Thêta-caractéristiques des courbes tracées sur une surface lisse.

Par *Christoph Sorger* **à Paris**

Dans [16], Mumford reprend, et sans utiliser la théorie (transcendante) des fonctions thêta, la notion de thêta-caractéristique sur une courbe lisse et complète C en considérant les fibrés vectoriels F sur C qui sont munis d'une forme quadratique à valeurs dans ω_C. Il montre que la dimension modulo 2 de l'espace des sections globales d'un tel fibré F, appelé thêta-caractéristique s'il est de rang 1, est invariant sous déformation de F et de C. Ce résultat, qui remonte à Riemann, est également démontré, avec une méthode différente, par Atiyah dans [1]. Si C est de genre g, le nombre de thêta-caractéristiques sur C est 2^{2g} dont $2^{g-1}(2^g+1)$ paires (*i.e.* $\dim \mathrm{H}^0(L) = 0 \bmod 2$) et $2^{g-1}(2^g-1)$ impaires (*i.e.* $\dim \mathrm{H}^0(L) = 1 \bmod 2$)[16]. Dans [10], Harris étend cette étude au cas des courbes *réduites*, en considérant toujours des fibrés *inversibles*, racines du faisceau dualisant. Il montre que le théorème d'invariance modulo 2 reste valable dans ce cas et calcule le nombre et la configuration des thêta-caractéristiques paires/impaires en fonction des singularités de la courbe. Le nombre et la configuration du cas des courbes lisses ne peuvent être maintenus. Par exemple, une quartique plane ayant exactement un point double ordinaire admet 32 thêta-caractéristiques (localement libres) dont 16 impaires (au lieu de 64 et 28). On verra qu'il faut, pour cela, s'autoriser à considérer aussi les thêta-caractéristiques non localement libres, et à compter certaines thêta-caractéristiques plusieurs fois.

Soit C une courbe de Gorenstein sur $\mathbb{C}$. Nous appellerons faisceau quadratique sur C un couple $(\mathcal{F}, \sigma)$ formé d'un faisceau algébrique cohérent $\mathcal{F}$ et d'un isomorphisme $\sigma : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}^\vee$, où $\mathcal{F}^\vee$ désigne le faisceau $\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{F}, \omega_C)$, satisfaisant la condition de symétrie ${}^\vee\sigma = \sigma$. Notre premier objectif sera de construire un espace de modules, au sens grossier, des faisceaux quadratiques semi-stables de polynôme de Hilbert fixé. Considérons le foncteur

$$\underline{Q}_C(r) : \text{ Variétés algébriques } \longrightarrow \text{ Ensembles}$$

qui associe à la variété algébrique S l'ensemble des classes d'isomorphisme de familles de faisceaux quadratiques $(\mathcal{F}, \sigma)$, paramétrées par S, telles que pour tout point fermé s de S, le faisceau quadratique $\mathcal{F}_s$ soit semi-stable de multiplicité r.

Théorème 0.1 – *Il existe un espace de modules grossier pour le foncteur $\underline{Q}_C(r)$, noté $Q_C(r)$. La variété $Q_C(r)$ est une variété algébrique projective dont l'ensemble sous-jacent s'identifie aux classes de $\mathcal{S}$-équivalence de faisceaux quadratiques semi-stables de multiplicité r. De plus, il existe un ouvert $Q^s_C(r) \subset Q_C(r)$, parametrant les classes d'isomorphisme de faisceaux quadratiques stables.*

La démonstration de ce résultat s'inspire des méthodes développées par Gieseker, Maruyama et Seshadri dans le cas des faisceaux sans torsion et par Simpson [21] dans le

cas des faisceaux purs. Si C est lisse, le théorème 0.1 est un cas particulier d'un théorème de Ramanathan [19]. Notre construction nécessitera une étude géométrique des invariants de l'action de $SL(n)$ sur l'espace projectif des droites vectorielles de l'espace vectoriel $L(S^2\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^m)$ dont nous appellerons les éléments modules quadratiques. Le théorème 0.1 se généralise au cas d'un morphisme $C \longrightarrow S$ de Gorenstein de dimension relative 1, généralisation qui va nous servir dans l'étude des thêta-caractéristiques des courbes tracées sur une surface projective lisse X :

Nous appellerons thêta-caractéristique sur X un couple $(\mathcal{F}, \sigma)$ formé d'un $\mathcal{O}_X$-module pur $\mathcal{F}$ de dimension 1 et d'un isomorphisme symétrique $\sigma : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}^\vee$, où $\mathcal{F}^\vee$ désigne maintenant le faisceau $\underline{\mathrm{Ext}}^1(\mathcal{F}, \omega_X)$. On peut considérer $\mathcal{F}$ comme faisceau sur son support schématique C et l'on a $\underline{\mathrm{Ext}}^1(\mathcal{F}, \omega_X) \simeq \mathcal{F}^* \otimes_{\mathcal{O}_C} \omega_C$. Ainsi $(\mathcal{F}, \sigma)$ est un faisceau quadratique sur C. Inversement, si $(\mathcal{F}, \sigma)$ est un faisceau quadratique sur la courbe C tracée sur X, alors son image directe sous l'inclusion de C dans X est une thêta-caractéristique sur X, mais pas forcément de support schématique C : Soient, par exemple, ℓ et ℓ' deux droites dans $\mathbb{P}^2$. Alors $\mathcal{O}_\ell(-1) \oplus \mathcal{O}_\ell(-1)$ est un faisceau quadratique sur $\ell + \ell'$ de support schématique 2ℓ.

Considérons le foncteur $\underline{\Theta}_X(d)$ associant à la variété algébrique S l'ensemble des classes d'isomorphisme de familles de thêta-caractéristiques Θ, paramétrées par S, telles que, pour tout point fermé s de S, la thêta-caractéristique $\Theta(s)$ soit semi-stable et de polynôme de Hilbert $P(m) = md$. Nous montrerons, en utilisant la variante à paramètres du théorème 0.1, le résultat suivant, affirmé, sans démonstration, dans [14], et qui était le point de départ de ce travail :

Théorème 0.2 – *Il existe pour le foncteur $\underline{\Theta}_X(d)$ un espace de modules grossier, noté $\Theta_X(d)$. La variété $\Theta_X(d)$ est une variété projective dont l'ensemble sous-jacent est l'ensemble des classes de $\mathcal{S}$- équivalence de thêta-caractéristiques semi-stables de degré d sur X. De plus, il existe un ouvert non-vide $\Theta^s_X(d) \subset \Theta_X(d)$ dont les points représentent les classes d'isomorphisme des thêta-caractéristiques stables.*

Le théorème d'invariance modulo 2 se généralise à notre situation :

Théorème 0.3 – *Soit $(\mathcal{F}, \sigma)$ une famille de thêta-caractéristiques sur X paramétrée par la variété connexe S et considérons la fonction $\rho(s) = h^0(X_s, \mathcal{F}_s)$. Alors la fonction $\rho \bmod 2$ est constante et le fermé $S_r = \{s \in S / \rho(s) \geq r\}$ de S est soit vide, soit de codimension au plus $\frac{(r-1)r}{2}$.*

Ceci donnera en corollaire que la variété $\Theta_X(d)$ est réunion de deux fermés disjoints, correspondant aux thêta-caractéristiques paires et impaires. La démonstration du théorème 0.5 nécessite une description de la structure locale de $\Theta_X(d)$:

Théorème 0.4 – *Soit $(\mathcal{F}, \sigma)$ un point fermé de $\Theta_X(d)$ tel que $\mathcal{F}$ soit stable en tant que $\mathcal{O}_X$-module. Si $\mathrm{Ext}^2(\mathcal{F}, \mathcal{F}) = 0$, alors $\Theta_X(d)$ est lisse au voisinage de $(\mathcal{F}, \sigma)$. L'espace tangent de $\Theta_X(d)$ en $(\mathcal{F}, \sigma)$ s'identifie à $\mathrm{Ext}^1_{asym}(\mathcal{F}, \mathcal{F})$.*

Considérons le cas particulier où X est le plan projectif. Le théorème précédent s'applique, $\mathrm{Ext}^2(\mathcal{F},\mathcal{F})$ étant nul dans ce cas. Une courbe C de degré impair d tracée sur $\mathbb{P}^2$ admet toujours une thêta-caractéristique *canonique*, définie par le faisceau $\mathcal{O}_C(\frac{d-3}{2})$.

Théorème 0.5 – *La variété $\Theta_{\mathbb{P}^2}(d)$ est normale et n'a que des singularités rationnelles. Elle est de dimension $d(d+3)/2$, formée, si $d \geq 4$ est pair, de deux composantes irréductibles et, si $d \geq 5$ est impair, de trois composantes irréductibles correspondant aux thêta-caractéristiques paires, impaires et canoniques.*

On démontrera l'assertion concernant la dimension en montrant que toute composante irréductible contient un point $(\mathcal{F},\sigma)$ tel que $\mathcal{F}$ soit stable en tant que $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$-module. La raison pour laquelle nous n'avons pas considéré simplement la variété des faisceaux quadratiques relative au morphisme de la famille universelle des courbes de degré d dans l'espace des courbes de degré d se trouve ici. Par exemple, pour $d = 2$, l'exemple précédent montre que cette variété a une composante irréductible sans point fermé $(\mathcal{F},\sigma)$ tel que $\mathcal{F}$ soit un $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$-module stable. Pour l'assertion concernant les composantes irréductibles on se ramène à un résultat de Beauville [2] et Catanese en montrant que l'ouvert des thêta-caractéristiques dont le support schématique est lisse est partout dense. La description (*cf.* Catanese [4], Laszlo [13]) de telles thêta-caractéristiques comme conoyau d'un morphisme symétrique (*i.e.* $f =^t f(-3)$) et injectif $f : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}^{\oplus d}(-2) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}^{\oplus d}(-1)$ si $h^0(\mathcal{F}) = 0$ et d'un morphisme symétrique et injectif $f : \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}^{\oplus(d-3)}(-2) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-3) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}^{\oplus(d-3)}(-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$ si $h^0(\mathcal{F}) = 1$, est donc générique. On peut d'ailleurs montrer que cette description se généralise aux thêta-caractéristiques à support schématique quelconque.

La construction dans la démonstration du théorème 0.2 fournit un morphisme

$$\sigma_\Theta : \Theta_{\mathbb{P}^2}(d) \longrightarrow \mathcal{C}_{\mathbb{P}^2}(d)$$

de $\Theta_{\mathbb{P}^2}(d)$ dans l'espace des courbes de degré d sur $\mathbb{P}^2$, défini en associant à $(\mathcal{F},\sigma)$ le support schématique de $\mathcal{F}$. Ce morphisme n'est pas, en général, quasi-fini. En effet, comme les faisceaux quadratiques de rang r sur une courbe lisse induisent des thêta-caractéristiques sur rC, la fibre au-dessus d'une courbe de genre $g \geq 2$, ayant au moins une composante à structure double, contient des variétés de dimension supérieure à 0. Par contre, au-dessus d'une courbe lisse de genre g de $\mathcal{C}_{\mathbb{P}^2}(d)$ la fibre contient 2^{2g} éléments. Soit $\mathcal{C}^f_{\mathbb{P}^2}(d)$ l'ouvert des courbes au-dessus desquelles la fibre est finie, $\Theta^f_{\mathbb{P}^2}(d)$ son image réciproque. En appliquant le théorème 0.5 on voit que $\sigma^f_\Theta : \Theta^f_{\mathbb{P}^2}(d) \longrightarrow \mathcal{C}^f_{\mathbb{P}^2}(d)$ est un morphisme fini et *plat* ($\Theta_{\mathbb{P}^2}(d)$ étant de Cohen-Macaulay) de degré 2^{2g}, où g désigne le genre d'une courbe lisse de $\mathcal{C}_{\mathbb{P}^2}(d)$. De plus, nous verrons dans la démonstration du théorème 0.5 que σ^f_Θ est non-ramifié en toute thêta-caractéristique localement libre sur son support schématique. En raisonnant composante par composante on déduit, en comptant avec multiplicités, qu'il y a 2^{2g} thêta-caractéristiques, dont $2^{g-1}(2^g+1)$ paires et $2^{g-1}(2^g-1)$ impaires sur toute courbe de $\mathcal{C}^f_{\mathbb{P}^2}(d)$. La détermination de l'ouvert $\mathcal{C}^f_{\mathbb{P}^2}(d)$ est un futur projet. Par exemple, on peut montrer qu'une courbe C ayant exactement un point double ordinaire appartient à $\mathcal{C}^f_{\mathbb{P}^2}(d)$ et que σ^f_Θ est ramifié à l'ordre 2 en toute thêta-caractéristique qui n'est pas localement libre sur C.

Remerciements : Tout au long de la préparation de ce travail j'ai bénéficié du soutien constant et de l'aide efficace de J. Le Potier. Je tiens à l'en remercier ici.

Définitions et notations : Par variété algébrique on entend schéma de type fini sur $\mathbb{C}$, séparé. Si $X_1, \ldots, X_n$ sont des ensembles on note pr_i la projection

$$X_1 \times \ldots \times X_n \longrightarrow X_i.$$

Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur la variété algébrique projective X. S'il n'y a pas d'ambiguïté, on posera $\mathrm{H}^i(\mathcal{F}) = \mathrm{H}^i(X, \mathcal{F})$ et $h^i(\mathcal{F}) = \dim_{\mathbb{C}} \mathrm{H}^i(X, \mathcal{F})$. Si S est une variété algébrique, $pr_2 : S \times X \longrightarrow X$ la projection sur le deuxième facteur on notera $\mathcal{F}_S$ le $\mathcal{O}_{S\times X}$-module $pr_2^*(\mathcal{F})$. Si $\mathcal{E}$ est un $\mathcal{O}_{S\times X}$-module, s un point fermé de S, alors on désignera par $\mathcal{E}_s$ le $\mathcal{O}_X$-module déduit de $\mathcal{E}$ par restriction à $\{s\} \times X$.

Sommaire

1. Faisceaux quadratiques sur une courbe de Gorenstein
2. Modules quadratiques
3. Le module des faisceaux quadratiques
4. Variante à paramètres
5. Le module des thêta-caractéristiques sur une surface lisse
6. Démonstration du théorème 0.3
7. Critères de lissité, Etude locale
8. Thêta-caractéristiques sur le plan projectif

1. Faisceaux quadratiques sur une courbe de Gorenstein

(1.1) Faisceaux semi-stables de dimension 1 (*cf.* [21]). Soit X une variété algébrique, propre sur $\mathbb{C}$, munie d'un faisceau très ample $\mathcal{O}_X(1)$. On dit qu'un faisceau cohérent sur X est *pur* si la dimension du support de tout sous-faisceau cohérent non nul $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$ est égale à la dimension du support de $\mathcal{F}$. Par la suite, nous considérerons uniquement des faisceaux purs de dimension 1. Un tel faisceau est de Cohen-Macaulay, *i.e.* les $\mathcal{O}_{X,x}$-modules $\mathcal{F}_x$ sont de Cohen-Macaulay. Nous appelons *support schématique* de $\mathcal{F}$, noté $\mathrm{supp}_s(\mathcal{F})$, le schéma défini par le 0-ième idéal de Fitting de $\mathcal{F}$.

Pour tout faisceau cohérent $\mathcal{F}$, on désigne par $P_{\mathcal{F}}(n)$ le *polynôme de Hilbert* de $\mathcal{F}$. Si $\mathcal{F}$ est de dimension 1, ce polynôme est de la forme $P_{\mathcal{F}}(n) = rn + \chi(\mathcal{F})$. L'entier r est appelé la *multiplicité*, le nombre rationnel $\mu(\mathcal{F}) = \chi(\mathcal{F})/r$ la *pente* de $\mathcal{F}$. Un faisceau cohérent $\mathcal{F}$ de dimension 1 est dit *semi-stable (resp. stable)* s'il est pur et si tout sous-faisceau cohérent $0 \neq \mathcal{E} \subset \mathcal{F}$ satisfait $\mu(\mathcal{E}) \leq \mu(\mathcal{F})$ (resp. $<$). Remarquons qu'il est suffisant de vérifier cette inégalité pour les sous-faisceaux cohérents $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$ tels que $\mathcal{F}/\mathcal{E}$ soient purs.

Soit $S(\mu)$ la catégorie des faisceaux semi-stables de dimension 1 de pente μ fixée. C'est une catégorie abélienne, artinienne et noethérienne. Les objets simples de cette catégorie

sont les faisceaux stables de pente μ. Par conséquent, tout faisceau semi-stable $\mathcal{F}$ de pente μ admet une filtration de Jordan-Hölder. Cette filtration n'est pas unique, mais le gradué ne dépend pas, à isomorphisme près, de la filtration choisie. Deux faisceaux semi-stables $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ sont dits *S-équivalents* si $\mathrm{gr}(\mathcal{E}) \simeq \mathrm{gr}(\mathcal{F})$.

Soit $\mathcal{F}$ un faisceau pur de dimension 1. D'après ([9], lemme 2.5), la pente des sous-faisceaux cohérents $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$ tels que $\mathcal{F}/\mathcal{E}$ soient purs, est majorée. On notera $\mu_{max}(\mathcal{F})$ la pente maximale des sous-faisceaux de $\mathcal{F}$. Soit $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$ un sous-faisceau de multiplicité maximale, parmi les sous-faisceaux de pente $\mu_{max}(\mathcal{F})$. Ce sous-faisceau sera, comme dans le cas des fibrés vectoriels, unique. On l'appelle le sous-faisceau *maximal* de $\mathcal{F}$. On obtient ainsi, pour tout faisceau pur $\mathcal{F}$ de dimension 1, l'analogue de la filtration de Harder et Narasimhan.

(1.2) Faisceaux quadratiques semi-stables. Soit C une courbe algébrique, propre sur $\mathbb{C}$, de Gorenstein, munie d'un faisceau très ample $\mathcal{O}_C(1)$.

Lemme 1.1 – *Soit $\mathcal{F}$ un faisceau pur. Alors on a $\underline{\mathrm{Ext}}^1_{\mathcal{O}_C}(\mathcal{F}, \omega_C) = 0$.*

Démonstration. En général, si $(A, \mathcal{M})$ est un anneau local noethérien de Cohen-Macaulay, et si D est un A-module dualisant, alors on a, pour tout A-module de type fini M ([18]) :

$$\mathrm{prof}(M) + \max_q \{\mathrm{Ext}^q_A(M, D) \neq 0\} = \dim A.$$

Soit x un point fermé du support de $\mathcal{F}$. Le $\mathcal{O}_{C,x}$-module $\mathcal{F}_x$ étant de Cohen-Macaulay, on déduit de la formule précédente que $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_{C,x}}(\mathcal{F}_x, \omega_{C,x}) = 0$, d'où le lemme. □

Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur C. On pose $\mathcal{F}^\vee := \underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{F}, \omega_C)$. Le foncteur $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}^\vee$ est exact sur la catégorie des faisceaux purs. Une application de la suite spectrale des *Ext* locaux/globaux montre que, si $\mathcal{F}$ est pur, $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{F}, \omega_C) = \mathrm{H}^1(\underline{\mathrm{Hom}}(\mathcal{F}, \omega_C))$, d'où, par dualité de Serre, $\chi(\mathcal{F}^\vee) = -\chi(\mathcal{F})$. Une autre conséquence du lemme est que le morphisme canonique $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}^{\vee\vee}$ est un isomorphisme. Enfin, remarquons que $\mathcal{F}$ est semi-stable (stable) si et seulement si $\mathcal{F}^\vee$ est semi-stable (stable).

Définition 1.2 – *On appelle faisceau quadratique un faisceau cohérent $\mathcal{F}$ muni d'un isomorphisme $\sigma : \mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}^\vee$ satisfaisant ${}^\vee\sigma = \sigma$.*

Si $(\mathcal{F}, \sigma)$ est un faisceau quadratique, alors $\mathcal{F}$ est pur et $\chi(\mathcal{F}) = -\chi(\mathcal{F}^\vee) = 0$. Un *morphisme* de faisceaux quadratiques $\varphi : (\mathcal{E}, \tau) \longrightarrow (\mathcal{F}, \sigma)$ est la donnée d'un morphisme de faisceaux $\varphi : \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{F}$ tel que $\tau = {}^\vee\varphi \circ \sigma \circ \varphi$. Soit $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$ un sous-faisceau cohérent de $\mathcal{F}$. On appelle *σ-orthogonal* de $\mathcal{E}$ et on note $\mathcal{E}^\perp$ le noyau du morphisme composé $\mathcal{F} \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}^\vee \longrightarrow \mathcal{E}^\vee$. Un sous-faisceau cohérent $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$ est dit *σ-isotrope* si $\mathcal{E} \cap \mathcal{E}^\perp \neq (0)$. Si l'on a $\mathcal{E} \subset \mathcal{E}^\perp$ on dit que $\mathcal{E}$ est *totalement σ-isotrope*. Si $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$ est un sous-faisceau cohérent tel que $\mathcal{F}/\mathcal{E}$ soit pur, alors $r(\mathcal{E}^\perp) = r(\mathcal{F}) - r(\mathcal{E})$ et $\chi(\mathcal{E}^\perp) = \chi(\mathcal{E})$. Le lemme suivant est facile à démontrer :

Lemme 1.3 – *Soit $(\mathcal{F}, \sigma)$ un faisceau quadratique. Si $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$ est un sous-faisceau*

cohérent tel que $\mathcal{F}/\mathcal{E}$ soit pur, alors $\mathcal{E}^{\perp\perp} = \mathcal{E}$. De plus, si $\mathcal{E}', \mathcal{E}'' \subset \mathcal{F}$ sont deux sous-faisceaux cohérents tels que $\mathcal{F}/\mathcal{E}'$ et $\mathcal{F}/\mathcal{E}''$ soient purs, alors $\mathcal{F}/(\mathcal{E}' \cap \mathcal{E}'')$ et $\mathcal{F}/(\mathcal{E}' + \mathcal{E}'')$ le sont également et on a $(\mathcal{E}' \cap \mathcal{E}'')^\perp = \mathcal{E}'^\perp + \mathcal{E}''^\perp$ et $(\mathcal{E}' + \mathcal{E}'')^\perp = \mathcal{E}'^\perp \cap \mathcal{E}''^\perp$.

On dira qu'un faisceau quadratique $(\mathcal{F}, \sigma)$ est *semi-stable (resp. stable)* si pour tout sous-faisceau totalement σ-isotrope non nul $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$ on a $\chi(\mathcal{E}) \leq 0$ (resp. $<$).

Proposition 1.4 – *Un faisceau quadratique $(\mathcal{F}, \sigma)$ est semi-stable si et seulement si son faisceau sous-jacent $\mathcal{F}$ est semi-stable. Un faisceau quadratique stable est somme directe orthogonale de faisceaux quadratiques dont les faisceaux sous-jacents sont stables et non-isomorphes.*

Démonstration. Soit $(\mathcal{F}, \sigma)$ un faisceau quadratique semi-stable et $0 \neq \mathcal{E} \subset \mathcal{F}$ un sous-faisceau cohérent tel que $\mathcal{F}/\mathcal{E}$ soit pur. Deux cas se présentent. Si $\mathcal{E}$ est *isotrope* alors $\mathcal{E} \cap \mathcal{E}^\perp$ est totalement isotrope non nul et, d'après le lemme 1.3, d'orthogonal $\mathcal{E} + \mathcal{E}^\perp$. La suite exacte

$$0 \longrightarrow (\mathcal{E} \cap \mathcal{E}^\perp) \longrightarrow \mathcal{E} \oplus \mathcal{E}^\perp \longrightarrow \mathcal{E} + \mathcal{E}^\perp \longrightarrow 0,$$

où la deuxième flèche est donnée, localement, par l'addition de sections, montre que $2\chi(\mathcal{E}) = 2\chi(\mathcal{E} \cap \mathcal{E}^\perp)$, d'où $\chi(\mathcal{E}) \leq 0$. Dans le cas où $\mathcal{E}$ est *anisotrope* on a une injection $\mathcal{E} \oplus \mathcal{E}^\perp \hookrightarrow \mathcal{F}$. Comme $r(\mathcal{E}) + r(\mathcal{E}^\perp) = r(\mathcal{F})$ et comme $\mathcal{F}/(\mathcal{E} + \mathcal{E}^\perp)$ est pur, cette injection est un isomorphisme. Le morphisme $\sigma : \mathcal{E} \oplus \mathcal{E}^\perp \longrightarrow \mathcal{E}^\vee \oplus \mathcal{E}^{\perp\vee}$ se décompose en

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{pmatrix}.$$

Par suite, $(\mathcal{E}, \sigma_1)$ et $(\mathcal{E}^\perp, \sigma_2)$ sont des faisceaux quadratiques, eux aussi. En particulier $\chi(\mathcal{E}) = 0$. Montrons (ii). Soit $(\mathcal{F}, \sigma)$ stable. Si $0 \neq \mathcal{E} \subset \mathcal{F}$ est isotrope, on voit de même que $\chi(\mathcal{E}) < 0$. Si $\mathcal{E}$ est anisotrope, $\mathcal{F}$ se décompose comme ci-dessus. Le même procédé, appliqué aux faisceaux quadratiques $(\mathcal{E}, \sigma_1)$ et $(\mathcal{E}^\perp, \sigma_2)$, conduit à la proposition. □

La catégorie des faisceaux quadratiques n'est pas abélienne. La filtration suivante permettra quand même de définir une bonne notion (au sens du théorème 0.1) de $\mathcal{S}$-équivalence de deux faisceaux quadratiques.

Lemme 1.5 – *Soit $(\mathcal{F}, \sigma)$ un faisceau quadratique semi-stable. Alors il existe une filtration par des sous-faisceaux cohérents $0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \ldots \subset \mathcal{F}_\ell \subset \mathcal{F}$ telle que les faisceaux $\mathcal{E}_i = \mathcal{F}_i/\mathcal{F}_{i-1}$ avec $\mathcal{F}_0 = 0$, soient stables de caractéristique d'Euler-Poincaré nulle pour $i = 1, \ldots, \ell$, et telle que $(\mathcal{F}_\ell^\perp/\mathcal{F}_\ell, \sigma)$ soit un faisceau quadratique stable.*

Démonstration. Choisissons $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}$ totalement isotrope, stable en tant que faisceau, et tel que $\chi(\mathcal{F}_1) = 0$. Un tel sous-faisceau existe si $(\mathcal{F}, \sigma)$ est semi-stable, non stable. Le faisceau $\mathcal{F}_1^\perp/\mathcal{F}_1$ hérite naturellement d'une structure de faisceau quadratique, encore notée σ. De plus $(\mathcal{F}_1^\perp/\mathcal{F}_1, \sigma)$ est semi-stable. En effet si $\mathcal{F}_2/\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_1^\perp/\mathcal{F}_1$ est totalement isotrope, alors

$\mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}$ est totalement isotrope, d'où $\chi(\mathcal{F}_2/\mathcal{F}_1) = \chi(\mathcal{F}_2) \leq 0$. En itérant ce procédé on obtient le lemme. $\square$

Soit $(\mathcal{H}, \sigma)$ un faisceau quadratique. On dira que $(\mathcal{H}, \sigma)$ est *hyperbolique* s'il est isomorphe à un faisceau quadratique $(\mathcal{G} \oplus \mathcal{G}^\vee, \tau)$, où $\mathcal{G}$ est stable en tant que faisceau et où τ est donné par la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{id} \\ \mathrm{id} & 0 \end{pmatrix}$$

Munissons $\mathcal{H}_i = \mathcal{E}_i \oplus \mathcal{E}_i^\vee$ de la structure hyperbolique $\sigma_i = \tau$. On définit le faisceau quadratique gradué associé à $(\mathcal{F}, \sigma)$ comme la somme directe orthogonale suivante :

$$\mathrm{gr}(\mathcal{F}, \sigma) = (\mathcal{F}_\ell^\perp/\mathcal{F}_\ell, \sigma) \oplus \bigoplus_{i=1}^{\ell} (\mathcal{H}_i, \sigma_i).$$

La filtration (1.5) n'est pas unique. Le gradué, par contre ne dépend pas, à isomorphisme près, de la filtration choisie. Par conséquent, on dira que deux faisceaux quadratiques $(\mathcal{E}, \tau)$ et $(\mathcal{F}, \sigma)$ sont $\mathcal{S}$-*équivalents* si leurs gradués associés respectifs sont isomorphes.

(1.3) Thêta-caractéristiques. Bien que nous construisions le module des *faisceaux quadratiques* et non celui des *thêta-caractéristiques* sur une courbe de Gorenstein C, indiquons quand même la définition d'une thêta-caractéristique sur C : C'est un faisceau quadratique $(\mathcal{F}, \sigma)$ tel que $\mathrm{supp}_s(\mathcal{F}) = C$ et tel que la multiplicité de $\mathcal{F}$ soit égale au degré de C.

2. Modules quadratiques

(2.1) Théorie géométrique des invariants de Mumford [17]. Soit X une variété algébrique sur laquelle opère le groupe réductif G. Un couple (Y, φ) formé d'une variété algébrique Y et d'un morphisme G-équivariant, affine et surjectif $\varphi : X \longrightarrow Y$ est dit un *bon quotient* de X par G si (i) l'image d'un fermé G-invariant de X est fermé dans Y et deux fermés G-invariants disjoints de X ont des images disjointes dans Y et (ii) le faisceau des fonctions régulières sur Y est le faisceau des invariants du faisceau des fonctions régulières sur X. Un bon quotient est catégorique, *i.e.* satisfait à la propriété universelle suivante : Pour tout morphisme G-équivariant $\psi : X \longrightarrow Z$ il existe un unique morphisme $\chi : Y \longrightarrow Z$ tel que $\psi = \chi \circ \varphi$. Un bon quotient Y paramètre les orbites fermées de X sous l'action de G. Si toutes les orbites sont fermées, on dit que (Y, φ) est un *quotient géométrique*. Dans ce qui suit, on suppose que l'action de G sur X est *linéarisée*, ce qui signifie que l'on s'est donné une immersion fermée $X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ et une action sur $\mathbb{P}^N$, définie par une représentation $G \longrightarrow GL(N+1)$, induisant l'action de G sur X. D'après Mumford, un point $x \in X$ est dit *semi-stable*, relativement à la linéarisation, s'il existe un entier $n > 0$ et une section G-invariante $s \in \mathrm{H}^0(X, \mathcal{O}_X(n))$ telle que $s(x) \neq 0$. Si, en outre, l'action de G sur l'ouvert X_s des points où s ne s'annule pas, est fermée et si les stabilisateurs de x sont finis, on dit

que x est *stable*[1]. Les points semi-stables (resp. stables) de X sous l'action de G forment un ouvert, noté X^{ss} (resp. X^s). Le théorème de passage au quotient est le suivant [17] :

Théorème 2.1 – *Il existe un bon quotient (Y, φ) de X^{ss} par G et Y est une variété projective. L'ensemble $Y^s = \varphi(X^s)$ est un ouvert de Y et la restriction $\varphi : X^s \longrightarrow Y^s$ est un quotient géométrique. L'ensemble sous-jacent à Y s'identifie à l'ensemble des classes d'équivalence de la relation d'équivalence suivante :*

$$x_1 \sim x_2 \Longleftrightarrow \overline{orb^G(x_1)} \cap \overline{orb^G(x_2)} \cap X^{ss} \neq \emptyset.$$

(2.2) Modules de Kronecker. La notion de module de Kronecker a été introduite par Hulek dans [11]. Nous allons rappeler les définitions et résultats de [5] dont nous aurons besoin par la suite. Soit W un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. On suppose $\dim W \geq 3$. Si H_0 et H_1 sont des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels, on appelle *module de Kronecker* un morphisme $\kappa : H_0 \longrightarrow H_1 \otimes W$. Par *morphisme de modules de Kronecker* de $\kappa' : H'_0 \longrightarrow H'_1 \otimes W$ dans $\kappa : H_0 \longrightarrow H_1 \otimes W$, on entend un couple (h_0, h_1) d'applications linéaires $h_0 : H'_0 \longrightarrow H_0$, $h_1 : H'_1 \longrightarrow H_1$ tel que $\kappa \circ h_0 = (h_1 \otimes \mathrm{id}) \circ \kappa'$. Un *sous-module de Kronecker* de $\kappa : H_0 \longrightarrow H_1 \otimes W$ est un module de Kronecker $\kappa' : H'_0 \longrightarrow H'_1 \otimes W$ tel que $H'_0 \subset H_0$ et $H'_1 \subset H_1$ sont des sous-espaces vectoriels et tel que $\kappa(H'_0) \subset H'_1 \otimes W$ et κ' est la restriction de κ. On pose, si $\kappa : H_0 \longrightarrow H_1 \otimes W$ est un module de Kronecker avec H_0 ou H_1 non nul,

$$\mu(\kappa) = \frac{\dim H_0}{\dim H_1}, \text{ si } \dim H_1 \neq 0, \ \mu(\kappa) = \infty \text{ sinon.}$$

On dit que le morphisme de Kronecker κ est *semi-stable (resp. stable)* si tout sous-module κ' de Kronecker propre et non nul satisfait à $\mu(\kappa') \leq \mu(\kappa)$ $(<)$. Ceci est justifié de la manière suivante : Considérons la variété algébrique $L(H_0, H_1 \otimes W)$ sur laquelle opère le groupe algébrique $G = (GL(H_0) \times GL(H_1))/\mathbb{C}^*$ en associant à $([h_0, h_1], \kappa)$ le module de Kronecker $(h_1 \otimes \mathrm{id}) \circ \kappa \circ h_0^{-1}$. On déduit une opération de $SL(H_0) \times SL(H_1)$ sur l'espace projectif $\mathbb{P}L(H_0, H_1 \otimes W)$ des droites vectorielles de $L(H_0, H_1 \otimes W)$, muni d'une linéarisation évidente.

Proposition 2.2 –*([5]) Un module de Kronecker $[\kappa] \in \mathbb{P}L(H_0, H_1 \otimes W)$ est semi-stable (resp. stable) sous l'action de $SL(H_0) \times SL(H_1)$ si et seulement si κ est un module de Kronecker semi-stable (resp. stable).*

(2.3) Modules quadratiques. Soit W un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Si H est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel alors un morphisme symétrique $q : H \longrightarrow H^* \otimes W$ sera appelé *W-module quadratique (de source H)* ou, s'il n'y a pas d'ambiguïté, *module quadratique*. On va considérer, dans ce qui suit, le morphisme q indifféremment comme un élément de $L(S^2H, W)$ ou, ayant choisi une base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ de H (ou une décomposition de H en sous-espaces vectoriels), comme une matrice symétrique, à coefficients dans W, $q = (q_{ij})$,

[1] Mumford dit "proprement stable".

avec $q_{ij} = q(e_j, e_i)$. On appelle morphisme de modules quadratiques de $q' : H' \longrightarrow H'^* \otimes W$ dans $q : H \longrightarrow H^* \otimes W$ une application linéaire $h : H' \longrightarrow H$ telle que $q' = ({}^t h \otimes \mathrm{id}) \circ q \circ h$. Soit (H, q) un module quadratique. Si $H' \subset H$ est un sous-espace vectoriel de H on définit son q-orthogonal $H'^{\perp}$ par $H'^{\perp} = \{y \in H / q(x, y) = 0 \ \forall x \in H'\}$. On dit que H' est q-isotrope (totalement q-isotrope) si $H' \cap H'^{\perp} \neq 0$ ($H' \subset H'^{\perp}$).

On dira que le module quadratique non nul (H, q) est semi-stable (resp. stable) si pour tout sous-espace vectoriel non nul $H' \subset H$ totalement q-isotrope de H on a

$$\dim H' + \dim H'^{\perp} \leq \dim H \ \text{(resp. <)}.$$

La condition de semi-stabilité est équivalente à la suivante : Le module quadratique (H, q) est semi-stable si et seulement si pour tout couple H', H'' de sous-espaces vectoriels q-orthogonaux de H on a $\dim H' + \dim H'' \leq \dim H$. Remarquons aussi que si (H, q) est un module quadratique semi-stable, alors q est forcément *non-dégénérée*, *i.e.* $q : H \longrightarrow H^* \otimes W$ est injectif.

(2.4) La variété $Q(H) = P(H)^{ss}/SL(H)$. Le groupe algébrique $SL(H)$ opère sur l'espace projectif $P(H)$ des droites vectorielles de $L(S^2 H, W)$ en associant à $g \in SL(H)$ et $[q] \in P(H)$ l'élément $[q \circ S^2(g^{-1})]$ et cette action est munie d'une linéarisation évidente. La proposition suivante est due à C.T.C Wall [22].

Proposition 2.3 – *Le module quadratique $[q] \in P(H)$ est semi-stable (resp. stable) sous l'action de $SL(H)$ si et seulement si q est un module quadratique semi-stable (resp. stable).*

Soit $Q(H) = P(H)^{ss}/SL(H)$ le quotient de Mumford. On va déterminer l'ensemble sous-jacent à $Q(H)$. Pour cela, nous allons filtrer les modules quadratiques semi-stables : Soit (H, q) un module quadratique semi-stable. Soit $H_1 \subset H$ un sous-espace totalement q-isotrope de H tel que $\dim H_1 + \dim H_1^{\perp} = \dim H$. Un tel sous-espace existe si q est semi-stable, non stable. Munissons $H_1^{\perp}/H_1$ de la forme quadratique, à valeurs dans W, déduite de q. On la note également q. Le module quadratique $(H_1^{\perp}/H_1, q)$ est encore semi-stable. Si l'on suppose de plus qu'à chaque étape, $H_1 \subset H$ est choisi de façon minimale, par rapport à l'inclusion, on obtient le lemme suivant :

Lemme 2.4 – *Soit (H, q) un module quadratique semi-stable. Alors il existe une filtration $0 \subset H_1 \subset H_2 \subset \ldots \subset H_\ell \subset H$ telle que : (i) pour $i \in 1, \ldots, \ell$, les sous-espaces vectoriels $H_i/H_{i-1} \subset H_{i-1}^{\perp}/H_{i-1}$ sont totalement isotropes, satisfont à $\dim H_i/H_{i-1} + \dim(H_{i-1}/H_i)^{\perp} = \dim H_{i-1}^{\perp}/H_{i-1}$ et sont minimaux pour cette propriété ; (ii) le module quadratique $(H_\ell^{\perp}/H_\ell, q)$ est stable.*

Soit (H, q) un module quadratique semi-stable. Si $H_1 \subset H$ est un sous-espace vectoriel de H, on pose $H_1^{\vee} = H/H_1^{\perp}$. Supposons H_1 totalement q-isotrope. La forme quadratique q induit le module de Kronecker $\kappa : H_1 \longrightarrow (H_1^{\vee})^* \otimes W$. Notons par $\kappa^{\vee}$ le module de Kronecker $\kappa^{\vee} : H_1^{\vee} \longrightarrow H_1^* \otimes W$ déduit de κ par transposition. Alors $H_1 \oplus H_1^{\vee}$ est muni d'une forme

quadratique à valeurs dans W définie par

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} H_1 & H_1^\vee \end{array} \\ \begin{array}{c} H_1 \\ H_1^\vee \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & \kappa^\vee \\ \kappa & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Si l'on suppose que $\dim H_1 + \dim H_1^\perp = \dim H$, et que H_1 est minimal, par rapport à l'inclusion, pour cette propriété, alors le module de Kronecker $\kappa : H_1 \longrightarrow H_1^{\vee *} \otimes W$ déduit de q sera un module de Kronecker stable. En général, on appellera *hyperbolique* un module quadratique (H, q) qui se décompose en $H = H' \oplus H''$ tel que $\dim H' = \dim H''$ et tel que q est définie comme ci-dessus avec $\kappa : H'' \longrightarrow H''^* \otimes W$ stable (en tant que module de Kronecker). Le module quadratique gradué associé à une filtration 2.4 d'un module quadratique (H, q) est défini de la manière suivante :

$$\mathrm{gr}(H, q) = (H_\ell^\perp / H_\ell, q) \oplus \bigoplus_{i=1}^{\ell} (H_i / H_{i-1} \oplus (H_i / H_{i-1})^\vee, q_i)$$

où $(H_\ell^\perp / H_\ell, q)$ est stable et où les $(H_i / H_{i-1} \oplus (H_i / H_{i-1})^\vee, q_i)$ sont hyperboliques. La filtration 2.4 est analogue à la filtration 1.5. Elle n'est pas unique mais le gradué ne dépendra pas, à isomorphisme près, de la filtration choisie. Deux modules quadratiques q et q' sont dits *$\mathcal{S}$-équivalents* si leurs gradués associés sont isomorphes.

Proposition 2.5 – *L'ensemble sous-jacent à $Q(H) = P(H)^{ss}/SL(H)$ s'identifie aux classes de $\mathcal{S}$-équivalence de modules quadratiques.*

La démonstration se fait en deux étapes : Nous allons montrer (i) que la clôture de l'orbite d'un module quadratique q contient $gr(q)$ et (ii) que l'orbite de $gr(q)$ est fermée.

Montrons (i) : Remarquons que, si $[q] \in P^{ss}$ et si λ est un sous-groupe à un paramètre de $SL(H)$ tel $\lim_{t \to 0} \lambda(t).q = q_0$ existe, alors $q_0 \in \overline{orb^{SL(H)}(q)}$. On va montrer, par récurrence sur la longueur de la filtration 2.4, qu'il existe un sous-groupe à un paramètre λ de $SL(H)$ tel que $\lim_{t \to 0} \lambda(t).q \simeq gr(q)$. Le cas $\ell = 0$ est évident. Supposons donc $\ell > 0$. Soit $H_1 \subset H$ totalement isotrope tel que $\dim H_1 + \dim H_1^\perp = \dim H$, minimal, par rapport à l'inclusion, pour ces propriétés. Choisissons un supplémentaire K de H_1 dans $H_1^\perp$ et un supplémentaire H_1' de $H_1^\perp$ dans H. Alors $K \simeq H_1^\perp / H_1$ et $H_1 \simeq H_1^\vee$. Dans cette décomposition q s'écrit

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccc} H_1 & K & H_1' \end{array} \\ \begin{array}{c} H_1 \\ K \\ H_1' \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & 0 & \kappa^\vee \\ 0 & q_K & \alpha^\vee \\ \kappa' & \alpha & \beta \end{pmatrix} \end{array}$$

avec $\kappa : H_1 \longrightarrow H_1'^* \otimes W$ et $q_K : K \longrightarrow K^* \otimes W$ déduits de q. Par hypothèse de récurrence, il existe un sous-groupe à un paramètre λ_K tel que $\mathrm{gr}(q_K) \simeq \lim_{t \to 0} \lambda(t).q_K$. On voit alors que

le sous-groupe à un paramètre, dont la matrice dans cette décomposition est donnée par t, $\lambda_{_K}$ et t^{-1} sur la diagonale et 0 ailleurs, convient.

Montrons (ii) : Soit $[q] \in P^{ss}$ un point de la forme $(\mathcal{H}_1, q_1) \oplus \ldots \oplus (\mathcal{H}_\ell, q_\ell) \oplus (L, q_L)$, les $(\mathcal{H}_i, q_i)$ étant hyperboliques et (L, q_L) stable. On va montrer, par récurrence sur la longueur de la filtration 2.4, que pour tout sous-groupe à un paramètre g_t, tel que $\lim\limits_{t\to 0} \lambda(t).q = q_0$ existe, on a $q_0 \in orb^{SL(H)}(q)$. De là, on déduit via le théorème de Hilbert-Mumford, que $orb^{SL(H)}(q)$ est fermée. Le cas $\ell = 0$ est évident. En effet, dans ce cas q est stable et le morphisme orbite est propre. Ainsi, si $\lim\limits_{t\to 0} g_t.q = q_0$ existe, alors, par le critère valuatif de propreté, il existe $g_0 \in SL(H)$ tel que $g_0.q = q_0$. Supposons donc $\ell > 0$ et que $\lim\limits_{t\to 0} g_t.q = q_0$ existe. On a $(\mathcal{H}_1, q_1) = (H' \oplus H'', \begin{pmatrix} 0 & \kappa^\vee \\ \kappa & 0 \end{pmatrix})$, où $\kappa : H' \longrightarrow H''^* \otimes W$ est un module de Kronecker stable. Soit $(K, q_{_K}) = (\mathcal{H}_2, q_2) \oplus \ldots \oplus (\mathcal{H}_\ell, q_\ell) \oplus (L, q_{_L})$. Posons $q_t = g_t.q$, $H'_t = g_t(H')$ et $(H'^\perp)_t = g_t(H'^\perp)$. Alors H'_t est totalement q_t-isotrope, d'orthogonal $(H'^\perp)_t$. En effet, on vérifie aussitôt que $(H'^\perp)_t \subset (H'_t)^\perp$, et comme $\dim H' + \dim H'^\perp = \dim H$ on a, par semi-stabilité de q_t, égalité pour une raison de dimension. Il est facile de voir qu'on peut supposer que g_t préserve H' et $H'^\perp$ pour tout $t \in \mathbb{C}^*$. Notons donc γ'_t, γ''_t et δ_t les automorphismes de H', H'' et K induits par g_t et soient α'_t, α''_t et β_t leurs inverses. Alors, dans $H' \oplus K \oplus H''$, g_t^{-1} s'écrit

$$\begin{array}{c} \\ H' \\ K \\ H'' \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} H' & K & H'' \end{array} \\ \begin{pmatrix} \alpha'_t & u_t & v_t \\ 0 & \beta_t & w_t \\ 0 & 0 & \alpha''_t \end{pmatrix} \end{array}$$

et l'action de g_t est donnée par

$$\begin{array}{c} \\ H' \\ K \\ H'' \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} H' & K & H'' \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & (\kappa_t)^\vee \\ 0 & q_{_{K,t}} & (c_t)^\vee \\ \kappa_t & c_t & d_t \end{pmatrix} \end{array}$$

avec $\kappa_t = \kappa(\alpha'_t, \alpha''_t)$ et $q_{_{K,t}} = q_{_K}(\beta_t, \beta_t)$. Sans changer la famille des q_t, on peut supposer $\det \alpha'_t = 1, \det \alpha''_t = 1$ et par suite, $\det \beta_t = 1$. Le module de Kronecker κ est stable, *i.e.* le morphisme orbite $SL(H') \times SL(H'') \to \mathbb{P}(L(H', H''^* \otimes W))$ est propre. Comme $\lim\limits_{t\to 0} g_t.q = q_0$ existe, $\lim\limits_{t\to 0} \kappa_t = \kappa_0$. Par le critère valuatif de propreté, on déduit l'existence d'une limite $(\alpha'_0, \alpha''_0) \in SL(H') \times SL(H'')$. Par hypothèse de récurrence, il existe $\beta \in SL(K)$ tel que $g.q_{_K} = q_{_{K,0}}$. Considérons donc la famille h_t dont la matrice est donnée par α'_t, β, α''_t sur la diagonale et 0 ailleurs, puis la famille $g'_t = h_t \circ g_t$. On a $\lim\limits_{t\to 0} g'_t.q = h_0 q_0$. Par suite, on est ramené à considérer les g_t dont la matrice de g_t^{-1} n'a que l'identité sur la diagonale. Dans ce cas on a $c_t(z, y) = \kappa^\vee(z, u_t y) + q_K(w_t z, y)$ pour $z \in H''$, et $y \in K$ et $d_t(z, z) = q_K(w_t z, w_t z) + 2\kappa(v_t z, z)$ pour $z \in H''$. Soit V l'espace vectoriel $V = \mathrm{Hom}(K, H') \times \mathrm{Hom}(H'', K)$ et $N \subset V$ le sous-espace vectoriel de V des couples (u, v) tels que $\kappa^\vee(z, uy) + q_K(wz, y) \equiv 0$. Alors on a un morphisme injectif de V/N dans l'espace

des applications bilinéaires de $H'' \times K$ dans W. C'est une immersion fermée, donc propre. On déduit, comme $\lim_{t\to 0} c_t = c_0$ existe, l'existence d'une classe $[(u_0, w_0)]$, limite de $[(u_t, w_t)]$. Soit (u, w) un relèvement de $[(u_0, w_0)]$ dans V. Considérons les $v_t \in \mathrm{Hom}(H'', H')$: Le module de Kronecker κ est stable et donc injectif. Par suite, l'application linéaire naturelle $f : \mathrm{Hom}(H'', H') \longrightarrow \mathrm{Hom}(H'', H'^* \otimes W)$ est injective. On a $d_t = \kappa \circ v_t$, *i.e.* $f(v_t) = d_t$. Un argument de propreté montre encore que $\lim_{t\to 0} v_t = v_0 \in \mathrm{Hom}(H'', H')$ existe. Maintenant si $g \in SL(H)$ est défini, tel que g^{-1} s'exprime par

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} H' & K & H'' \end{array} \\ \begin{array}{c} H' \\ K \\ H'' \end{array} & \begin{pmatrix} \mathrm{id} & u & v_0 \\ 0 & \mathrm{id} & w \\ 0 & 0 & \mathrm{id} \end{pmatrix} \end{array}$$

alors $g.q = q_0$, ce qui termine la démonstration de la proposition. □

3. Le module des faisceaux quadratiques

Soit C une courbe complète sur $\mathbb{C}$, de Gorenstein, muni d'un faisceau très ample $\mathcal{O}_C(1)$. Une *famille de faisceaux purs* paramétrée par la variété algébrique S est la donnée d'un $\mathcal{O}_{S\times C}$-module cohérent $\mathcal{F}$, S-plat, tel qu'en tout point fermé s de S le $\mathcal{O}_C$-module $\mathcal{F}_s$ soit pur. Posons $\mathcal{F}^\vee = \underline{\mathrm{Hom}}_{S\times C}(\mathcal{F}, pr_2^*\omega_C)$.

Proposition 3.1 – *Si $\mathcal{F}$ est une famille de faisceaux purs alors $\mathcal{F}^\vee$ est S-plat.*

Soit $\mathcal{F}$ une famille de faisceaux purs. Alors le morphisme canonique $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}^{\vee\vee}$ est un isomorphisme. En effet, si K est le conoyau alors $K_s = 0$ pour tout point fermé s d'où $K = 0$ par le lemme de Nakayama, et si N est le noyau, on a encore $N_s = 0$ par S-platitude de $\mathcal{F}^{\vee\vee}$, ce qui donne $N = 0$. Remarquons aussi que $(\mathcal{F}^\vee)_s \simeq (\mathcal{F}_s)^\vee$. Une *famille de faisceaux quadratiques* est la donnée d'un couple $(\mathcal{F}, \sigma)$, formé d'un $\mathcal{O}_{S\times C}$-module cohérent $\mathcal{F}$, S-plat, et d'un isomorphisme symétrique $\sigma : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}^\vee$.

Démonstration de la proposition 3.1. On plonge C dans un espace projectif $\mathbb{P}^n$ et on considère $\mathcal{F}$ comme une famille de faisceaux purs sur $S \times \mathbb{P}^n$. En général, si $\mathcal{E}$ est un $\mathcal{O}_C$-module, alors on a $\underline{\mathrm{Ext}}^q_{\mathbb{P}^n}(\mathcal{E}, \omega_{\mathbb{P}^n}) = 0$ pour $q < n-1$. Montrons que $\underline{\mathrm{Ext}}^{n-1}_{\mathbb{P}^n}(\mathcal{E}, \omega_{\mathbb{P}^n}) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_C(\mathcal{E}, \omega_C)$. Ceci est clair si $\mathcal{E}$ est localement libre et on se ramène à ce cas moyennant une résolution $L_1 \longrightarrow L_0 \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow 0$ de $\mathcal{E}$ par des faisceaux localement libres sur C. De même $\underline{\mathrm{Ext}}^q_{S\times\mathbb{P}^n}(\mathcal{F}, pr_2^*\omega_C) = 0$ pour $q < n-1$ et $\underline{\mathrm{Ext}}^{n-1}_{S\times\mathbb{P}^n}(\mathcal{F}, pr_2^*\omega_S) \simeq \underline{\mathrm{Hom}}_{S\times C}(\mathcal{F}, pr_2^*\omega_C)$.

Lemme 3.2 – *Soit $\pi : Y \longrightarrow Z$ un morphisme projectif et lisse de variétés algébriques. Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux faisceaux cohérents sur Y, Z-plats, $z \in Z$. Alors on a la suite spectrale*

$$E_2^{p,q} = \mathrm{Tor}^{\mathcal{O}_Y}_{-p}(\underline{\mathrm{Ext}}^q_Y(\mathcal{F}, \mathcal{G}), \mathcal{O}_{Y_z}) \implies \underline{\mathrm{Ext}}^{p+q}_{Y_z}(\mathcal{F}_z, \mathcal{G}_z).$$

On applique le lemme à notre situation avec $\pi = pr_1$, $\mathcal{G} = pr_2^*\omega_C$ et s un point fermé de S : Si $\mathcal{E}$ est un $\mathcal{O}_C$-module pur, alors $\mathcal{E}$ est de Cohen-Macaulay, d'où $\underline{\mathrm{Ext}}^n_{\mathbb{P}^n}(\mathcal{E}, \omega_{\mathbb{P}^n}) = 0$. Par conséquent, l'aboutissement est égal à $\underline{\mathrm{Ext}}^{n-1}_{\mathbb{P}^n}(\mathcal{E}, \omega_{\mathbb{P}^n})$ en degré $n-1$, nul en tout autre degré. Comme $\mathcal{F}$ est S-plat (et $\mathbb{P}^n$ lisse), on a $\underline{\mathrm{Ext}}^q_{S\times\mathbb{P}^n}(\mathcal{F}, pr_2^*\omega_C) = 0$ pour $q > n$. On en déduit d'abord que $\underline{\mathrm{Ext}}^n_{S\times\mathbb{P}^n}(\mathcal{F}, pr_2^*\omega_C) = 0$, puis que seuls les termes $E_2^{p,n-1}$ peuvent être non nuls et enfin, par dégénérescence, que les $E_2^{p,n-1}$ sont nuls pour $p \neq 0$, d'où la proposition. $\square$

La démonstration du théorème 0.1 se fera en plusieurs étapes. Nous construirons d'abord un schéma de paramètres $Quad^{ss}_C(r, N)$, où N est un entier suffisamment grand, muni d'une action de $SL(rN)$, et dont les points fermés sont précisément les faisceaux quadratiques semi-stables de multiplicité r. Ce schéma sera un sous-schéma fermé de l'ouvert des points semi-stables d'un espace projectif $P(r, N)$ et l'action de $SL(rN)$ sur $Quad^{ss}_C(r, N)$ proviendra d'une action linéaire de $SL(rN)$ sur $P(r, N)$. On pourra donc passer au quotient $Quad^{ss}_C(r, N)/SL(rN)$ au sens de Mumford. Quelques vérifications montreront que ce quotient convient.

(3.1) Familles limitées. D'après la proposition 1.4, le faisceau quadratique $(\mathcal{F}, \sigma)$ est semi-stable si et seulement si $\mathcal{F}$ est semi-stable. La proposition suivante montre que les faisceaux quadratiques semi-stables de multiplicité r forment une famille limitée.

Proposition 3.3 *–([21]) Soit $F_a(r, \chi)$ la famille des faisceaux purs $\mathcal{F}$ sur C, de polynôme de Hilbert $rn + \chi$, et tels que pour tout sous-faisceau cohérent non nul $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$, on ait $\mu(\mathcal{F}') \leq \mu(\mathcal{F}) + a$. Alors $F_a(r, \chi)$ est une famille limitée.*

Il existe donc N_0 tel que, pour $N \geq N_0$ et pour tout module quadratique $(\mathcal{F}, \sigma)$ semi-stable de multiplicité r, $\mathcal{F}(N)$ est engendré par ses sections globales et $\mathrm{H}^1(C, \mathcal{F}(N)) = 0$.

(3.2) Le schéma des paramètres $Quad^{ss}_C(r, N)$. Soit N_0 un entier tel que pour $N \geq N_0$ on ait les propriétés ci-dessus et tel que pour $N \geq N_0$ le faisceau $\omega_C(2N)$ soit engendré par ses sections globales. Désignons par H l'espace vectoriel $\mathbb{C}^{rN}$ et par $\mathbb{H}$ le fibré vectoriel $H \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_C(-N)$. Considérons, pour toute variété algébrique S, les triplets $(\mathcal{F}, p, [\sigma])$ formés d'un quotient cohérent $\mathbb{H}_S \xrightarrow{p} \mathcal{F}$, S-plat, et de la classe modulo homothétie d'un isomorphisme symétrique $\sigma : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^\vee$ satisfaisant aux conditions suivantes : Pour tout point fermé s de S, le faisceau quadratique $\mathcal{F}_s$ est semi-stable de multiplicité r et p induit un isomorphisme $H \otimes \mathcal{O}_S \xrightarrow{\sim} pr_{1*}(\mathcal{F}(N))$. Deux triplets $(\mathcal{F}, p, [\sigma])$ et $(\mathcal{F}', p', [\sigma'])$ sont isomorphes s'il existe un isomorphisme $\varphi : \mathcal{F}' \longrightarrow \mathcal{F}$ tel que $p = \varphi \circ p'$ et tel qu'il existe deux représentants $\tilde{\sigma} \in [\sigma]$ et $\tilde{\sigma}' \in [\sigma']$ tel que $\tilde{\sigma}'\varphi = ({}^\vee\varphi)^{-1} \circ \tilde{\sigma}$. Notons par $[\mathcal{F}, p, [\sigma]]$ la classe d'isomorphisme du triplet $(\mathcal{F}, p, [\sigma])$ et par $\underline{Quad}^{ss}_C(r, N)(S)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de tels triplets. On obtient un foncteur

$$\underline{Quad}^{ss}_C(r, N) : \text{ Variétés algébriques} \longrightarrow \text{Ensembles.}$$

Soit $W = \mathrm{H}^0(C, \omega_C(2N))$. On va montrer que le foncteur $\underline{Quad}^{ss}_C(r, N)$ est représentable par une sous-variété algébrique localement fermée de l'espace projectif $P(r, N)$ des droites vectorielles de l'espace vectoriel $L(S^2H, W)$. On note indifféremment l'ensemble $\underline{Quad}^{ss}_C(r, N)(S)$,

où $S = Spec(\mathbb{C})$, et la variété qui représente le foncteur $\underline{Quad}_C^{ss}(r,N)$ par $Quad_C^{ss}(r,N)$.

Soit $[\mathcal{F}, p, [\sigma]]$ un élément de $Quad_C^{ss}(r,N)$. Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} H \otimes \mathcal{O}_C & \xrightarrow{p} & \mathcal{F}(N) & \longrightarrow & 0 \\ & & \sigma \downarrow \wr & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{F}^\vee(N) & \xrightarrow{{}^\vee p} & H \otimes \omega_C(2N) \end{array}$$

En prenant les sections globales, on obtient l'application linéaire $q = {}^\vee p \circ \sigma \circ p$ de $L(S^2H, W)$, définie à homothétie près. L'application q ne dépend pas du représentant choisi, d'où une application $\imath : Quad_C^{ss}(r,N) \longrightarrow P(r,N)$. Ceci est fonctoriel et on obtient un morphisme de foncteurs entre $\underline{Quad}_C^{ss}(r,N)$ et le foncteur des points de $P(r,N)$.

Inversement, si $[q] \in P(r,N)$, on déduit le morphisme composé, encore noté q, $q : H \otimes \mathcal{O}_C(-N) \longrightarrow H^* \otimes W \otimes \mathcal{O}_C(-N) \xrightarrow{ev} H^* \otimes \omega_C(N)$. Posons $\mathcal{E}_q = \operatorname{Ker} q$ et $\mathcal{F}_q = \mathbb{H}/\mathcal{E}_q$. Remarquons que $\mathcal{E}_q = \mathcal{E}_{\lambda q}, \lambda \neq 0$. Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H} & \xrightarrow{q} & \mathbb{H}^\vee \\ p \downarrow & & {}^\vee p \uparrow \\ \mathcal{F}_q & & \mathcal{F}_q^\vee \end{array}$$

On déduit un morphisme $\sigma : \mathcal{F}_q \to \mathcal{F}_q^\vee$, défini à homothétie près, dont on vérifie qu'il est injectif, surjectif et symétrique. Par suite, $(\mathcal{F}_q, \sigma_q)$ est un faisceau quadratique. On observe que de q et de $\lambda q, \lambda \neq 0$ on déduit le même triplet $[\mathcal{F}_q, p, [\sigma_q]]$. Déterminons les conditions à imposer sur q, pour obtenir de cette façon un élément de $Quad_C^{ss}(r,N)$: Le morphisme $q : S^2(\mathbb{H}(N)) \longrightarrow \omega_C(2N)$ induit, par tensorisation, les morphismes $q_\ell : S^2(\mathbb{H}(N+\ell)) \longrightarrow \omega_C(2N+2\ell)$. Soient $H_\ell = H \otimes \mathrm{H}^0(\mathcal{O}_C(l))$ et $W_\ell = \mathrm{H}^0(\omega_C(2N+2\ell))$. Désignons encore par q_ℓ les applications linéaires $q_\ell : S^2 H_\ell \longrightarrow W_\ell$ déduites de q_ℓ en prenant les sections globales. Soit $\Sigma(r,N)$ la sous-variété déterminantielle de $P(r,N)$ définie par la condition suivante :

$$\operatorname{rang} q_\ell \leq r(N+\ell), \text{ pour } \ell \geq 0$$

Le groupe algébrique $SL(H)$ opère, linéairement, sur $P(r,N)$. Soit $\Sigma(r,N)^{ss}$ l'ouvert des points semi-stables de $\Sigma(r,N)$.

Théorème 3.4 – *Il existe N_0 tel que pour $N \geq N_0$, la sous-variété localement fermée $\Sigma(r,N)^{ss}$ de $P(r,N)$ représente le foncteur $\underline{Quad}_C^{ss}(r,N)$ via*

$$\imath : Quad_C^{ss}(r,N) \longrightarrow P(r,N).$$

De plus, l'image $[q]$ de $[\mathcal{F}, p, [\sigma]]$ est stable sous l'action de $SL(H)$ si et seulement si $(\mathcal{F}, \sigma)$ est un faisceau quadratique stable.

Démonstration. Il s'agit de montrer que $\imath$ induit un isomorphisme de foncteurs entre $\underline{Quad}_C^{ss}(r,N)$ et le foncteur des points de $\Sigma(r,N)^{ss}$. La difficulté sera de montrer que $\imath$ induit une bijection entre $Quad_C^{ss}(r,N)$ et $\Sigma(r,N)^{ss}$, *i.e.* le cas où S est un point : On montrera (i) que $\imath$ a bien son image dans $\Sigma(r,N)^{ss}$ et (ii) qu'en associant à $[q]$ le triplet $[\mathcal{F}_q, p, [\sigma_q]]$ comme ci-dessus, on obtient une application $\jmath : \Sigma(r,N)^{ss} \longrightarrow Quad_C^{ss}(r,N)$. Evidemment $\imath$ et $\jmath$ seront inverses l'une de l'autre. On verra que $\jmath$ donne lieu à un morphisme de foncteurs entre le foncteur des points de $\Sigma(r,N)^{ss}$ et $\underline{Quad}_C^{ss}(r,N)$. Les morphismes de foncteurs $\imath$ et $\jmath$ seront inverses l'un de l'autre ce qui démontrera le théorème.

Lemme 3.5 *–([21]) Soit P un polynôme. Il existe N_0 tel que, pour tout $N \geq N_0$, et pour tout $\mathcal{O}_C$-module semi-stable de polynôme de Hilbert P, l'énoncé suivant soit vrai : Pour tout sous-faisceau $0 \neq \mathcal{E} \subset \mathcal{F}$, on a*

$$\frac{h^0(\mathcal{E}(N))}{r(\mathcal{E})} \leq \frac{h^0(\mathcal{F}(N))}{r(\mathcal{F})} \text{ et en cas d'égalité : } \frac{P_{\mathcal{E}(m)}}{r(\mathcal{E})} = \frac{P_{\mathcal{F}(m)}}{r(\mathcal{F})} \text{ pour tout } m.$$

Lemme 3.6 *– Il existe N_0 tel que, pour tout $N \geq N_0$ et pour tout faisceau quadratique de multiplicité r on ait : le faisceau quadratique $(\mathcal{F}, \sigma)$ est semi-stable (resp. stable) si et seulement si pour tout sous-faisceau totalement σ-isotrope $0 \neq \mathcal{E} \subset \mathcal{F}$ on a*

$$h^0(\mathcal{E}(N)) + h^0(\mathcal{E}^\perp(N)) \leq Nr \quad (resp. <)$$

Démonstration. Comme la famille des modules quadratiques semi-stables de multiplicité r est limitée (3.3), on peut choisir N_0 de façon à ce qu'on ait $h^0(\mathcal{F}(N)) = Nr$ pour tout $N \geq N_0$ et tout module quadratique semi-stable $(\mathcal{F}, \sigma)$ de multiplicité r. Quitte à augmenter N_0, on peut supposer que le lemme précédent est vrai. Supposons $(\mathcal{F}, \sigma)$ semi-stable (resp. stable). Soit $0 \neq \mathcal{E} \subset \mathcal{F}$ un sous-faisceau totalement σ-isotrope tel que $\mathcal{F}/\mathcal{E}$ soit pur. Le $\mathcal{O}_C$-module sous-jacent à $\mathcal{F}$ étant semi-stable le lemme 3.5 dit :

$$h^0(\mathcal{E}(N)) \leq \frac{r(\mathcal{E})}{r(\mathcal{F})} h^0(\mathcal{F}(N)) \text{ et } h^0(\mathcal{E}^\perp(N)) \leq \frac{r(\mathcal{E}^\perp)}{r(\mathcal{F})} h^0(\mathcal{F}(N))$$

De $r(\mathcal{F}) = r(\mathcal{E}) + r(\mathcal{E}^\perp)$, on déduit $h^0(\mathcal{E}(N)) + h^0(\mathcal{E}^\perp(N)) \leq Nr$. Dans le cas "stable" on remarque qu'on a $h^0(\mathcal{E}(N)) < (r(\mathcal{E})/r(\mathcal{F}))h^0(\mathcal{F}(N))$. Sinon, d'après le lemme 3.5, on aurait $P_{\mathcal{E}(m)}/r(\mathcal{E}) = P_{\mathcal{F}(m)}/r(\mathcal{F})$ $\forall m \in \mathbb{N}$, ce qui entraînerait $\chi(\mathcal{E}) = 0$ et donc une contradiction à la stabilité de $\mathcal{F}$. Réciproquement, soit $0 \neq \mathcal{E} \subset \mathcal{F}$ un sous-faisceau totalement σ-isotrope, tel que $\mathcal{F}/\mathcal{E}$ soit pur. On a $h^0(\mathcal{E}(N)) \geq \chi(\mathcal{E}) + Nr(\mathcal{E})$ et $h^0(\mathcal{E}^\perp(N)) \geq \chi(\mathcal{E}^\perp) + Nr(\mathcal{E}^\perp)$. Par suite, on a $\chi(\mathcal{E}) + \chi(\mathcal{E}^\perp) + N(r(\mathcal{E}) + r(\mathcal{E}^\perp)) \leq Nr$ (resp. $<$), d'où $2\chi(\mathcal{E}) \leq 0$(resp. $<$), ce qui donne la semi-stabilité (resp. stabilité) du faisceau quadratique $(\mathcal{F}, \sigma)$. $\square$

Montrons que l'application $\imath$ a son image dans Σ : Soit $[\mathcal{F}, p, [\sigma]]$ un élément de $Quad_C^{ss}(r,N)$ et soit $[q]$ son image sous $\imath$. Il s'agit de montrer que q est semi-stable, la condition définissant $\Sigma(r,N)$ dans $P(r,N)$ étant évidente par construction. Soit $H' \subset H$ un

sous-espace totalement q-isotrope et soient $\mathcal{F}'$, resp. $\mathcal{F}''$, les sous-faisceaux de $\mathcal{F}$ engendrés par H', resp. $H'^{\perp}$. On a $\dim H' \leq \dim \mathrm{H}^0(\mathcal{F}'(N))$ et $\dim H'^{\perp} \leq \dim \mathrm{H}^0(\mathcal{F}''(N))$. De plus on a $\mathcal{F}'^{\perp} \subset \mathcal{F}''$. En effet, considérons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} H'^{\perp} \otimes \mathcal{O}_C & \longrightarrow & H \otimes \mathcal{O}_C & \xrightarrow{q} & H^* \otimes \omega_C(2N) & \longrightarrow & H' \otimes \omega_C(2N) \\ \downarrow & & \downarrow & & \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{F}''(N) & \longrightarrow & \mathcal{F}(N) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{F}^{\vee}(N) & \longrightarrow & \mathcal{F}'^{\vee}(N) \end{array}$$

L' application $H'^{\perp} \longrightarrow H'^* \otimes W$ étant nulle, $\mathcal{F}'(N) \subset \ker(\mathcal{F}(N) \longrightarrow \mathcal{F}'^{\vee}(N))$, ce qui dit $\mathcal{F}'^{\perp} \subset \mathcal{F}''$. Par suite, comme $H' \subset H'^{\perp}$, on voit que $\mathcal{F}'$ est totalement σ-isotrope. Par semi-stabilité de $(\mathcal{F}, \sigma)$ on a, d'après le lemme 3.6,

$$\dim H' + \dim H'^{\perp} \leq \dim \mathrm{H}^0(\mathcal{F}'(N)) + \dim \mathrm{H}^0(\mathcal{F}'^{\perp}(N)) \leq rN = \dim H$$

d'où la semi-stabilité de q. Si $(\mathcal{F}, \sigma)$ est *stable*, alors le module quadratique q est stable.

Définition de l'application $\jmath : \Sigma(r,N)^{ss} \longrightarrow Quad_C^{ss}(r,N)$: Soit q un élément de $\Sigma(r,N)^{ss}$. On déduit un triplet $[\mathcal{F}_q, p, [\sigma_q]]$. On montrera d'abord qu'il existe N_0 tel que pour $N \geq N_0$ le faisceau $\mathcal{F}_q$ soit de multiplicité r. Ensuite, on verra que le faisceau quadratique $(\mathcal{F}_q, \sigma_q)$ est effectivement semi-stable. Soit ρ la multiplicité de $\mathcal{F}_q$. Pour $\ell \gg 0$, les morphismes $H_\ell \longrightarrow \mathrm{H}^0(\mathcal{F}_q(N+\ell))$ sont surjectifs et $\mathrm{H}^1(\mathcal{F}_q(N+\ell)) = 0$. D'après la condition définissant $\Sigma(r,N)$ on a donc l'inégalité $\rho(N+\ell) \leq \operatorname{rang} q_\ell \leq r(N+\ell)$, pour $\ell \gg 0$. Par conséquent, on a $\rho \leq r$. La difficulté est l'inégalité dans l'autre sens. Remarquons que, comme q est semi-stable, $q : H \longrightarrow H^* \otimes W$ est injectif.

Lemme 3.7 –*([21]) Il existe une constante B, dépendant de la courbe C, telle que pour tout faisceau semi-stable $\mathcal{F}$ de pente μ et de multiplicité r on ait $h^0(\mathcal{F}) \leq r \sup(\mu + B, 0)$.*

Lemme 3.8 – *Il existe M, indépendant de N, tel que, si $(\mathcal{F}_q, \sigma_q)$ est le faisceau quadratique induit par $[q] \in \Sigma(r,N)^{ss}$, alors on a $h^1(C, \mathcal{F}(N)) \leq M$.*

Démonstration. Soit ρ la multiplicité de $\mathcal{F}_q$. On sait que $\rho \leq r$. Soit $M' \geq 0$ un entier tel que pour tout $m \geq M'$ on ait $h^0(\omega_C(-m)) = 0$. Montrons que $h^1(C, \mathcal{F}(N)) \leq rM'$. L'injection $\mathrm{H}^0(\mathcal{F}_q^{\vee}(-N-M')) \hookrightarrow H^* \otimes \mathrm{H}^0(\omega_C(-M'))$ montre, par dualité de Serre, que $\mathrm{H}^1(C, \mathcal{F}_q(N+M')) = 0$. Pour tout $m \in M$, on a $h^1(\mathcal{F}_q(m)) \leq h^1(\mathcal{F}_q(m+1)) + \rho$ ce qui se déduit de la dualité de Serre, de l'isomorphisme $\sigma_q : \mathcal{F}_q \to \mathcal{F}_q^{\vee}$ et de l'inégalité $h^0(\mathcal{F}_q(m)) \leq h^0(\mathcal{F}_q(m-1)) + \rho$. Par conséquent, $h^1(\mathcal{F}_q(N)) \leq \rho M' \leq rM'$ □

Proposition 3.9 – *La famille des faisceaux quadratiques $(\mathcal{F}, \sigma) = (\mathcal{F}_q, \sigma_q)$, avec $q \in \bigcup_{N \geq 1} \Sigma(r,N)^{ss}$ est limitée.*

Démonstration. Comme $\rho \leq r$, les multiplicités apparaissant sont en nombre fini. D'après la proposition 3.3, il suffit de montrer qu'il existe a, indépendant de N, tel que $\mu_{max}(\mathcal{F}_q) \leq a$. Soit $\mathcal{F}'$ un sous-faisceau totalement σ-isotrope satisfaisant à $\mu(\mathcal{F}') = \mu_{max}(\mathcal{F})$. On a,

par injectivité de q, une injection $H \hookrightarrow \mathrm{H}^0(\mathcal{F}(N))$. Posons $H' = H \cap \mathrm{H}^0(\mathcal{F}'(N))$ et $H'' = H \cap (\mathcal{F}'^{\perp}(N))$, où l'intersection est prise dans $\mathrm{H}^0(\mathcal{F}(N))$. Alors on a $H'' \subset H'^{\perp}$. En effet, considérons le diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc} H & \longrightarrow & \mathrm{H}^0(\mathcal{F}(N)) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{H}^0(\mathcal{F}^{\vee}(N)) & \longrightarrow & H^* \otimes W \\ & & & \alpha\searrow & \downarrow & & \downarrow \\ & & & & \mathrm{H}^0(\mathcal{F}'^{\vee}(N)) & \longrightarrow & H'^* \otimes W \end{array}$$

Le morphisme α est nul pour les éléments de H''. Par suite, $H'' \longrightarrow H'^* \otimes W$ est nul, d'où $H'' \subset H'^{\perp}$. En particulier, comme $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}'^{\perp}$, on voit que H' est totalement q-isotrope. Par semi-stabilité de q on a $\dim H' + \dim H'' \leq \dim H' + \dim H'^{\perp} \leq rN$. Soit $\delta_q = h^0(\mathcal{F}_q) - rN$. En considérant la suite exacte $0 \longrightarrow \mathcal{F}'^{\perp} \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'^{\vee} \longrightarrow 0$, on obtient $h^0(\mathcal{F}'(N)) \leq \dim H' + \delta_q \leq rN - \dim H'' + \delta_q \leq h^0(\mathcal{F}'^{\vee}(N)) + 2\delta_q$. Le faisceau $\mathcal{F}'^{\vee}$ est semi-stable, d'où l'existence de B, indépendant de N tel que

$$\frac{h^0(\mathcal{F}'^{\vee}(N))}{r(\mathcal{F}')} \leq \sup(-\mu(\mathcal{F}') + N + B, 0).$$

D'après le lemme précédent, $\delta_q \leq M$ avec M indépendant de N. Par conséquent, on a $\chi(\mathcal{F}'(N)) = r(\mathcal{F}')(\mu(\mathcal{F}') + N) \leq r(\mathcal{F}')(-\mu(\mathcal{F}') + N + B) + 2M$. Il en résulte $2r(\mathcal{F}')\mu(\mathcal{F}') \leq Br(\mathcal{F}') + 2M$ ce qui donne $\mu(\mathcal{F}') \leq B + M/r(\mathcal{F}') \leq B + M$, d'où la proposition. $\square$

D'après la proposition précédente, il existe N_0 tel que pour tout $N \geq N_0$ on ait $\mathrm{H}^1(\mathcal{F}_q(N)) = 0$ pour $q \in \Sigma(r, N)$. D'où, par injectivité de l'application, $H \hookrightarrow \mathrm{H}^0(\mathcal{F}_q(N))$ l'inégalité cherchée $r \leq \rho$. Ainsi $\mathcal{F}_q$ est de multiplicité r. Montrons que le faisceau quadratique $(\mathcal{F}_q, \sigma_q)$ est semi-stable : Comme $\dim H = \mathrm{H}^0(\mathcal{F}_q(N))$ l'injection $H \hookrightarrow \mathrm{H}^0(\mathcal{F}_q(N))$ est un isomorphisme. Soit $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ un sous-faisceau totalement σ-isotrope. Posons $H' = \mathrm{H}^0(\mathcal{F}'(N))$ et $H'' = \mathrm{H}^0(\mathcal{F}'^{\perp}(N))$. D'après la démonstration de la proposition précédente on a

$$\dim H' + \dim H'' \leq \dim H' + \dim H'^{\perp} \leq rn.$$

En appliquant le lemme 3.6, on déduit que le faisceau quadratique $(\mathcal{F}_q, \sigma_q)$ est semi-stable. Si le module quadratique est stable alors $(\mathcal{F}, \sigma)$ est stable. On a donc l'application $\jmath : \Sigma(r, N)^{ss} \longrightarrow Quad_C^{ss}(r, N)$ et $\imath$ et $\jmath$ sont évidemment inverses l'une de l'autre.

Terminons la démonstration du théorème 3.4 : Soit $\underline{q}$ le morphisme universel sur $P(r, N)$. Notons également $\underline{q}$ la restriction de $\underline{q}$ à $\Sigma(r, N)^{ss}$ et de même le morphisme déduit $\underline{q} : H_{\Sigma(r,N)^{ss} \times C}(-N) \longrightarrow H^* \otimes pr_2^*(\omega_C)(N)$. Posons $\underline{\mathcal{E}_q} = \mathrm{Ker}\, \underline{q}$, $\underline{\mathcal{F}} = H_{\Sigma(r,N)^{ss} \times C}(-N)/\underline{\mathcal{E}}$ et $[\underline{\sigma}] : \underline{\mathcal{F}} \longrightarrow \underline{\mathcal{F}}^{\vee}$ l'isomorphisme induit. Alors en associant à $f : S \longrightarrow \Sigma(r, N)^{ss}$ le triplet $[(f \times \mathrm{id})^* \underline{\mathcal{E}}, (f \times \mathrm{id})^*, [(f \times \mathrm{id})^* \underline{\sigma}]]$, on a un morphisme fonctoriel $Mor(S, \Sigma(r, N)^{ss}) \longrightarrow \underline{Quad}_C^{ss}(r, N)(S)$ On vérifie qu'on obtient un isomorphisme de foncteurs entre $\underline{Quad}_C^{ss}(r, N)$ et le foncteur des points de $\Sigma(r, N)^{ss}$, ce qui démontre le théorème. $\square$

(3.3) Propriété de module grossier. Points fermés. Choisissons l'entier N_0 tel que l'on soit dans les hypothèses des résultats précédents. Soit $N \geq N_0$. Soit $Q_C(r) =$

$Quad_C^{ss}(r,N)/SL(H)$. C'est une variété algébrique projective. Montrons que $Q_C(r)$ est un espace de modules grossier pour le foncteur $\underline{Q}_C(r)$. Pour cela, soit $(\mathcal{F},\sigma)$ une famille de modules quadratiques paramétrée par la variété algébrique S, telle que pour tout point fermé s de S le module quadratique $(\mathcal{F}_s,\sigma_s)$ soit semi-stable de multiplicité r. Alors il existe un unique morphisme de S dans $Q_C(r)$. En effet, par notre choix de N, les faisceaux $pr_{1*}(\mathcal{F}(N))$ et $pr_{1*}(\mathcal{F}^\vee(N))$ sont localement libres et $pr_{1*}(\sigma)$ est un morphisme de faisceaux localement libres. Localement, on peut choisir un repère et ce choix donne un morphisme dans $Quad_C^{ss}(r,N)$, unique à opération de $GL(H)$ près. On obtient ainsi un unique morphisme dans $Q_C(r)$. Ce morphisme se globalise par unicité et il est fonctoriel en S. Comme $Q_C(r)$ est le quotient catégorique de $Quad_C^{ss}(r,N)$, $Q_C(r)$ est universel pour cette propriété. L'assertion concernant l'ensemble sous-jacent à $Q_C(r)$ résulte du fait que l'immersion fermée $\imath : Quad_C^{ss}(r,N) \hookrightarrow P(r,N)^{ss}$ respecte les filtrations 1.5 et 2.4, et de la proposition 2.5. Ceci termine la démonstration du théorème 0.1. $\square$

4. Variante à paramètres

Soit $C \xrightarrow{\pi} S$ un morphisme de variétés algébriques, de dimension relative 1 et de Gorenstein. Supposons que C soit projective au-dessus de S, munie du faisceau $\mathcal{O}_{C/S}(1)$ très ample relativement à S. Soit $\omega_{C/S}$ le faisceau dualisant relatif et soit N_0 un entier tel que pour $N \geq N_0$ le faisceau $\mathcal{W}_S = \pi_*(\omega_{C/S}(2N))$ soit localement libre sur S et tel que le morphisme canonique $\pi^*\mathcal{W}_S \longrightarrow \omega_{C/S}(2N)$ soit surjectif. La fibre de $\mathcal{W}_S$ au-dessus du point fermé s de S s'identifie à l'espace vectoriel $\mathrm{H}^0(C_s,\omega_{C_s}(2N))$. Posons $H = \mathbb{C}^{rN}$. Soit $S' \to S$ un morphisme, $C' \to S'$ le morphisme obtenu par changement de base. Désignons par $Quad_{C/S}^{ss}(r,N)(S')$ l'ensemble des classes d'équivalence de triplets $(\mathcal{F},p,[\sigma])$ formés d'un $\mathcal{O}_{C'}$-module cohérent $\mathcal{F}$, quotient du $\mathcal{O}_{C'}$-module $H \otimes \mathcal{O}_{C'}(-N)$, S'-plat, et de la classe d'homothétie d'un isomorphisme symétrique $[\sigma] : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}^\vee$ satisfaisant aux conditions suivantes : Pour tout point fermé s' de S' le faisceau quadratique $\mathcal{F}_{s'}$ est semi-stable de multiplicité r et π_* induit un isomorphisme $H \otimes \mathcal{O}_{S'} \xrightarrow{\sim} \pi_*(\mathcal{F}(N))$. On vérifie qu'on obtient un foncteur

$$\underline{Quad}_{C/S}^{ss}(r,N) : \text{ Variétés algébriques/S } \longrightarrow \text{ Ensembles}$$

Soit $P_S(r,N) = \mathbb{P}(S^2H^* \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{W}_S)$. Soit $[\mathcal{F},p,[\sigma]]$ un élément de $Quad_{C/S}^{ss}(r,N)$. Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} H \otimes \mathcal{O}_S & \longrightarrow & \pi_*(\mathcal{F}(N)) & & \\ & & \downarrow & & \\ & & \pi_*(\mathcal{F}^\vee(N)) & \longrightarrow & H^* \otimes \mathcal{W}_S \end{array}$$

On obtient un morphisme, défini à homothétie près, $q : S^2H \otimes \mathcal{O}_S \longrightarrow \mathcal{W}_S$. Ceci est fonctoriel et on a donc un morphisme de foncteurs entre $\underline{Quad}_{C/S}^{ss}(r,N)$ et le foncteur des points de

$P_S(r,N)$. Un morphisme $q : S^2H \otimes \mathcal{O}_S \longrightarrow \mathcal{W}_S$ induit le morphisme, encore noté q,

$$q : S^2H \otimes \mathcal{O}_C \longrightarrow \pi^*\mathcal{W}_S \longrightarrow \omega_{C/S}(2N).$$

Soient $q_\ell : S^2(H \otimes \mathcal{O}_C(\ell)) \longrightarrow \omega_{C/S}(2N+2\ell)$ les morphismes déduits de q par tensorisation et notons encore q_ℓ les morphismes déduits de q_ℓ en appliquant π_*. Enfin, soit $\Sigma_S(r,N)$ la sous-variété déterminantielle de $P_S(r,N)$ définie par $\operatorname{rang} q_\ell \leq \rho(N+\ell)$.

Le groupe algébrique réductif $SL(H)_S$ sur S opère sur $P_S(r,N)$. On va maintenant utiliser les résultats de Seshadri concernant la réductivité et le passage au quotient relatif [20]. On est dans un cas très particulier de [20], ce groupe étant constant sur S. Si S est une variété algébrique projective sur $\mathbb{C}$ on peut considérer $P_S(r,N)$ comme une variété algébrique projective sur $\mathbb{C}$, munie d'une action linéaire de $SL(H)$, et les résultats de [20] que l'on utilisera seront tous conséquence de la catégoricité universelle d'un quotient de Mumford.

Soit $P_S(r,N)^{ss}$ l'ouvert des points semi-stables sous l'action de $SL(H)_S$. Pour tout morphisme $f : T \longrightarrow S$ on a $(P_S(r,N) \times_S T)^{ss} = P_S(r,N)^{ss} \times_S T$. En particulier, si s est un point fermé de S, la fibre au-dessus de $P_S(r,N)^{ss}$ s'identifie à l'ouvert des points semi-stables de $P(r,N)$ (section 2) sous l'action de $SL(H)$. Soit $\Sigma_S(r,N)^{ss}$ l'ouvert des points semi-stables de $\Sigma_S(r,N)$. Le théorème suivant est une version relative du théorème 3.4, la démonstration en est analogue.

Théorème 4.1 – *Il existe N_0 tel que pour $N \geq N_0$, la sous-variété localement fermée $\Sigma_S(r,N)^{ss}$ de $P_S(r,N)$ représente le foncteur $\underline{Quad}^{ss}_{C/S}(r,N)$ via*

$$\imath : Quad^{ss}_{C/S}(r,N) \longrightarrow P_S(r,N).$$

D'après [20], le quotient $Q_{C/S} = Quad^{ss}_{C/S}(r,N)/SL(H)_S$ existe et c'est une variété projective sur S. Au-dessus de tout point fermé s de S la fibre s'identifie à $Q_{C_s}(r)$.

5. Le module des thêta-caractéristiques sur une surface lisse

(5.1) Thêta-caractéristiques. Soit X une surface algébrique lisse et projective, munie d'un faisceau très ample $\mathcal{O}_X(1)$. Soit $\mathcal{F}$ un faisceau pur de dimension 1 sur X. Comme $\mathcal{F}$ est de Cohen-Macaulay, $\mathcal{F}$ admet une résolution $0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0$ par des faisceaux localement libres de longueur 1. Le support schématique $C = \operatorname{supp}_s(\mathcal{F})$ s'identifie à la courbe définie par $\det(\alpha)$. C'est une courbe de Gorenstein dont la classe fondamentale est égale à $c_1(\mathcal{F})$. Le degré de C, par rapport au plongement déterminé par $\mathcal{O}_X(1)$, s'identifie à la multiplicité du faisceau $\mathcal{F}$.

Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent de dimension 1 sur X. On pose $\mathcal{F}^\vee = \underline{\operatorname{Ext}}^1(\mathcal{F},\omega_X)$. Si $\mathcal{F}$ est pur de dimension 1, alors $\underline{\operatorname{Ext}}^2_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{F},\omega_X) = 0$ et, en considérant $\mathcal{F}$ comme faisceau sur

son support schématique, on a $\mathcal{F}^\vee \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}^* \otimes_{\mathcal{O}_C} \omega_C$ (*cf.* la démonstration de la proposition 3.1). D'après les résultats de (1.2) on a donc $\chi(\mathcal{F}^\vee) = -\chi(\mathcal{F})$ et le morphisme canonique $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}^{\vee\vee}$ est un isomorphisme.

Définition 5.1 – *On appelle thêta-caractéristique sur X la donnée d'un couple $(\mathcal{F}, \sigma)$ formé d'un faisceau pur de dimension 1 et d'un isomorphisme symétrique $\sigma : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}^\vee$.*

Les résultats de (1.2) sont valables, sans exception, en remplaçant faisceau quadratique par thêta-caractéristique. En particulier, on a la notion de stabilité et celle de $\mathcal{S}$-équivalence d'une thêta-caractéristique.

(5.2) Le module des thêta-caractéristiques sur X. Soit S une variété algébrique et $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_{S\times X}$-module, S-plat. On pose $\mathcal{F}^\vee = \underline{\mathrm{Ext}}^1(\mathcal{F}, pr_2^*\omega_X)$. Encore, si $\mathcal{F}$ est une famille de faisceaux purs de dimension 1, alors $\mathcal{F}^\vee$ est S-plat, le morphisme canonique $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}^{\vee\vee}$ est un isomorphisme et l'on a $(\mathcal{F}^\vee)_s \simeq (\mathcal{F}_s)^\vee$. Une *famille de thêta-caractéristiques* paramétrée par la variété algébrique S est la donnée d'un couple $(\mathcal{F}, \sigma)$, formé d'un $\mathcal{O}_{S\times X}$-module cohérent $\mathcal{F}$, S-plat, et d'un isomorphisme symétrique $\sigma : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}^\vee$.

Démontrons le théorème 0.2. Une thêta-caractéristique $(\mathcal{F}, \sigma)$ est semi-stable si et seulement si $\mathcal{F}$ est un $\mathcal{O}_X$-module semi-stable (*cf.* lemme 1.4). La famille des faisceaux semi-stables de polynôme de Hilbert $P(m) = dm$ étant limitée ([21]), il existe N_0 tel que, pour $N \geq N_0$ et pour toute thêta-caractéristique $(\mathcal{F}, \sigma)$ semi-stable de multiplicité d, $\mathcal{F}(N)$ est engendré par ses sections globales et $\mathrm{H}^i(X, \mathcal{F}(N)) = 0,\ i \geq 1$.

Soit $N \geq N_0$. Soit $H = \mathbb{C}^{rN}$ et $\mathbb{H} = \mathcal{O}_X(-N)$. Considérons, pour toute variété algébrique S, les triplets $(\mathcal{F}, p, [\sigma])$ formés d'un quotient cohérent $\mathbb{H}_S \xrightarrow{p} \mathcal{F}$, S-plat, et de la classe d'homothétie d'un isomorphisme symétrique $\sigma : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}^\vee$ satisfaisant aux conditions suivantes : Pour tout point fermé s de S, la thêta-caractéristique $\mathcal{F}_s$ est semi-stable et de multiplicité d et p induit un isomorphisme $H \otimes \mathcal{O}_S \xrightarrow{\sim} pr_{1*}(\mathcal{F}(N))$. Deux triplets $(\mathcal{F}, p, [\sigma])$ et $(\mathcal{F}', p', [\sigma'])$ sont isomorphes s'il existe un isomorphisme $\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'$ tel que $p' = \varphi \circ p$ et tel qu'il existe deux représentants $\tilde{\sigma} \in [\sigma]$ et $\tilde{\sigma}' \in [\sigma']$ tels que $\tilde{\sigma}'\varphi = ({}^\vee\varphi)^{-1} \circ \tilde{\sigma}$. Notons par $[\mathcal{F}, p, [\sigma]]$ la classe d'isomorphisme du triplet $(\mathcal{F}, p, [\sigma])$ et par $\underline{Thêta}_X^{ss}(d, N)(S)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de tels triplets. On vérifie qu'on obtient un foncteur

$$\underline{Thêta}_X^{ss}(d, N) : \text{Variétés algébriques} \longrightarrow \text{Ensembles},$$

qu'on représentera quand on fera l'étude locale de $Thêta_X^{ss}(d, N)$.

Soit $\mathcal{C}_X(d)$ la variété projective des courbes de degré d sur la surface X. Désignons par $\sigma_{Thêta} : Thêta_X^{ss}(d, N) \longrightarrow \mathcal{C}_X(d)$ le morphisme qui associe à une thêta-caractéristique son support schématique. Soit $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}_X(d) \times X$ la famille universelle de courbes de degré d sur X. Posons $\omega_{\mathcal{D}/\mathcal{C}_X(d)} = \underline{\mathrm{Ext}}^1(\mathcal{O}_D, pr_2^*\omega_X)$. Soit $\mathcal{W}_{\mathcal{C}_X(d)} = pr_{1*}(\omega_{\mathcal{D}/\mathcal{C}_X(d)}(2N))$. Supposons de plus N_0 choisi suffisamment grand pour que les résultats de la section 4 soient vrais. La fibre de $\mathcal{W}_{\mathcal{C}_X(d)}$ au-dessus du point représenté par la courbe C s'identifie à l'espace vectoriel

$\mathrm{H}^0(C, \omega_C(2N))$. Soit $P_{\mathcal{C}_X(d)}(d,N) = \mathbb{P}(S^2 H^* \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{W}_{\mathcal{C}_X(d)})$. Alors on a un morphisme, relatif au dessus de $\mathcal{C}_X(d)$:

$$\imath : Th\hat{e}ta_X^{ss}(d,N) \longrightarrow P_{\mathcal{C}_X(d)}(d,N)$$

En effet, soit $(\mathcal{U}, \wp, \Sigma)$ le triplet universel sur $Th\hat{e}ta_X^{ss}(d,N) \times X$. Par image directe sur le premier facteur on obtient le morphisme composé, défini à homothétie près,

$$\begin{array}{ccc} H \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_{Th\hat{e}ta_X^{ss}(d,N)} & \xrightarrow{\sim} & pr_{1*}\mathcal{U}(N) \\ & & \downarrow \wr \\ & & pr_{1*}\mathcal{U}^\vee(N) \quad \longrightarrow H^* \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{W}_{Th\hat{e}ta_X^{ss}(d,N)} \end{array}$$

Par la propriété universelle de $P_{\mathcal{C}_X(d)}(d,N)$ on obtient le morphisme $\imath$. Considérons la variété $Quad_{\mathcal{D}/\mathcal{C}}^{ss}(r,N)$ de la section 4. C'est une variété sur $\mathcal{C}_X(d)$, via disons π. Considérée sur $\mathbb{C}$, cette variété admet un autre morphisme dans $\mathcal{C}_X(d)$, disons π', en associant à un module quadratique son support schématique et la variété $Th\hat{e}ta_X^{ss}(d,N)$ s'identifie au noyau de la double flèche

$$Quad_{\mathcal{D}/\mathcal{C}}^{ss}(r,N) \underset{\pi'}{\overset{\pi}{\rightrightarrows}} \mathcal{C}_X(d).$$

Soit $\Theta_X(d)$ le quotient de $Th\hat{e}ta_X^{ss}(d,N)$ sous l'action de $SL(H)$. C'est une variété algébrique projective et comme le morphisme $\sigma_{Th\hat{e}ta}$ est constant sur les orbites, il existe un unique morphisme $\sigma_\Theta : \Theta_X(d) \longrightarrow \mathcal{C}_X(d)$. On vérifie, comme dans la démonstration du théorème 0.1, que $\Theta_X(d)$ est un espace de modules pour le foncteur considéré ; l'assertion concernant les points est évidente d'après 0.1.

Remarque 5.2 – Le plongement de $Th\hat{e}ta_X^{ss}(d,N)$ dans $Quad_{\mathcal{D}/\mathcal{C}}^{ss}(r,N)$ est utilisé de manière essentielle pour assurer l'existence du quotient $\Theta_X(d)$. C'était la motivation pour la construction du module des faisceaux quadratiques sur une courbe de Gorenstein et de sa variante à paramètres.

6. Démonstration du théorème 0.3

(6.1) Résidus. On se place dans le cadre analytique. Soit $U \subset \mathbb{C}^2$ un voisinage ouvert de 0 et soient f_1, f_2 deux fonctions holomorphes au voisinage de la fermeture de U telles que $f^{-1}(0) = \{0\}$, où $f = (f_1, f_2)$. On est intéressé par des 2-formes différentielles de la forme

$$\omega = \frac{g(z)}{f_1(z) f_2(z)} dz_1 \wedge dz_2,$$

où g est une fonction holomorphe au voisinage de la fermeture de U. Suivant [8], on pose

$$\mathrm{Res}_x(\omega) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 \int_\Gamma \omega,$$

où Γ désigne le 2-cycle réel défini par $\Gamma = \{z/|f_i(z)| = \epsilon\}$ et orienté par $d(arg(f_1)) \wedge d(arg(f_2)) \geq 0$. Soient Y_1 et Y_2 deux diviseurs sur X tels que $\dim(Y_1 \cap Y_2) = 0$ et soit $\omega \in \Gamma(X, \omega_X(Y_1 + Y_2))$ une 2-forme différentielle méromorphe ayant pour diviseur polaire $Y_1 + Y_2$. Soit $x \in Z$ et soit U un ouvert centré en x ; z_1, z_2 des coordonnées locales. La restriction de ω à U s'écrit, si f_1, f_2 sont des équations locales de Y_1, Y_2 respectivement

$$\omega_{|U} = \frac{g(z)}{f_1(z)f_2(z)} dz_1 \wedge dz_2$$

On pose $\mathrm{Res}_x(\omega) = \mathrm{Res}_x(\omega_{|U})$. Ceci ne dépend ni du choix des coordonnées locales, ni du choix des équations locales f_1, f_2 [8]. On aura besoin du théorème des résidus de [8] affirmant que si Y_1 et Y_2 sont deux diviseurs sur X tels que $\dim(Y_1 \cap Y_2) = 0$ alors on a $\sum_{x \in X} \mathrm{Res}_x(\omega) = 0$ pour $\omega \in \Gamma(X, \omega_X(Y_1 + Y_2))$. On utilisera aussi le théorème de dualité locale de [8] affirmant que si U est un voisinage ouvert de 0 et si $f = (f_1, f_2) : U \to \mathbb{C}^2$ et $g = (g_1, g_2) : U \to \mathbb{C}^2$ sont deux fonctions holomorphes telles que $f^{-1}(0) = \{0\}$ et $g^{-1}(0) = \{0\}$ et telles que le germe de g en 0 ne soit pas dans l'idéal engendré par les germes de f_1, f_2 en 0, alors il existe $h \in \mathcal{O}(\bar{U})$ telle que $\mathrm{Res}_0 \left(\frac{gh}{f_1 f_2} dz_1 \wedge dz_2 \right) \neq 0$.

Considérons maintenant un diviseur $C \subset X$, non forcément intègre, et une section hyperplane $H \in |\mathcal{O}_X(1)|$, telle que $Z = C \cap H$ soit de dimension 0. Désignons par ω_C le faisceau dualisant sur C et $j : C \hookrightarrow X$ l'inclusion. On peut définir le résidu en $x \in Z$ d'une section de $j_* \omega_C \otimes \mathcal{O}_X(nH)$, définie au voisinage de x, de la manière suivante. Choisissons une équation pour C. La suite exacte $0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(-C) \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow 0$ induit, en appliquant le foncteur $\mathrm{Hom}(\cdot, \omega_X)$, puis en tensorisant avec $\mathcal{O}_X(nH)$, la suite exacte

$$0 \longrightarrow \Gamma(U, \omega_X(nH)) \longrightarrow \Gamma(U, \omega_X(C + nH)) \longrightarrow \Gamma(U, \omega_C(nH)) \longrightarrow 0,$$

où U est un voisinage ouvert suffisamment petit de x.

Définition 6.1 – *Soit $\omega \in \Gamma(U, \omega_C(nH))$ et $x \in C \cap H$. On pose $\mathrm{Res}_x(\omega) = \mathrm{Res}_x(\tilde{\omega})$, où $\tilde{\omega}$ est un représentant de w dans $\Gamma(U, \omega_X(C + nH))$.*

Cette définition ne dépend pas du représentant. Par contre, il faut choisir des équations pour C et H. A condition de supposer n assez grand, pour que la suite analogue à celle ci-dessus soit exacte, on définit de même le résidu en un point $x \in C \cap H$ d'une section $\omega \in \Gamma(C, \omega_C(nH))$ par le résidu en x d'un représentant $\tilde{\omega} \in \Gamma(X, \omega_X(C+nH))$. Par définition même, on a le théorème des résidus *i.e.* si $\omega \in \Gamma(C, \omega_C(nH))$, on a $\sum_{x \in C \cap H} Res_x(\omega) = 0$.

(6.2) Quadriques. Soient E un espace vectoriel de dimension $2n$ sur $\mathbb{C}$ et $q : E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$ une forme bilinéaire symétrique qu'on suppose non-dégénérée. Un sous-espace vectoriel totalement q-isotrope $E' \subset E$ est dit totalement isotrope *maximal* si $\dim E' = n$. On aura besoin de la proposition suivante (voir par exemple [10]) :

Proposition 6.2 – *Soit S une variété connexe. Soit F un fibré vectoriel de rang $2n$, muni d'une forme quadratique non-dégénérée, et soient F', F'' deux sous-fibrés de E*

totalement isotropes maximaux. Considérons la fonction $\rho(s) = \dim F'_s \cap F''_s$ *(où l'intersection est prise dans* F_s*). Alors* $\rho \bmod 2$ *est constante et le fermé* $S_r = \{s \in S / \rho(s) \geq r\}$ *de* S *est soit vide, soit de codimension au plus* $\frac{(r-1)r}{2}$.

(6.3) La forme quadratique de Mumford associée à une thêta-caractéristique. Soit $(\mathcal{F}, \sigma)$ une thêta-caractéristique sur X de support schématique C et soit H une section hyperplane de X telle que $Z = C \cap H$ soit de dimension 0. Choisissons n suffisamment grand pour que l'on ait $H^0(\mathcal{F}(-n)) = 0$ et $H^1(\mathcal{F}(n)) = 0$. Posons $E = H^0(\mathcal{F}(n)/\mathcal{F}(-n))$, $E' = H^0(\mathcal{F}(n))$ et $E'' = H^0(\mathcal{F}/\mathcal{F}(-n))$. On a $H^0(\mathcal{F}) = E' \cap E''$, où l'intersection est prise dans E([16]). De plus, $\chi(\mathcal{F}(n)) = nd$, $\chi(\mathcal{F}(n)/\mathcal{F}(-n)) = 2nd$ et $\chi(\mathcal{F}/\mathcal{F}(-n)) = nd$. Les h^1 respectifs étant nuls, on obtient $\dim E = 2nd$, $\dim E' = nd$ et $\dim E'' = nd$. Munissons E d'une forme quadratique q : Choisissons pour cela des équations pour C et H et définissons $q : E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$ en associant à (τ, τ') le nombre $\sum_{x \in Z} \mathrm{Res}_x(\tau\tau')$, où l'on voit $\tau\tau'$ appartenant à $\Gamma(X, \omega_C(2nH)/\omega_C)$ comme section de $\omega_C(2nH)$, définie au voisinage de $x \in Z$.

Proposition 6.3 – *La forme quadratique ainsi définie est non-dégénérée. De plus,* E' *et* E'' *sont des sous-espaces totalement q-isotropes maximaux de* E.

Démonstration. Pour voir que q est non-dégénérée, il suffit de montrer, en $x \in Z$, qu'étant donné $0 \neq \tau \in \Gamma(U, \mathcal{F}(n)/\mathcal{F}(-n))$, il existe $\tau' \in \Gamma(U, \mathcal{F}(n)/\mathcal{F}(-n))$ tel que $\mathrm{Res}_x(\tau\tau') \neq 0$. Soit $0 \neq [t] \in \Gamma(U, \mathcal{F}(n)/\mathcal{F}(-n))$. Alors on a $t \in \Gamma(U, \mathcal{F}(n)) \backslash \Gamma(U, \mathcal{F}(-n))$. Comme $\mathcal{F}(n) \otimes \mathcal{F}(n) \longrightarrow \omega_C(2n)$ est non dégénérée, il existe $t' \in \Gamma(U, \mathcal{F}(n))$ tel que si $[s] = [t][t'] \in \Gamma(U, \omega_C(2n)/\omega_C)$ on a $[s]$ non nulle en x. En effet, la forme linéaire $\mathcal{F}(n) \longrightarrow \omega_C(2n)$ définie par t ne prend pas ses valeurs dans ω_C, car sinon on aurait $t \in \mathcal{F}(-n)$. Montrons qu'on peut choisir $[t']$ de manière à ce que $\mathrm{Res}_x(s) \neq 0$. Le morphisme $\mathcal{O}_U$-linéaire $\rho : \Gamma(U, \omega_X(C + 2nH)) \longrightarrow \Gamma(U, \omega_C(2nH))$ est surjective. On peut alors choisir ω tel que $\rho(\omega) = s$. La forme différentielle ω peut s'écrire

$$\omega = \frac{g}{f_1 f_2} dz_1 \wedge dz_2$$

avec $g \in \mathcal{O}(U)$ et f_1, f_2 des équations locales de C et $2nH$. Supposons que $\mathrm{Res}_x(\omega)$ soit nul ; deux cas sont alors possibles. Si le germe de g en x n'est pas dans l'idéal engendré par les germes de f_1, f_2 en x, il existe, par dualité locale, $h \in \mathcal{O}(U)$ tel que $\mathrm{Res}_x(h\omega) \neq 0$. Il suffit alors de remplacer $[t']$ par $[ht']$. Montrons que le cas où le germe de g en x est dans l'idéal est impossible. En effet, on aurait $g = \alpha f_1 + \beta f_2$, avec $\alpha, \beta \in \mathcal{O}(U)$ et par suite ($\mathcal{O}_{X,x}$ est factoriel)

$$\omega = \frac{\alpha}{f_2} dz_1 \wedge dz_2 + \frac{\beta}{f_1} dz_1 \wedge dz_2$$

Comme le premier facteur est dans $\Gamma(U, \omega_X(2nH))$, il est nul sous ρ. Le deuxième facteur, étant dans $\Gamma(U, \omega_X(C))$, est dans $\Gamma(U, \omega_C)$ sous ρ. Ceci donne $s \in \Gamma(U, \omega_C)$ et par suite $[s] = 0$, ce qui est une contradiction.

Le sous-espace vectoriel $E' \subset E$ est totalement q-isotrope. Ceci résulte du théorème des résidus car pour $\tau, \tau' \in E'$ on a $\tau\tau' \in \Gamma(C, \omega_C(2n))$. Le sous-espace vectoriel $E'' \subset E$ est totalement q-isotrope par régularité. $\square$

(6.4) Fin de la démonstration du théorème 0.3. Soient $s_0 \in S$ et $H \in |\mathcal{O}_X(1)|$ tels que $\dim(\mathrm{supp}_s(\Theta_{s_0}) \cap H) = 0$. On travaillera sur l'ouvert $U \subset S$ sur lequel on a $\dim(\mathrm{supp}_s(\Theta_s) \cap H) = 0$. Regardons, pour n suffisamment grand, les faisceaux suivants sur S : $F = pr_{1*}(\mathcal{F}(n)/\mathcal{F}(-n))$, $F' = pr_{1*}(\mathcal{F}(n))$ et $F'' = pr_{1*}(\mathcal{F}/\mathcal{F}(-n))$. D'après le théorème de changement de base, F, F' et F'' sont localement libres. Localement, on peut choisir une équation pour le support schématique de Θ_s, cas auquel on peut se ramener, la question étant locale sur la base. Le fibré F est donc, d'après la proposition 6.3, muni d'une forme quadratique non-dégénérée pour laquelle F' et F'' sont des sous-fibrés totalement isotropes maximaux. De plus, on a $\dim F'_s \cap F''_s = \dim H^0(X, \Theta_s)$. Avec la proposition 6.2 on obtient le théorème. $\square$

7. Critères de lissité, Etude locale

(7.1) Le schéma de Grothendieck $Groth_X(\mathbb{H}, P)$**.** Soit X une variété algébrique, $\mathbb{H}$ un $\mathcal{O}_X$-module et P un polynôme. Considérons le foncteur

$$\underline{Groth}_X(\mathbb{H}, P) : \text{ Variétés algébriques } \longrightarrow \text{ Ensembles}$$

qui associe à la variété algébrique S l'ensemble des $\mathcal{O}_{S\times X}$-modules cohérents quotients $\mathcal{G}$ de $\mathbb{H}_S$, S-plats, tels que, pour tout point fermé s de S, le polynôme de Hilbert du $\mathcal{O}_X$-module $\mathcal{G}_s$ soit P. D'après [9], le foncteur $\underline{Groth}_X(\mathbb{H}, P)$ est représentable par une variété algébrique projective qu'on notera $Groth_X(\mathbb{H}, P)$. On utilisera les résultats suivants (*cf.* [9],[12]) : Soit $\mathcal{G} = \mathbb{H}/\mathcal{E}$ un point fermé de $Groth_X(\mathbb{H}, P)$. Alors l'espace tangent de $Groth_X(\mathbb{H}, P)$ en $\mathcal{G}$ s'identifie à $\mathrm{Hom}(\mathcal{E}, \mathcal{G})$ et si $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}, \mathcal{G}) = 0$ alors $Groth_X(\mathbb{H}, P)$ est lisse au voisinage de $\mathcal{G}$.

(7.2) Le sous-schéma $Groth_X^{ss}(\mathbb{H}, P)$**.** Soit N un entier, H l'espace vectoriel $\mathbb{C}^{P(N)}$ et $\mathbb{H} = H \otimes \mathcal{O}_X(-N)$. Le groupe réductif $SL(H)$ opère sur $Groth_X(\mathbb{H}, P)$. Considérons, pour toute variété algébrique S, les couples $(\mathcal{F}, \alpha)$ où $\mathcal{F}$ est un $S \times X$-module, S-plat, et où α est un isomorphisme $\alpha : H \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}_S \xrightarrow{\sim} pr_{1*}(\mathcal{F}(N))$, tels que, pour tout $s \in S$, le $\mathcal{O}_X$-module $\mathcal{F}_s$ soit semi-stable, de polynôme de Hilbert P. Deux couples $(\mathcal{F}, \alpha)$, $(\mathcal{F}', \alpha')$ sont isomorphes s'il existe un isomorphisme $\phi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'$ tel que $\alpha' = \phi \circ \alpha$. Notons la classe d'isomorphisme d'un couple $(\mathcal{F}, \alpha)$ par $[\mathcal{F}, \alpha]$ et notons $Groth_X^{ss}(\mathbb{H}, P)(S)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de tels couples. On obtient un sous-foncteur $\underline{Groth}_X^{ss}(\mathbb{H}, P)$ de $\underline{Groth}_X(\mathbb{H}, P)$. Rappelons les résultats suivants de Simpson [21] : Il existe un entier N_0 tel que pour $N \geq N_0$ tout faisceau semi-stable de polynôme de Hilbert P soit représenté par un élément de $Groth_X^{ss}(\mathbb{H}, P)$. De plus, le sous-foncteur $\underline{Groth}_X^{ss}(\mathbb{H}, P)$ de $\underline{Groth}_X(\mathbb{H}, P)$ est un sous-foncteur ouvert, ce qui fait qu'il est représentable, et il existe un bon quotient $M_X(P) = Groth_X^{ss}(\mathbb{H}, P)/SL(H)$ sous l'action de $SL(H)$.

(7.3) Critère de lissité pour $Thêta_X^{ss}(d, N)$**.** Soit N_0 un entier suffisamment grand pour que les résultats de la section précédente soient vrais. Soit $N \geq N_0$. On va représenter

les foncteurs $\underline{Thêta}_X^{ss}(d,N)$ comme schéma des points fixes sous une involution i d'une variété algébrique R. Soit $P(n) = nd$.

Considérons, pour toute variété algébrique S, les triplets $(\mathcal{F}, \alpha, \beta)$ avec $(\mathcal{F}, \alpha)$ comme dans la définition du foncteur $\underline{Groth}_X^{ss}(\mathbb{H}, P)$ et β un isomorphisme $\beta : H \otimes \mathcal{O}_S \xrightarrow{\sim} pr_{1*}(\mathcal{F}^\vee(N))$. Deux triplets $(\mathcal{F}, \alpha, \beta)$ et $(\mathcal{F}', \alpha', \beta')$ sont isomorphes s'il existe $\phi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'$ tel que $\alpha' = \phi \circ \alpha$ et tel que $\beta' = ({}^\vee\phi)^{-1} \circ \beta$. Notons la classe d'isomorphisme d'un triplet $(\mathcal{F}, \alpha, \beta)$ par $[\mathcal{F}, \alpha, \beta]$ et notons $R(S)$ l'ensemble des classes d'isomorphisme de tels triplets. On obtient un foncteur qu'on note $\underline{R}$.

Lemme 7.1 – *Le foncteur $\underline{R}$ est représentable.*

Démonstration. Soit $\mathcal{U}$ le quotient universel sur $Groth_X^{ss}(\mathbb{H}, P) \times X$. Le faisceau $pr_{1*}(\mathcal{U}^\vee(N))$ est localement libre de fibre $\mathrm{H}^0(\mathcal{F}^\vee(N))$. Son fibré de repères R représente le foncteur $\underline{R}$. □

On a une involution i sur R, en associant au triplet $[\mathcal{F}, \alpha, \beta]$, le triplet $[\mathcal{F}^\vee, \beta, \alpha]$. Soit $Fix^i(R)$ le schéma des points fixes de R sous i. L'opération de $\mathbb{C}^*$ sur $Fix^i(R)$ qui associe au triplet $(\lambda, [\mathcal{F}, \alpha, \beta])$, le triplet $[\mathcal{F}, \alpha, \lambda\beta]$ est libre. Désignons par $\mathbb{P}Fix^i(R)$ le quotient de $Fix^i(R)$ par l'action de $\mathbb{C}^*$.

Proposition 7.2 – *On a un isomorphisme de foncteurs entre $\underline{Thêta}_X^{ss}(d,N)$ et le foncteur des points de $\mathbb{P}Fix^i(R)$ en associant au triplet $[\mathcal{F}, \alpha, [u]]$, le triplet $[\mathcal{F}, \alpha, [u \circ \alpha]]$.*

Démonstration. Vérifions tout d'abord que si $\tilde{u} \in [u]$ on a $[\mathcal{F}, \alpha, \tilde{u} \circ \alpha] = [\mathcal{F}^\vee, \tilde{u} \circ \alpha, \alpha]$. En effet, pour $\tilde{u} : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}^\vee$ la première condition est trivialement satisfaite. La condition $({}^\vee\tilde{u})^{-1} \circ (\tilde{u} \circ \alpha) = \alpha$ est satisfaite car on a $({}^\vee\tilde{u})^{-1} \circ \tilde{u} = Id$, étant donné que $\tilde{u}$ est symétrique. Montrons que φ est bien définie, *i.e.* ne dépend pas du choix du représentant. Si $[\mathcal{F}, \alpha, [u]] = [\mathcal{F}', \alpha', [u']]$ alors il existe $\phi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}'$ tel que $\alpha' = \phi \circ \alpha$ et il existe $\tilde{u} \in [u]$ et $\tilde{u}' \in [u']$ tel que $\tilde{u}' \circ \phi = ({}^\vee\phi)^{-1} \circ \tilde{u}$. On a alors $({}^\vee\phi)^{-1} \circ (\tilde{u} \circ \alpha) = (\tilde{u}' \circ \phi) \circ \alpha = (\tilde{u}' \circ \alpha')$. Finalement, soit $\upsilon : h_{\mathbb{P}Fix^i(R)} \longrightarrow \underline{Thêta}_X^{ss}(d,N)$ définie en associant à $[\mathcal{F}, \alpha, [\beta]]$ le triplet $[\mathcal{F}, \alpha, [\beta \circ \alpha^{-1}]]$. On vérifie de même que υ est bien définie et que l'on a $\varphi \circ \upsilon = \mathrm{id}$ et $\upsilon \circ \varphi = \mathrm{id}$, d'où la proposition. □

Corollaire 7.3 – *Le foncteur $\underline{Thêta}_X^{ss}(d,N)$ est représentable.*

Corollaire 7.4 – *Soit $[\mathcal{F}, \alpha, [\sigma]]$ un point fermé de $Thêta_X^{ss}(d,N)$, $\mathcal{E}$ le noyau de $\mathbb{H} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F} \to 0$. Si $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{E}, \mathcal{F}) = 0$, alors $Thêta_X^{ss}(d,N)$ est lisse au voisinage du point considéré.*

Démonstration. En général, si Z est régulier, le schéma des points fixes Z^G sous l'action d'un groupe réductif G est encore régulier [7]. Le corollaire résulte donc du critère de lissité pour les schémas de Grothendieck. □

(7.4) Le morphisme transposé. On verra plus loin que l'espace tangent de $M_X(P)$ en un point stable $\mathcal{F}$ s'identifie naturellement à $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{F}, \mathcal{F})$. Ceci est en analogie avec le cas des fibrés vectoriels. L'espace tangent à $\Theta_X(d)$ en un point $(\mathcal{F}, \sigma)$, avec $\mathcal{F}$ stable,

s'identifiera aux éléments de $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{F},\mathcal{F})$, anti-symétriques sous une involution naturelle, déduite de l'involution $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{F}^\vee$:

Si $K^\cdot$ est un complexe, on note $K^{\cdot\vee}$ le complexe défini en degré i par $(K^{-i})^\vee$, de différentielles évidentes et si $L^\cdot$ est un autre complexe, on note $\underline{\mathrm{Hom}}^\cdot(K^\cdot, L^\cdot)$ le complexe défini en degré i par $\underline{\mathrm{Hom}}^i(K^\cdot, L^\cdot) = \oplus_j \underline{\mathrm{Hom}}(K^j, L^{j+i})$ et de différentielles évidentes. Soient $E^\cdot$ et $F^\cdot$ deux complexes de $\mathcal{O}_X$-modules localement libres. On a un morphisme de complexes $\tau : \underline{\mathrm{Hom}}^\cdot(E^\cdot, F^\cdot) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}^\cdot(F^{\cdot\vee}, E^{\cdot\vee})$, en associant à $f \in \underline{\mathrm{Hom}}(E^j, F^{j+i})$ sa transposée, d'où

$$\tau : \mathbb{E}\mathrm{xt}^i(E^\cdot, F^\cdot) \longrightarrow \mathbb{E}\mathrm{xt}^i(F^{\cdot\vee}, E^{\cdot\vee}).$$

Si $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ sont deux $\mathcal{O}_X$-modules purs de dimension 1, $\mathcal{E}$ et $\mathcal{F}$ sont quasi-isomorphes à deux tels complexes $E^\cdot$ et $F^\cdot$ et, en outre, $\mathcal{E}^\vee$ et $\mathcal{F}^\vee$ sont quasi-isomorphes à $E^{\cdot\vee}$ et $F^{\cdot\vee}$. Par suite, on a un morphisme $\tau : \mathrm{Ext}^i(\mathcal{E},\mathcal{F}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^i(\mathcal{F}^\vee, \mathcal{E}^\vee)$, permettant de définir le "transposé" d'un élément $u \in \mathrm{Ext}^i(\mathcal{E},\mathcal{F})$. On notera $\mathrm{Ext}^i_{sym}(\mathcal{F},\mathcal{F}^\vee)$ (resp. $\mathrm{Ext}^i_{asym}(\mathcal{F},\mathcal{F}^\vee)$) le sous-espace vectoriel de $\mathrm{Ext}^i(\mathcal{F},\mathcal{F}^\vee)$ des éléments invariants (resp. anti-invariants) sous τ. Si $u \in \mathrm{Ext}^i(\mathcal{F},\mathcal{F}^\vee)$, on notera $\tau(u)$ par ${}^\vee u$. Soit $(\mathcal{F},\sigma)$ une thêta-caractéristique. En notant $Ext^1_{sym}(\mathcal{F},\mathcal{F})$, on suppose qu'on a identifié $\mathcal{F}$ avec $\mathcal{F}^\vee$ via σ.

(7.5) Une description de l'espace tangent à $Fix^i(R)$. Soit $P(n) = dn$. Considérons les morphismes f et g de $R \longrightarrow Groth^{ss}_X(\mathbb{H}, P)$ associant au triplet $[\mathcal{F},\alpha,\beta]$ le couple $[\mathcal{F},\alpha]$, respectivement au triplet $[\mathcal{F},\alpha,\beta]$ le couple $[\mathcal{F}^\vee,\beta]$. Si $[\mathcal{F},\alpha]$ est un point fermé de $Groth^{ss}_X(\mathbb{H}, P)$, $A' = \mathrm{Ker}(\mathbb{H} \longrightarrow \mathcal{F})$ et $A'' = \mathrm{Ker}(\mathbb{H} \longrightarrow \mathcal{F}^\vee)$, on désigne par $\delta' : \mathrm{Hom}(A',\mathcal{F}) \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{F},\mathcal{F})$ et $\delta'' : \mathrm{Hom}(A'',\mathcal{F}^\vee) \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{F}^\vee,\mathcal{F}^\vee)$ les morphismes de connexion associés et par

$$\delta : \mathrm{Hom}(A',\mathcal{F}) \oplus \mathrm{Hom}(A'',\mathcal{F}^\vee) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(\mathcal{F},\mathcal{F})$$

le morphisme défini en associant au couple (u,v) l'élément $\delta'(u) +^\vee \delta''(v)$.

Lemme 7.5 – *Soit $D = T(f \times g)$. Alors on a la suite exacte :*

$$0 \to \mathrm{Hom}(\mathcal{F},\mathcal{F}) \to \mathrm{T}_{[\mathcal{F},\alpha,\beta]}R \xrightarrow{D} \mathrm{Hom}(A',\mathcal{F}) \oplus \mathrm{Hom}(A'',\mathcal{F}^\vee) \xrightarrow{\delta} \mathrm{Ext}^1(\mathcal{F},\mathcal{F}) \to 0$$

et le diagramme des suites exactes suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0\to & \mathrm{Hom}(\mathcal{F},\mathcal{F}) & \to & \mathrm{T}_{[\mathcal{F},\alpha,\beta]}R & \xrightarrow{D} & \mathrm{Hom}(A',\mathcal{F}) \oplus \mathrm{Hom}(A'',\mathcal{F}^\vee) & \to & \mathrm{Ext}^1(\mathcal{F},\mathcal{F}) & \to 0 \\
 & \Big\downarrow f & & \Big\downarrow (w) & & \Big\downarrow (u,v) & & \Big\downarrow f & \\
 & & & \Big\downarrow \mathrm{T}i(w) & & \Big\downarrow (v,u) & & \Big\downarrow {}^\vee f & \\
0\to & \mathrm{Hom}(\mathcal{F}^\vee,\mathcal{F}^\vee) & \to & \mathrm{T}_{[\mathcal{F}^\vee,\beta,\alpha]}R & \xrightarrow{D} & \mathrm{Hom}(A'',\mathcal{F}^\vee) \oplus \mathrm{Hom}(A',\mathcal{F}) & \to & \mathrm{Ext}^1(\mathcal{F}^\vee,\mathcal{F}^\vee) & \to 0
\end{array}$$

En passant à la suite exacte des invariants sous l'involution on obtient :

Corollaire 7.6 – *Soit $[\mathcal{F},\alpha,\beta]$ un point fermé de $Fix^i(R)$. On a la suite exacte :*

$$0\to\mathrm{Hom}_{sym}(\mathcal{F},\mathcal{F})\to \mathrm{T}_{[\mathcal{F},\alpha,\beta]}Fix^i(R)\to\mathrm{Hom}(A,\mathcal{F})\to\mathrm{Ext}^1_{sym}(\mathcal{F},\mathcal{F})\to 0$$

Démonstration du lemme : La fibre de $f\times g$ au-dessus de $[\mathcal{F},\alpha],[\mathcal{F}^\vee,\beta]$ s'identifie aux automorphismes de $\mathcal{F}$. En effet, si $\chi\in\mathrm{Aut}(\mathcal{F})$ alors $[\mathcal{F},\alpha,\beta]$ et $[\mathcal{F},\chi\circ\alpha,\beta]$ ont même image, sans être le même point si $\chi\neq\mathrm{id}$. Réciproquement, si $[\mathcal{F},\alpha,\beta]$ et $[\mathcal{F}',\alpha',\beta']$ ont même image, il existe, par définition, des isomorphismes $\phi:\mathcal{F}\to\mathcal{F}'$ et $\psi:\mathcal{F}^\vee\longrightarrow\mathcal{F}'^\vee$ tels que $\alpha'=\phi\circ\alpha$ et $\beta'=\psi\circ\beta$, d'où l'automorphisme $\chi=^\vee\psi\circ\phi$. On vérifie que ceci donne l'identification voulue, d'où l'exactitude de

$$0\longrightarrow\mathrm{Hom}(\mathcal{F},\mathcal{F})\longrightarrow\mathrm{T}_{[\mathcal{F},\alpha,\beta]}R\longrightarrow\mathrm{Hom}(A',\mathcal{F})\oplus\mathrm{Hom}(A'',\mathcal{F}^\vee)$$

et on voit que le carré de gauche est commutatif. Evidemmement le carré du milieu est commutatif par définition de D, celui de droite est commutatif par définition de δ. Il reste donc à voir l'exactitude à droite dans la suite exacte. Considérons, pour cela, la suite exacte courte de complexes suivante :

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & & & & 0\\
 & & & & & & \downarrow\\
0 & \to & TR & & = & & TR \to 0\\
\downarrow & & \downarrow \mathrm{T}_{(f\times g)} & & & & \downarrow \mathrm{T}_f\\
0\to\mathrm{Hom}(A'',\mathcal{F}^\vee) & \to & \mathrm{Hom}(A'',\mathcal{F}^\vee)\oplus\mathrm{Hom}(A',\mathcal{F}) & \to & & & \mathrm{Hom}(A',\mathcal{F})\to 0\\
\downarrow \delta'' & & \downarrow \delta & & & & \downarrow\\
\mathrm{Ext}^1(\mathcal{F}^\vee,\mathcal{F}^\vee) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Ext}^1(\mathcal{F},\mathcal{F}) & & & & 0\\
\downarrow & & \downarrow & & & & \\
0 & & 0 & & & &
\end{array}$$

Le noyau de $\mathrm{T}f$ s'identifie à $\mathrm{End}(H)$ ($\simeq\mathrm{Hom}(\mathbb{H},\mathcal{F}^\vee)$) et l'application de ce noyau dans $\mathrm{Hom}(A'',\mathcal{F}^\vee)$ donnée par le diagramme s'identifie à l'application linéaire tangente à l'action de $GL(H)$ sur les couples $[\mathcal{F}^\vee,\beta]$. Cette application est donnée par la flèche naturelle $\mathrm{Hom}(\mathbb{H},\mathcal{F}^\vee)\longrightarrow\mathrm{Hom}(A'',\mathcal{F}^\vee)$ dont le conoyau est $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{F}^\vee,\mathcal{F}^\vee)$ via δ''. En déroulant maintenant la suite exacte longue, on voit que le complexe du milieu est exact. □

(7.6) L'espace tangent à $M_X(P)$. Rappelons l'identification de l'espace tangent de $M_X(P)$ en un point stable $\mathcal{F}$. Considérons le point fermé de $Groth^{ss}_X(\mathbb{H},P)$ donné par

$$0\longrightarrow A\longrightarrow\mathrm{H}\otimes\mathcal{O}_X(-N)\longrightarrow\mathcal{F}\longrightarrow 0.$$

En appliquant le foncteur $\mathrm{Hom}(\cdot,\mathcal{F})$, on obtient, par le choix de N, l'isomorphisme

$$\mathrm{Ext}^1(A,\mathcal{F})\xrightarrow{\sim}\mathrm{Ext}^2(\mathcal{F},\mathcal{F})$$

et la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{F},\mathcal{F}) \longrightarrow \mathrm{End}(H) \xrightarrow{\gamma} \mathrm{Hom}(A,\mathcal{F}) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1(\mathcal{F},\mathcal{F}) \longrightarrow 0.$$

Le stabilisateur $[\mathcal{F},\alpha]$ sous l'action de $GL(H)$ s'identifie à $\mathrm{Aut}(\mathcal{F})$. Par suite, sous l'action de $SL(H)$ le stabilisateur s'identifie à $\mathrm{Aut}(F)\cap SL(H)$ où l'intersection est prise dans $GL(H)$. En général, en un point stable on a $\mathrm{Hom}(\mathcal{F},\mathcal{F}) \simeq \mathbb{C}$. Il en résulte que le stabilisateur sous $SL(H)$ aux points stables s'identifie aux racines $P(N)$-ièmes de l'unité. On déduit, avec le théorème de slices étales de Luna [15], que $Groth^s_X(\mathbb{H},P)$ est un $PSL(H)$-fibré principal (au sens étale) sur $M^s_X(P)$. Comme pour les fibrés vectoriels, l'application induite par γ

$$\gamma : \mathrm{T}_e SL(H) = \mathrm{End}_0(H) \longrightarrow \mathrm{T}_{\mathcal{F}} Groth_X(\mathbb{H},P),$$

où $\mathrm{End}_0(H)$ désigne les endomorphismes de trace nulle, s'identifie à l'application linéaire tangente à l'action de $SL(H)$. Ceci démontre la proposition suivante :

Proposition 7.7 – *Si $Groth^s_X(\mathbb{H},P)$ est lisse, alors $M^s_X(P)$ est lisse aussi. En un point stable $[\mathcal{F}]$ l'espace tangent à $M_X(P)$ s'identifie à $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{F},\mathcal{F})$.*

(7.7) L'espace tangent à $\Theta_X(d)$. Soit $P(n) = nd$. On dira que le faisceau quadratique $(\mathcal{F},\sigma)$ est $\mathcal{O}-$*stable* si $\mathcal{F}$ est un faisceau stable. Notons $Th\hat{e}ta^{\mathcal{O}-s}_X(d,N)$ l'ouvert des thêta-caractéristiques $\mathcal{O}$-stables. Le stabilisateur du point fermé $[F,\alpha,[\sigma]]$ de $Th\hat{e}ta^{\mathcal{O}-s}_X(d,N)$ s'identifie encore aux racines $P(N)$-ièmes de l'unité. Par conséquent, par le théorème des slices étales de Luna, $Th\hat{e}ta^{\mathcal{O}-s}_X(d,N)$ est un $PSL(H)$-fibré principal (au sens étale) sur $\Theta^{\mathcal{O}-s}_X(d)$. D'après le corollaire 7.6, on a le plongement

$$Th\hat{e}ta^{\mathcal{O}-s}_X(d,N) \hookrightarrow Groth^s_X(\mathbb{H},P).$$

Soit $[F,\alpha,[\sigma]]$ un point fermé de $Th\hat{e}ta^{\mathcal{O}-s}_X(d,N)$. La factorisation

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \to & \mathrm{T}_{\mathcal{F}} Th\hat{e}ta^{\mathcal{O}-s}_X(d,N) & \to & \mathrm{T}_{\mathcal{F}} Groth^s_X(\mathbb{H},P) & \to & \mathrm{Ext}^1_{sym}(\mathcal{F},\mathcal{F}) & \to & 0 \\ & & & & \downarrow & \nearrow & & & \\ & & & & \mathrm{Ext}^1(\mathcal{F},\mathcal{F}) & & & & \end{array}$$

montre pour l'application linéaire tangente à l'action de $SL(H)$:

$$End_0(H) \longrightarrow \mathrm{T}_{\mathcal{F}} Th\hat{e}ta^{\mathcal{O}-s}_X(d,N) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{asym}(\mathcal{F},\mathcal{F}) \longrightarrow 0$$

Il en résulte la proposition suivante :

Proposition 7.8 – *Si $Th\hat{e}ta^{\mathcal{O}-s}_X(d,N)$ est lisse, alors $\Theta^{\mathcal{O}-s}_X(d)$ est lisse aussi. L'espace tangent à $\Theta^{\mathcal{O}-s}_X(d)$ en $[\mathcal{F},\sigma]$ s'identifie à $\mathrm{Ext}^1_{asym}(\mathcal{F},\mathcal{F})$.*

8. Thêta-caractéristiques sur le plan projectif

Dans ce qui suit, on supposera que $X = \mathbb{P}^2$. Avant de commencer la démonstration du théorème 0.5, discutons quelques points techniques concernant une résolution

$$(\star) \qquad 0 \longrightarrow A \xrightarrow{\alpha} B \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0.$$

où $B = H \otimes \mathcal{O}_X(-N)$ avec $H = \mathbb{C}^{dN}$. Soient $K^{\cdot}$ le complexe $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \to 0$ et $L^{\cdot}$ le complexe $0 \to B^\vee \xrightarrow{{}^\vee\alpha} A^\vee \to 0$.

Lemme 8.1 – *Il existe N_0 tel que, pour $N \geq N_0$, la suite spectrale*

$$E_2^{p,q} = \mathrm{H}^p(\mathrm{H}^q(\mathbb{P}^2, \underline{\mathrm{Hom}}^{\cdot}(K^{\cdot}, L^{\cdot}))) \implies \mathbb{E}\mathrm{xt}^{p+q}(K^{\cdot}, L^{\cdot}) = \mathrm{Ext}^{p+q}(\mathcal{F}, \mathcal{F}^\vee)$$

dégénère au niveau 2.

Démonstration. Pour $N \geq 1$ on a $\mathrm{Ext}^i(B, B^\vee) = 0$, $i \geq 1$. Choisissons N_0 tel que, pour $N \geq N_0$ on ait $H^i(\mathcal{F}^\vee(N-3)) = 0$, $i \geq 1$. Il reste à voir qu'on a également $\mathrm{Ext}^i(B, A^\vee) = \mathrm{Ext}^i(A, B^\vee) = 0$, $i \geq 1$. Mais ceci se voit en appliquant le foncteur $\mathrm{Hom}(B, \cdot)$ à la suite exacte $0 \to B^\vee \to A^\vee \to \mathcal{F}^\vee \to 0$, d'où le lemme. □

Corollaire 8.2 – *Il existe un entier N_0 tel que, pour $N \geq N_0$, le fibré $\underline{\mathrm{Hom}}(A, A^\vee)$ est engendré par ses section globales.*

Démonstration. En appliquant le même raisonnement aux complexes $K^{\cdot}$ et $L^{\cdot}(-i)$ on voit, par dégénérescence de la suite spectrale, que $\mathrm{H}^i(\underline{\mathrm{Hom}}(A, A^\vee)(-i)) = 0$, $i \geq 1$. Le faisceau $\underline{\mathrm{Hom}}(A, A^\vee)$ est donc 0-régulier et le corollaire est une conséquence du critère de Castelnuovo-Mumford. □

Corollaire 8.3 – *On a, si* $\mathrm{Hom}^{\cdot}(K^{\cdot}, L^{\cdot})$ *désigne le complexe des sections globales de* $\underline{\mathrm{Hom}}^{\cdot}(K^{\cdot}, L^{\cdot})$*, des isomorphismes canoniques* $\mathrm{H}^i(\mathrm{Hom}^{\cdot}(K^{\cdot}, L^{\cdot})) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^i(\mathcal{F}, \mathcal{F}^\vee)$, $i \geq 0$.

Corollaire 8.4 – *Soit $(\mathcal{F}, \sigma)$ une thêta-caractéristique. Alors il existe un relèvement $(\lambda^\vee, \lambda)$ de σ en un morphisme de complexes $K^{\cdot} \longrightarrow L^{\cdot}$ i.e. tel que le diagramme*

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & A & \xrightarrow{\alpha} & B & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{F} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow {}^\vee\lambda & & \downarrow \lambda & & \downarrow \sigma & & \\
0 & \longrightarrow & B^\vee & \xrightarrow{{}^\vee\alpha} & A^\vee & \xrightarrow{\gamma} & \mathcal{F}^\vee & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

soit commutatif.

Démonstration. Soit (μ, ν) un relèvement de σ et $\lambda = 1/2(\nu +^\vee \mu)$. Alors $({}^\vee\lambda, \lambda)$ convient. □

Dans toute la suite on supposera N_0 choisi de façon à ce que les résultats des sections précédentes et ceux ci-dessus soient vrais.

(8.1) La variété $\Theta_{\mathbb{P}^2}(d)$ n'a que des singularités rationnelles. Soit $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$-module semi-stable de dimension 1. Alors $\mathrm{Ext}^2(\mathcal{F},\mathcal{F}) = 0$. En effet, par dualité de Serre, on a $\mathrm{Ext}^2(\mathcal{F},\mathcal{F}) = \mathrm{Hom}(\mathcal{F},\mathcal{F}(-3))^*$ et ce dernier espace est nul par semi-stabilité de $\mathcal{F}$. La résolution de $\mathcal{F}$ montre que $\mathrm{Ext}^1(A,B) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^2(\mathcal{F},\mathcal{F})$. Il en résulte, par le critère de lissité 7.4, que $Thêta^{ss}_{\mathbb{P}^2}(d,N)$ est lisse. En général, si Y est une G-variété algébrique n'ayant que des singularités rationnelles telle que Y admet un bon quotient (Z,φ) sous l'action de G, alors Z n'a que des singularités rationnelles. C'est une conséquence d'un théorème de Boutot [3]. Ceci démontre l'assertion concernant les singularités rationnelles.

(8.2) Dimension de $\Theta_{\mathbb{P}^2}(d)$. On pose $\chi(\mathcal{F},\mathcal{F}^\vee) = \sum_i (-1)^i \dim \mathrm{Ext}^i(\mathcal{F},\mathcal{F}^\vee)$. On définit de façon analogue $\chi_{sym}(\mathcal{F},\mathcal{F}^\vee)$

Proposition 8.5 – *Soit $\mathcal{F}$ semi-stable de dimension 1, avec $\chi(\mathcal{F}) = 0$. Alors on a a) $\chi(\mathcal{F},\mathcal{F}^\vee) = -d^2$, b) $\chi_{sym}(\mathcal{F},\mathcal{F}^\vee) = -d(d-3)/2$ et c) $\chi_{asym}(\mathcal{F},\mathcal{F}^\vee) = -d(d+3)/2$.*

Démonstration. L'assertion *a*) résulte de la proposition 1.1 dans [6], *c*) résulte de a) et b). Reste à prouver l'assertion b). On sait que $\mathrm{Ext}^2(\mathcal{F},\mathcal{F}) = 0$. Considérons la résolution $(\star)$ de $\mathcal{F}$. D'après le lemme 8.1, la cohomologie du complexe suivant s'identifie en degré 0 à $\mathrm{Hom}(\mathcal{F},\mathcal{F}^\vee)$ et en degré 1 à $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{F},\mathcal{F}^\vee)$.

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \to \mathrm{Hom}(B,B^\vee) & \to & \mathrm{Hom}(A,B^\vee)\oplus\mathrm{Hom}(B,A^\vee) & \to & \mathrm{Hom}(A,A^\vee) & \to 0 \\
f & \mapsto & (f\circ\alpha,{}^\vee\alpha\circ f) & & & \\
 & & (g,h) & & \mapsto {}^\vee\alpha\circ g - h\circ\alpha &
\end{array}$$

Considérons l'involution de complexes suivante :

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \to \mathrm{Hom}(B,B^\vee) & \to & \mathrm{Hom}(A,B^\vee)\oplus\mathrm{Hom}(B,A^\vee) & \to & \mathrm{Hom}(A,A^\vee) & \to 0 \\
\downarrow f \downarrow {}^\vee f & & \downarrow (g,h) \downarrow ({}^\vee h,{}^\vee g) & & \downarrow f \downarrow -{}^\vee f & \\
0 \to \mathrm{Hom}(B,B^\vee) & \to & \mathrm{Hom}(A,B^\vee)\oplus\mathrm{Hom}(B,A^\vee) & \to & \mathrm{Hom}(A,A^\vee) & \to 0
\end{array}$$

La cohomologie du complexe des invariants s'identifie à $\mathrm{Hom}_{sym}(\mathcal{F},\mathcal{F}^\vee)$ en degré 0 et à $\mathrm{Ext}^1_{sym}(\mathcal{F},\mathcal{F}^\vee)$ en degré 1. Il en résulte, avec $\mathrm{H}^i(S^2B^*\otimes\omega_X) = 0$ et $\mathrm{H}^i(\Lambda^2A^*\otimes\omega_X) = 0$ pour $i \geq 1$, que $\chi_{sym}(\mathcal{F},\mathcal{F}^\vee) = \chi(B,A) - \chi(S^2B^*\otimes\omega_X) - \chi(\Lambda^2A^*\otimes\omega_X)$. On en déduit la proposition par un calcul (fastidieux) sur les classes de Chern. ∎

Par suite, si $(\mathcal{F},\sigma)$ est une thêta-caractéristique $\mathcal{O}$-stable, on a $\dim \mathrm{Ext}^1_{asym}(\mathcal{F},\mathcal{F}) = \frac{d(d+3)}{2}$. A l'aide du théorème 0.4 et du lemme suivant on voit que $\dim \Theta_{\mathbb{P}^2}(d) = \frac{d(d+3)}{2}$.

Lemme 8.6 – *Toute composante irréductible de $\Theta_{\mathbb{P}^2}(d)$ contient un point $\mathcal{O}$-stable.*

Démonstration. Procédons par récurrence sur d, le cas $d = 1$ étant évident. Supposons l'assertion vraie pour $n < d$ et montrons-la pour $n = d$: Toute composante irréductible de

$\Theta_{\mathbb{P}^2}(d)$ est de dimension au moins $d(d+3)/2$. En effet, si Θ' est une composante irréductible de $\Theta_{\mathbb{P}^2}(d)$, son image réciproque dans $Thêta^{ss}_{\mathbb{P}^2}(d,N)$ est connexe, $SL(H)$ étant connexe, et donc irréductible, $Thêta^{ss}_{\mathbb{P}^2}(d,N)$ étant lisse. D'après le corollaire 7.6, on a

$$\dim Thêta^{ss}_{\mathbb{P}^2}(d,N) = d(d+3)/2 + P(N)^2 - 1$$

, d'où l'assertion. Maintenant, si $(\mathcal{F},\sigma)$ est une thêta-caractéristique qui n'est pas $\mathcal{O}$-stable, alors, soit le gradué de $(\mathcal{F},\sigma)$ a au moins deux termes (si $(\mathcal{F},\sigma)$ n'est pas stable), soit $(\mathcal{F},\sigma)$ est somme directe d'au moins deux thêta-caractéristiques (*cf.* Proposition 1.4). Considérons pour $d = 1,\ldots,d-1$, les morphismes

$$\varphi_{d'} : \Theta_{\mathbb{P}^2}(d') \times \Theta_{\mathbb{P}^2}(d-d') \longrightarrow \Theta_{\mathbb{P}^2}(d),$$

définis en associant à deux thêta-caractéristiques leur somme directe. Par récurrence, l'image de $\varphi_{d'}$ est de dimension au plus $d'(d'+3)/2 + d''(d''+3)/2)$, avec $d'' = d - d'$. Par suite, dans toute composante irréductible se trouve bien un point $\mathcal{O}$-stable. ▯

(8.3) Les composantes irréductibles. Soit $\Lambda(d)$ l'ouvert des courbes lisses de degré d sur $\mathbb{P}^2$. Désignons par $\Theta^{\Lambda}_{\mathbb{P}^2}(d)$ l'image réciproque de $\Lambda(d)$ sous le morphisme σ_{Θ}. C'est une variété lisse de dimension $d(d+3)/2$.

Théorème 8.7 *–(Beauville [2]-Catanese) Soit $d \geq 4$. La variété $\Theta^{\Lambda}_{\mathbb{P}^2}(d)$ a, si d est pair, deux composantes irréductibles correspondant aux thêta-caractéristiques paires et impaires, et, si d est impair, trois composantes irréductibles disjointes correspondant aux thêta-caractéristiques paires, impaires et canoniques.*

Pour terminer la démonstration du théorème 0.5 il suffit donc de montrer que l'ouvert $\Theta^{\Lambda}_{\mathbb{P}^2}(d)$ de $\Theta_{\mathbb{P}^2}(d)$ est partout dense :

Densité des thêta-caractéristiques $\mathcal{O}$-stables et localement libres sur leur support :

Définition 8.8 – *On dit qu'un $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$-module $\mathcal{F}$ pur de dimension 1 est singulier en $a \in \mathbb{P}^2$, si l'on a l'inégalité* $\dim \mathcal{F}_a \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2,a}} \mathbb{C} \geq 2$.

Remarque 8.9 – La condition $\dim \mathcal{F}_a \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2,a}} \mathbb{C} = 1$ est équivalente à l'existence d'un voisinage ouvert $U \subset C = \mathrm{supp}_s(\mathcal{F})$ de a tel que $\mathcal{F}\,|_U \simeq \mathcal{O}_C\,|_U$.

Proposition 8.10 – *Les thêta-caractéristiques $\mathcal{O}$-stables, non-singulières en tout point $a \in \mathbb{P}^2$, forment un ouvert partout dense de $\Theta_{\mathbb{P}^2}(d)$.*

Démonstration. On notera, dans ce qui suit $Groth^{ss}_{\mathbb{P}^2}$ la variété $Groth^{ss}_{\mathbb{P}^2}(B,nd)$. On démontrera ce résultat de la manière suivante. D'abord, pour $a \in \mathbb{P}^2$ fixé, on montre que les quotients $\mathcal{F}$ dans $Groth^{ss}_{\mathbb{P}^2}$ qui sont singuliers en a forment un fermé, qu'on notera $\triangle_a$, de codimension au moins 4. Ensuite, on considérera le plongement $Thêta^{\mathcal{O}-s}_{\mathbb{P}^2}(d,N) \hookrightarrow$

$Groth^s_{\mathbb{P}^2}$ et on montrera que la trace de $\triangle_a$ est encore de codimension au moins trois dans $Thêta^{\mathcal{O}-s}_{\mathbb{P}^2}(d,N)$. Le fermé des thêta-caractéristiques singulières en au moins 1 point de $\mathbb{P}^2$ sera donc de codimension au moins 1 dans $Thêta^{\mathcal{O}-s}_{\mathbb{P}^2}(d,N)$.

Fixons un point $a \in \mathbb{P}^2$. Soit $\mathcal{U}$ le quotient universel sur $Groth^{ss}_{\mathbb{P}^2} \times \mathbb{P}^2$. On a une résolution

$$0 \longrightarrow \mathcal{A} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{U} \longrightarrow 0 \qquad (**)$$

avec $\mathcal{B} = H \otimes \mathcal{O}^{P(N)}_{Groth^{ss}_{\mathbb{P}^2} \times \mathbb{P}^2}(-N)$ et $\mathcal{A}$ localement libre sur $Groth^{ss}_{\mathbb{P}^2} \times \mathbb{P}^2$. Désignons par $A = \mathcal{A}_{\mathcal{F}}$ et $B = \mathcal{B}_{\mathcal{F}}$ les restrictions au quotient $\mathcal{F}$ de $Groth^{ss}_{\mathbb{P}^2}$. Par restriction de $(**)$ au point $a \in \mathbb{P}^2$, on obtient la suite exacte de $\mathcal{O}_{Groth^{ss}_{\mathbb{P}^2}}$-modules

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}(\alpha_a) \longrightarrow \mathcal{A}_a \xrightarrow{\alpha_a} \mathcal{B}_a \longrightarrow \mathrm{Coker}(\alpha_a) \longrightarrow 0$$

où $\mathrm{Coker}(\alpha_a) = \mathcal{U}_{|_{Groth^{ss}_{\mathbb{P}^2} \times \{a\}}}$ et $\mathrm{Ker}(\alpha_a) = \mathrm{Tor}_1(\mathcal{U}, Groth^{ss}_{\mathbb{P}^2} \times \{a\})$. Cette suite exacte induit, au-dessus d'un quotient $\mathcal{F}$ de $Groth^{ss}_{\mathbb{P}^2}$ la suite exacte d'espaces vectoriels, où $K_a = \mathrm{Ker}(\alpha_{a,\mathcal{F}})$ et $F_a = \mathcal{F}_a \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2,a}} \mathbb{C}$:

$$0 \longrightarrow K_a \longrightarrow A_a \xrightarrow{\alpha_{a,\mathcal{F}}} B_a \longrightarrow F_a \longrightarrow 0$$

Soit $\Delta_{a,\ell}$ la variété déterminantielle définie par $\dim \mathrm{Ker}(\alpha_a) \geq 2$.

On va rappeler quelques généralités sur les variétés déterminantielles : Soit S une variété algébrique lisse, $u : E \longrightarrow F$ un morphisme de fibrés vectoriels, $d = \mathrm{rang}\, E - \mathrm{rang}\, F$. On suppose $d \geq 0$. Considérons la variété déterminantielle Σ_ℓ définie par $\dim \mathrm{Ker}\, u_s \geq \ell$. Alors, en tout point fermé s de S tel que $\dim \mathrm{Ker}\, u_s = \ell$, la variété Σ_ℓ est lisse de codimension $\ell(\ell - d)$ en s si et seulement si le morphisme canonique $\varphi : \mathrm{T}_s S \longrightarrow L(\mathrm{Ker}\, u_s, \mathrm{Coker}\, u_s)$ est surjectif. Le morphisme φ est défini de la manière suivante. Soit $t \in \mathrm{T}_s S$ un vecteur tangent, *i.e.* un morphisme $t : Spec(D) \longrightarrow S$, où D est l'algèbre des nombres duaux, tel que $t(\cdot) = s$. Posons $E_D = t^*E$, $F_D = t^*F$ et considérons le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & 0 & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & E_s & \xrightarrow{u_s} & F_s & \xrightarrow{p} & \mathrm{Coker}\, u_s \longrightarrow 0 \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
 & & & & E_D & \xrightarrow{t^*(u)} & F_D & & \\
 & & & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{Ker}\, u_s & \xrightarrow{i} & E_s & \xrightarrow{u_s} & F_s & &
\end{array}$$

En choisissant un relèvement $E_s \longrightarrow E_D$ on déduit un morphisme $\tau : E_s \longrightarrow F_s$, indépendant du relèvement choisi. Alors $\varphi(t) = p \circ \tau \circ i$.

Considérons maintenant $\varphi : \mathrm{T}_{\mathcal{F}} Groth^{ss}_{\mathbb{P}^2} \longrightarrow L(K_a, F_a)$.

Lemme 8.11 – *Le morphisme $\varphi : \mathrm{Hom}(A, \mathcal{F}) \longrightarrow L(K, F_a)$ s'identifie au morphisme qui associe à $f : A \longrightarrow \mathcal{F}$, sa restriction $f_a : A_a \longrightarrow F_a$ et puis la restriction $f_a{}_{|K}$ à K_a. Le morphisme φ est surjectif.*

La première assertion résulte de l'identification de l'espace tangent de $Groth^{ss}_{\mathbb{P}^2}$ à $\mathrm{Hom}(A, \mathcal{F})$ et de la description ci-dessus. Montrons la surjectivité. Il suffit de montrer que $\underline{\mathrm{Hom}}(A, \mathcal{F})$ est engendré par ses sections. Par le critère de Castelnuovo, on pourra montrer que $\underline{\mathrm{Hom}}(A, \mathcal{F})$ est 0-régulier *i.e.* que $\mathrm{H}^i(\mathbb{P}^2, \underline{\mathrm{Hom}}(A, \mathcal{F})(-i)) = 0$ pour $i = 0, 1, 2$. Mais ceci se déduit, en appliquant le foncteur $\mathrm{Hom}(\cdot, \mathcal{F}(-i))$ à la résolution $(\star)$ de $\mathcal{F}$, du fait que $\mathrm{Ext}^2(\mathcal{F}, \mathcal{F}(-i)) = \mathrm{Hom}(\mathcal{F}(-i), \mathcal{F}(-3))^* = 0$, par semi-stabilité de $\mathcal{F}$. $\square$

Corollaire 8.12 – *La variété $\Delta_{2,a}$ est au moins de codimension 4 dans $Groth^{ss}_{\mathbb{P}^2}$, lisse en $\tilde{\Delta}_{2,a} = \{\mathcal{F} / \dim K_a = 2\}$*

Considérons le plongement $Thêta^{\mathcal{O}-s}_{\mathbb{P}^2}(d, N) \hookrightarrow Groth^{s}_{\mathbb{P}^2}$.

Proposition 8.13 – *La trace de $\triangle_{a,2}$ sur $Thêta^{\mathcal{O}-s}_{\mathbb{P}^2}(d, N)$ est au moins de codimension trois dans $Thêta^{\mathcal{O}-s}_{\mathbb{P}^2}(d, N)$.*

Démonstration. Soit $(\mathcal{F}, \sigma)$ une thêta-caractéristique $\mathcal{O}$-stable et considérons le diagramme commutatif des suites exactes suivant :

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & K_a & \xrightarrow{i} & A_a & \xrightarrow{\alpha_{a,\mathcal{F}}} & B_a & \xrightarrow{p} & F_a & \longrightarrow 0 \\
 & & \downarrow \sigma_a & & \downarrow {}^{\vee}\lambda_a & & \downarrow \lambda_a & & \downarrow \sigma_a & \\
0 & \longrightarrow & F_a^{\vee} & \xrightarrow{{}^{\vee}p} & B_a^{\vee} & \xrightarrow{{}^{\vee}\alpha_{a,\mathcal{F}}} & {}^{\vee}A_a & \xrightarrow{{}^{\vee}i} & {}^{\vee}K_a & \longrightarrow 0
\end{array}$$

où $({}^{\vee}\lambda, \lambda)$ est un relèvement du corollaire 8.4 induit par σ. La structure de thêta-caractéristique permet d'identifier F_a et $K_a^{\vee}$. On a le diagramme suivant avec colonne et ligne exacte :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 0 & & & & \\
 & & & & \downarrow & & & & \\
 & & & & \mathrm{T}_{\mathcal{F}} Thêta^{\mathcal{O}-s}_{\mathbb{P}^2}(d, N) & & & & \\
 & & & & \downarrow & & & & \\
0 & \longrightarrow & \mathrm{T}_{\mathcal{F}} \Delta_{2,a} & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(A, \mathcal{F}) & \longrightarrow & L(K_a, K_a^{\vee}) & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \downarrow & & & & \\
 & & & & \mathrm{Ext}^1_{sym}(\mathcal{F}, \mathcal{F}) & & & & \\
 & & & & \downarrow & & & & \\
 & & & & 0 & & & &
\end{array}$$

On va montrer que $\mathrm{T}_{\mathcal{F}}Th\hat{e}ta^{\mathcal{O}-s}_{\mathbb{P}^2}(d,N)$ s'envoie surjectivement sur $L_{sym}(K_a, K_a^\vee)$. Ceci démontrera la proposition : En effet on a $\dim K_a \geq 2$ ce qui montre que $\dim L_{sym}(K_a, K_a^\vee) \geq 3$, d'où $\mathrm{codim}(\mathrm{T}_{\mathcal{F}}\Delta_{2,a}, \mathrm{T}_{\mathcal{F}}Th\hat{e}ta^{s}_{\mathbb{P}^2}(d,N)) \geq 3$.

Soit $\psi : \mathrm{Sym}(A, A^\vee) \longrightarrow L_{sym}(K_a, K_a^\vee)$ défini en associant au morphisme symétrique h le morphisme symétrique ${}^\vee i \circ h_a \circ i$. Soit $\phi : \mathrm{Sym}(A, A^\vee) \longrightarrow \mathrm{Hom}(A, \mathcal{F})$ défini en associant au morphisme h le morphisme $\sigma^{-1} \circ \gamma \circ h$. Alors, par définition des flèches, le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} & & \mathrm{Sym}(A, A^\vee) \\ & \phi\swarrow & \downarrow \psi \\ \mathrm{Hom}(A, \mathcal{F}) & \xrightarrow{\varphi} & L_{sym}(K_a, K_a^\vee) \end{array}$$

Il suffira donc de montrer que le morphisme ψ est surjectif et que le morphisme ϕ se factorise à travers $\mathrm{T}_{\mathcal{F}}Th\hat{e}ta^{\mathcal{O}-s}_{\mathbb{P}^2}(d,N)$.

Lemme 8.14 – *Le morphisme ψ est surjectif.*

Démonstration. Soit $u \in L_{sym}(K_a, K_a^\vee)$. L'application $\sigma_a^{-1} \circ u$ se relève en une application $f_a \in L(A_a, F_a)$. De la suite exacte des faisceaux cohérents

$$0 \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(A, A) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(A, B) \longrightarrow \underline{\mathrm{Hom}}(A, F) \longrightarrow 0$$

on déduit l'existence de $g_a \in L(A_a, B_a)$ tel qu'on ait la factorisation $p \circ g_a = f_a$. Le diagramme suivant, avec $h_a = \lambda_a \circ g_a$, est commutatif :

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & K_a & \xrightarrow{i} & A_a & \xrightarrow{g_a} & B_a & \xrightarrow{p} & F_a & \longrightarrow 0 \\ & & & & & \searrow^{h_a} & \downarrow \lambda_a & & \downarrow \sigma_a & \\ & & & & & & A_a^\vee & \xrightarrow{{}^\vee i} & K_a^\vee & \longrightarrow 0 \end{array}$$

Par hypothèse, on a ${}^\vee({}^\vee i \circ h_a \circ i) =^\vee i \circ h_a \circ i$. D'après le corollaire 8.2, le faisceau $\underline{\mathrm{Hom}}(A, A^\vee)$ est engendré par ses sections globales. Par suite, h_a provient d'un morphisme $h' \in \mathrm{Hom}(A, A^\vee)$. Posons $h = 1/2(h' +^\vee h')$. Alors h est symétrique et $\psi(h) = u$, d'où le lemme. ▯

Lemme 8.15 – *Le morphisme ϕ se factorise à travers $\mathrm{T}_{\mathcal{F}}Th\hat{e}ta^{\mathcal{O}-s}_{\mathbb{P}^2}(d,N)$.*

Démonstration. Montrons que l'élément $\phi(h)$ est nul dans $\mathrm{Ext}^1_{sym}(\mathcal{F}, \mathcal{F})$. Définissons pour cela le morphisme $\chi : \mathrm{Hom}(A, A^\vee) \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{F}, \mathcal{F}^\vee)$ en associant au morphisme h l'élément $\tilde{\delta}(\gamma \circ h)$, où $\tilde{\delta}$ est le morphisme de connexion $\mathrm{Hom}(A, \mathcal{F}^\vee) \to \mathrm{Ext}^1(\mathcal{F}, \mathcal{F}^\vee)$. D'après la démonstration de la proposition 8.5 on a $\chi(h) == -\chi({}^\vee h)$. On déduit que $\delta(\phi(h)) = 0$ pour $h \in \mathrm{Sym}(A, A^\vee)$, δ étant le morphisme de la section 7.5. ▯

Montrons maintenant que l'ouvert des thêta-caractéristiques $\mathcal{O}$-stables et localement libres sur leurs supports schématiques, noté $\Theta^{loc}_{\mathbb{P}^2}(d)$, est partout dense :

Soit $\Delta = \{(\theta, a)/ \dim \theta \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2,a}} \mathbb{C} \geq 2\}$.

$$\begin{array}{ccccc} \Delta & \subset & Th\hat{e}ta^{\mathcal{O}s}_{\mathbb{P}^2}(d,N) \times \mathbb{P}^2 & \xrightarrow{pr_2} & \mathbb{P}^2 \\ & & {\scriptstyle pr_1}\downarrow & & \\ & & Th\hat{e}ta^{\mathcal{O}s}_{\mathbb{P}^2}(d,N) & & \end{array}$$

Au dessus de tout point $a \in \mathbb{P}^2$ la fibre est d'après le corollaire 8.13 au moins de codimension 3 dans $Th\hat{e}ta^{\mathcal{O}s}_{\mathbb{P}^2}(d,N)$. Par conséquent l'image de Δ est de codimension au moins 1 dans $Th\hat{e}ta^{\mathcal{O}s}_{\mathbb{P}^2}(d,N)$, $SL(H)$-invariant et son image dans $\Theta^{\mathcal{O}-s}_{\mathbb{P}^2}$ est donc de codimension au moins 1 dans $\Theta^{\mathcal{O}-s}_{\mathbb{P}^2}$. $\square$

Densité des thêta-caractéristiques dont le support schématique est lisse :

Le morphisme $\sigma_\Theta : \Theta_{\mathbb{P}^2}(d) \longrightarrow \mathcal{C}(d)$ qui associe à une thêta-caractéristique son support schématique est étale sur l'ouvert $\Theta^{loc}_{\mathbb{P}^2}(d)$. En effet, soit $(\mathcal{F}, \sigma)$ une thêta-caractéristique localement libre sur son support schématique. L'espace tangent à la fibre au-dessus de $C = \mathrm{supp}_s(\mathcal{F})$ en $(\mathcal{F}, \sigma)$ s'identifie à $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{O}_C, asym}(\mathcal{F}, \mathcal{F})$. Comme $\mathcal{F}$ est localement libre sur C, cet espace est nul. Par suite, l'application linéaire tangente à σ_Θ en ce point doit être un isomorphisme. Il en résulte en particulier, que σ_Θ est *plat* et par suite *ouvert* sur $\Theta^{loc}_{\mathbb{P}^2}(d)$. Cet ouvert étant partout dense, on déduit que l'ouvert $\Theta^{\Lambda}_{\mathbb{P}^2}(d)$ est partout dense, ce qui termine la démonstration du théorème 0.5.

Les composantes irréductibles sont disjointes :

Evidemment les composantes des thêta-caractéristiques paires et impaires ne se rencontrent pas. Soit donc d impair et considérons la composante des thêta-caractéristiques canoniques. Cette composante est lisse. En effet, et plus précisement, toute thêta-caractéristique canonique est $\mathcal{O}$-stable, comme l'affirme le lemme suivant, qui serait faux par exemple sur l'éclaté de $\mathbb{P}^2$ en un point.

Lemme 8.16 – *Soit $C \in |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d)|$. Alors $\mathcal{O}_C$ est un $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$-module stable.*

Démonstration. On raisonne par récurrence sur le degré, le cas $d = 1$ étant évident. Supposons le résultat vrai pour $n \leq d$ et montrons-le pour $n = d + 1$. Si $\mathcal{O}_C$ est un $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$-module non-stable alors il existe un quotient $\mathcal{O}_C \xrightarrow{p} \mathcal{E} \longrightarrow 0$ avec $\mathcal{E}$ semi-stable de degré $d(\mathcal{E}) < d + 1$ et tel que $\mu(\mathcal{E}) \leq \mu(\mathcal{O}_C)$. Soit $D = \mathrm{supp}_s(\mathcal{E})$. Le morphisme p induit un morphisme non nul $\mathcal{O}_D \xrightarrow{p} \mathcal{E}$. Comme $\mathcal{O}_D$ est (semi)-stable par hypothèse on a $\mu(\mathcal{E}) \geq \mu(\mathcal{O}_D)$. Mais, en général, pour $C \in |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(d)|$ on a $\mu(\mathcal{O}_C) = \frac{1-g(C)}{d} = \frac{-d+3}{2}$. La fonction $d \mapsto \frac{-d+3}{2}$ maintenant est strictement décroissante d'où $\mu(\mathcal{O}_C) < \mu(\mathcal{O}_D)$, ce qui est une contradiction. $\square$

Références :

[1] M. F. Atiyah. Riemann Surfaces and Spin Structures, Ann. scient. Ec. Norm. Sup. 4e **série, t.4** (1971) 47-62

[2] A. Beauville. Le groupe de monodromie des familles universelles d'hypersurfaces et d'intersections complètes, Lecture Notes in Math. **1194** (1986) 8-18

[3] J. F. Boutot. Singularités rationnelles et quotients par les groupes réductifs, Invent. math. **88** (1987) 65-68

[4] F. Catanese. Babbages conjecture, contact of surfaces, symmetric determinantal varieties and applications, Invent. Math. **63** (1981) 433-465

[5] J. M. Drezet. Fibrés exceptionnels et variétés de modules de faisceaux semi-stables sur $\mathbb{P}^2$., J. für die reine u. angew. Math. **380** (1987) 14-58

[6] J. M. Drezet et J. Le Potier. Fibrés stables et fibrés exeptionnels sur le plan projectif, Ann. scient. Ec. Norm. Sup. 4e **série, t.18** (1985) 193-244

[7] F. Fogarty. Fixed point schemes, Amer. J. Math. **95** (1973) 35-51

[8] P. Griffiths et J. Harris. Principles of Algebraic Geometry, *Wiley Interscience, New-York* (1977)

[9] A. Grothendieck. Techniques de construction et théorèmes d'existence en géométrie algebrique, IV : les schémas de Hilbert, Sém. Bourbaki **221** (1960)

[10] J. Harris. Theta-characteristics on Algebraic Curves, Trans. Amer. Math. Soc. **271** (1982) 611-638

[11] K. Hulek. On the classification of stable rank r bundles over the projective plane, "Vector bundles and differential operators", Progress in Mathematics 7 (Birkhäuser) (1985) 113-144

[12] L. Illusie. Complexe cotangent et déformations I, *Lecture Notes in Math. 239,* Springer Verlag (1971)

[13] Y. Laszlo. Théorème de Torelli générique pour les intersections complètes de trois quadriques de dimension paire, Invent. Math. **98** (1989) 247-264

[14] J. Le Potier. Fibrés stables sur le plan projectif et quartiques de Lüroth, Exposé donné à Jussieu (1989)

[15] D. Luna. Slices étales, Bull. Soc. Math. France **Mémoire 33** (1973) 81-105

[16] D. Mumford. Theta-characteristics of an Algebraic Curve, Ann. scient. Ec. Norm. Sup. 4e **série, t4** (1971) 181-192

[17] D. Mumford et J. Fogarty. Geometric Invariant Theory, *Springer Verlag,* (1982)

[18] C. Peskine. Introduction algébrique à la géométrie projective, Cours de DEA. 1990, Université Paris VI

[19] A. Ramanathan. Stable Principal Bundles on a Compact Riemann Surface, Math. Annalen **213** (1975) 129-152

[20] C. S. Seshadri. Geometric Reductivity over Arbitrary Base, Adv. in Math. **26** (1977) 225-274

[21] C. T. Simpson. Moduli of Representations of the Fundamental Group of a Smooth Variety, Preprint, Princeton University

[22] C. T. C. Wall. Nets of Quadrics and Theta-characteristics of Singular Curves, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **81** (1977) 351-364

Christoph Sorger
UFR de Mathématiques et U.R.A. 212
Université de Paris VII, 2, place Jussieu
F-75251 PARIS CEDEX 05
E-mail : sorger@mathp7.jussieu.fr