de saut* : il s'agit d'une droite $\ell \subset \mathbb{P}_2$ telle que la restriction $E_{|\ell|}$ de E à ℓ soit différente du fibré trivial de rang 2 sur ℓ . Cohomologiquement cela signifie que $H^1(E(-1)_{|\ell|}) \neq 0$. L'ensemble des droites de saut est alors le support du conoyau du morphisme canonique de faisceau localement libres de rang n sur le plan projectif dual \mathbb{P}_2^* :

$$H^1(E(-2)) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^*}(-1) \xrightarrow{\sigma} H^1(E(-1)) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^*}$$

D'après le théorème de Grauert-Mülich, ce support est de dimension 1 et est appelé courbe des droites de saut. Soit $M_n=M_{\mathbb{P}_2}(2,0,n)$. On obtient un morphisme

$$\gamma: \mathsf{M}_n \longrightarrow |\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^*}(n)|.$$

Dans son premier papier en 1981 sur ce morphisme [16], Joseph Le Potier montre que le groupe de Picard de M^{os}_n s'identifie à $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ si n=2 et à \mathbb{Z} si $n\geqslant 3$, engendré par $\gamma^*(\mathcal{O}(1))$ si c_1 est impair et par une racine de $\gamma^*(\mathcal{O}(1))$ si c_1 est pair (comparé au résultat sur le groupe de Picard plus haut, le cas n=2 correspond à $\Delta=\delta(\mu)$ et $n\geqslant 3$ à $\Delta>\delta(\mu)$; dans ce dernier cas, la deuxième composante de Pic (M_n) provient du fibré en droites associé à $\mathsf{M}_n-\mathsf{M}_n^o$ qui est un diviseur).

Barth avait observé dans [2] que pour n=2, γ est un isomorphisme, que pour n=3, l'image est l'espace des cubiques et le degré de γ est égal à 3, puis montré que γ est génériquement fini pour $n\geqslant 4$. En particulier, dans ce cas son image est une sous-variété fermée de dimension 4n-3 de $P_n=\mathbb{P}^{n(n+3)/2}=|\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2^*}(n)|$.

Deux questions se posent alors pour $n \ge 4$:

- (a) Quel est le degré de $\gamma: M_n \longrightarrow Im(\Gamma)$?
- (b) Déterminer le degré de $Im(\Gamma) \subset P_n$.

Ceci est lié aux invariants de Donaldson sur \mathbb{P}_2 : Soit H une section hyperplane de P_n et $\alpha = \gamma^* H$. Alors l'invariant de Donaldson s'interprète par

$$q_{4n-3} = \int_{\mathsf{M}_n} \alpha^{4n-3}$$

Ainsi q_{4n-3} n'est autre que le degré de γ multiplié par le degré de son image. Le calcul du degré de γ s'est avéré être très difficile. Joseph Le Potier l'a finalement calculé en 2000 en collaboration avec Alexandre Tikhomirov dans [18].

Théorème 4. Le morphisme γ est génériquement injectif pour $n \geqslant 4$.

Corollaire 1. Pour $n \ge 4$, l'image du morphisme de Barth est une sous-variété fermée de P_n de dimension 4n-3 et de degré q_{4n-3} .

On connaît les premiers invariants [7]: $q_{13}=54$, $q_{17}=2540$ et $q_{21}=233208$. Je voudrais expliquer ici comment Joseph Le Potier a calculé q_{13} dans [14]: c'était le premier exposé de séminaire que j'ai suivi. Dans ce cas, l'image de γ est une hypersurface $\mathfrak L$. Elle contient les quartiques dites de Lüroth, à savoir celles ayant un pentagone complet inscrit. Le nombre 54 pour $\deg(\mathfrak L)$ avait d'ailleurs été suggéré à Joseph Le Potier par Laurent Gruson, qui faisait référence à un article de Frank Morley qui signalait déjà en 1918 que l'invariant de Lüroth est 54.

Soit θ le conoyau du morphisme $\sigma(-1)$ ci-dessus. C'est un faisceau de torsion sur \mathbb{P}_2 de dimension 1. Il en est de même pour $\theta^\vee := \underline{\operatorname{Ext}}^1(\theta, \omega_{\mathbb{P}_2})$. Barth avait montré que θ était muni d'un isomorphisme symétrique $\theta \xrightarrow{\sim} \theta^\vee$. Si le support C de θ est une courbe lisse, θ s'identifie à un fibré en droites sur C et θ^\vee à $\theta^* \otimes \omega_C$ de sorte que θ n'est autre qu'une thêta-caractéristique sur C.

L'observation fondamentale de Joseph Le Potier en 1989 a été qu'on pouvait également définir une notion de semi-stabilité pour de tels faisceaux de torsion, puis construire les espaces de modules correspondants. Cette observation a été faite au même temps par Carlos Simpson et a donné lieu aux espaces de modules des faisceaux semi-stables de support de dimension d sur une variété de dimension d0. D'ailleurs, dans le cas des faisceaux semi-stables de support de dimension d1 sur d2, Joseph Le Potier a montré les résultats d'irréductibilité, d'existence et de calcul de groupe de Picard analogues aux théorèmes fondamentaux ci-dessus pour d3 dans [15].

Dans le cas des thêta-caractéristiques généralisées, on obtient également un espace de modules noté $\Theta_{\mathbb{P}_2}(n)$. C'est une variété équidimensionelle de dimension n(n+3)/2, lisse en toute thêta-caractéristique stable. Elle a deux composantes irréductibles, distinguées par la parité de $h^0(\mathbb{P}_2,\theta)$. Le morphime $\rho:\Theta_{\mathbb{P}_2}(n)\to \mathsf{P}_n$ définie an associant à θ son support schématique est fini de degré 2^{2g} (avec g=n(n-3)/2+1) au-dessus de l'ouvert des courbes lisses.

Pour n=4, la composante paire $\Theta^0_{\mathbb{P}_2}(4)$ a une description simple : elle est isomorphe au quotient de Mumford $\mathbb{P}(L(V^*,S^2H)^{ss})/\mathrm{SL}(H)$ où V^* est l'espace des sections de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(1)$ et H un espace vectoriel de dimension 4. La correspondance est obtenue en associant à $s\in L(V^*,S^2H)$ un morphisme

$$H^* \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(-2) \xrightarrow{\sigma} H \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}_2}(-1)$$

dont on montre qu'il est génériquement injectif si s est stable sous l'action de SL(H). La thêta-caractéristique associée est alors le co-noyau de σ .

Cette description permet de calculer le groupe de Picard. Sur l'ouvert des thêta-caractéristiques stables, il est engendré par la représentation $\det(H)$. Ce fibré ne s'étend pas à $\Theta^0_{\mathbb{P}_2}(4)$ entier mais uniquement son carré de sorte que $\operatorname{Pic}(\Theta^0_{\mathbb{P}_2}(4))$ est engendré par le fibré inversible associé à $\det(H)^2$ et que $\Theta^0_{\mathbb{P}_2}(4)$ n'est pas localement factoriel : le groupe $\operatorname{Pic}(\Theta^0_{\mathbb{P}_2}(4))$ est d'indice deux dans le groupe $\operatorname{Cl}(\Theta^0_{\mathbb{P}_2}(4))$ des diviseurs de Weil. Le générateur du groupe de Picard n'est d'ailleurs autre que l'image réciproque du $\mathcal{O}_{P_n}(1)$ par le morphisme ρ (qui est d'ailleurs d'indice 36 correspondant aux thêta-caractéristiques ineffectives sur une quartique lisse).

On peut alors calculer l'invariant de Lüroth. Pour cela on observe qu'on a une factorisation

$$\begin{array}{cccc} M_4 & \xrightarrow{\varphi} & Z & \subset & \Theta^0_{\mathbb{P}_2}(4) \\ & \gamma \searrow & \downarrow \rho_{\mid Z} & & \downarrow \rho \\ & \mathfrak{L} & \subset & \mathsf{P}_n \end{array}$$

La formule $< Z, c_1(\mathcal{O}(1))^{13}> = \deg(\rho_{|Z}) \deg(\mathfrak{L})$ montre ensuite qu'il suffit de calculer $< Z, c_1(\mathcal{O}(1))^{13}>$ étant donné que dans le diagramme ci-dessus toutes les flèches γ, φ et $\rho_{|Z}$ sont de degré 1. Pour cela, on observe

$$<2Z, c_1(\mathcal{O}(1))^{13}>=<3Y, c_1(\mathcal{O}(1))^{13}>=3<\Theta^0_{\mathbb{P}_2}(4), c_1(\mathcal{O}(1))^{14}>=3*36$$

Ici, Y désigne une section hyperplane de $\Theta^0_{\mathbb{P}_2}(4)$. La première égalité s'obtient on observant que dans $\mathrm{Cl}(\Theta^0_{\mathbb{P}_2}(4))$ on a 2Z=3Y, égalité qui découle d'une description explicite du diviseur Z en tant que lieu de zéros d'un pfaffien.

Le degré de \mathfrak{L} s'obtient donc par 3 * 36/2 = 54.

5. Références

- [1] Barth, W. Some properties of stable rank-2 vector bundles on \mathbb{P}_2 . Math. Ann. 226 (1977), n° 2. 125–150.
- [2] Barth, W. Moduli of vector bundles on the projective plane. Invent. Math. 42 (1977), 63-91.
- [3] Drézet, J.-M.; Le Potier, J. Fibrés stables et fibrés exceptionnels sur P₂. Ann. Sci. école Norm. Sup. (4) 18 (1985), n° 2, 193–243.
- [4] Drézet, J.-M.; Narasimhan, M. S. Groupe de Picard des variétés de modules de fibrés semistables sur les courbes algébriques. Invent. Math. 97 (1989), n° 1, 53–94.
- [5] Drézet, J.-M. Groupe de Picard des variétés de modules de faisceaux semi-stables sur P₂. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 38 (1988), n° 3, 105–168.
- [6] Ellingsrud, G. Sur l'irréductibilité du module des fibrés stables sur P₂. Math. Z. 182 (1983), n° 2 189–192
- [7] Ellingsrud, G.; Le Potier, J.; Strømme, S. A. Some Donaldson invariants of P₂. Moduli of vector bundles (Sanda, 1994; Kyoto, 1994), 33–38, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 179, Dekker, New York, 1996.
- [8] Göttsche, L.; Hirschowitz, A. Weak Brill-Noether for vector bundles on the projective plane. Algebraic geometry (Catania, 1993/Barcelona, 1994), 63–74, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 200, Dekker, New York, 1998.
- [9] Kaledin, D.; Lehn, M.; Sorger, Ch. Singular symplectic moduli spaces. Invent. Math. 164 (2006), no 3, 591–614.
- [10] Le Potier, J. Fibrés stables de rang 2 sur \mathbb{P}_2 . Math. Ann. 241 (1979), n° 3, 217–256.
- [11] Le Potier, J. Stabilité et amplitude sur P₂. Vector bundles and differential equations (Proc. Conf., Nice, 1979), pp. 145–182, Progr. Math., 7, Birkhäuser, Boston, Mass., 1980.

SMF - Gazette - 112, avril 2007

- [12] Le Potier, J. Sur le groupe de Picard de l'espace de modules des fibrés stables sur \mathbb{P}_2 . Ann. Sci. école Norm. Sup. (4) 14 (1981), n° 2, 141–155.
- [13] Le Potier, J. Fibré déterminant et courbes de saut sur les surfaces algébriques. Complex projective geometry (Trieste, 1989/Bergen, 1989), 213–240, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 179, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992.
- [14] Le Potier, J. Fibrés stables sur le plan projectif et quartiques de Lüroth. Exposé donné à Jussieu le 30 novembre 1989.
- [15] Le Potier, J. Faisceaux semi-stables de dimension 1 sur le plan projectif. Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 38 (1993), n° 7-8, 635-678.
- [16] Le Potier, J. Problème de Brill-Noether et groupe de Picard de l'espace de modules des faisceaux semi-stables sur le plan projectif. Algebraic geometry (Catania, 1993/Barcelona, 1994), 75–90, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., 200, Dekker, New York, 1998.
- [17] Le Potier, J. Systèmes cohérents et structures de niveau. Astérisque N° 214 (1993), 143 pp.
- [18] Le Potier, J.; Tikhomirov, A. *Sur le morphisme de Barth*. Ann. Sci. école Norm. Sup. (4) 34 (2001), nº 4, 573–629.
- [19] Simpson, C. T. Moduli of representations of the fundamental group of a smooth projective variety. I. Inst. Hautes études Sci. Publ. Math. Nº 79 (1994), 47–129.

Dualité étrange de Le Potier et cohomologie du schéma de Hilbert ponctuel d'une surface

Luca Scala¹

7 Décembre 2006

Journée à la mémoire de Joseph Le Potier

1. Introduction

Le but de cet exposé est d'expliquer la conjecture de la dualité étrange de Le Potier sur les surfaces algébriques projectives lisses et en particulier le cas du plan projectif, abordé par G. Danila dans sa thèse [3]. Dans ce cas le problème se ramène à un calcul de cohomologie d'un schéma de Hilbert ponctuel sur le plan projectif. La maîtrise de ces groupes de cohomologie s'avère très utile aussi dans d'autres exemples de dualité étrange. On présente ensuite une méthode puissante, liée aux récents développements de la correspondance de McKay, pour effectuer des calculs de cohomologie du schéma de Hilbert et on indique les progrès obtenus dans cette direction.

J'ai obtenu la plupart des résultats sur le schéma de Hilbert présentés ici avec Joseph Le Potier pendant ma thèse. Les meilleures idées expliquées ici lui appartiennent : il les partageait avec moi, comme, je crois, avec tous ses étudiants, avec une générosité, une honnêteté et un sérieux incomparables. Il arrivait toujours à faire comprendre avec la plus grande simplicité la vérité qu'il avait apprise et découverte; apprendre avec lui était, simplement et sans effort, se nourrir de son savoir, qui, comme nous tous qui l'avons connu le savons bien, allait bien au delà des mathématiques.

¹ Max-Planck-Institut für Mathematik, Vivatsgasse 7, 53111 Bonn Allemagne