

Habilitation

Friedrich Wagemann
Université de Nantes

9 novembre 2007

Résumé

Ceci est un survol des résultats constituant ma thèse d'habilitation.
La base de l'habilitation repose sur les articles suivants :

Articles constituant la thèse d'habilitation

- [30] F. Wagemann, Some Remarks on the Cohomology of Krichever-Novikov Algebras. *Lett. Math. Phys.* **47** (1999) 173–177
- [31] F. Wagemann, Differential Graded Cohomology and Lie Algebras of Holomorphic Vector Fields. *Comm. Math. Phys.* **208** (1999) 521–540
- [32] F. Wagemann, A Two Dimensional Analogue of the Virasoro Algebra. *J. Geom. Phys.* **36** (2000) 103–116
- [33] F. Wagemann, A Crossed Module representing the Godbillon-Vey Cocycle. *Lett. Math. Phys.* **51** (2000) 293–299
- [34] F. Wagemann, Explicit Formulae for Cocycles of Holomorphic Vector fields with values in λ -Densities. *J. Lie Theory*, Vol. **11**, 1 (2001) 173–184
- [8] A. Frabetti, F. Wagemann, On the Leibniz cohomology of vector fields. *Ann. Global Anal. Geom.* **21**, No. 2 (2002) 177–190
- [23] K.-H. Neeb, F. Wagemann, Universal central extension of holomorphic current algebras. *Manuscripta Math.* **112** (2003) 441–458
- [35] F. Wagemann, On Lie algebra crossed modules. *Comm. Algebra* **34** (2006) no. 5, 1699–1722 (math.KT/0611375)
- [24] K.-H. Neeb, F. Wagemann, The second cohomology of current algebras of general Lie algebras. accepté au *Canadian J. of Math.*
- [17] C. Laurent-Gengoux, F. Wagemann, Obstruction classes of crossed modules of Lie algebroid and Lie groupoids linked to existence of principal bundles, math.AT/0611226, soumis
- [7] A. Fialowski, F. Wagemann, Cohomology and deformations of the infinite dimensional filiform Lie algebra \mathfrak{m}_0 . math.RT/070338, accepté au *J. of Algebra*
- [25] K.-H. Neeb, F. Wagemann, Lie group structures on groups of smooth and holomorphic maps on non-compact manifolds. math.DG/0703460, soumis
- [36] F. Wagemann, Deformations of Lie algebras arising from deformations of schemes, <http://arxiv.org/abs/0707.4054>, accepté au *J. of Geo. Phys.*

Introduction

La direction principale de mes recherches est la théorie des algèbres de Lie de dimension infinie d'un point de vue homologique. Une idée clé en manipulant des algèbres de Lie de dimension infinie est de les munir d'une topologie naturelle afin d'apprivoiser la théorie. Par exemple, soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie topologique et \mathfrak{m} une algèbre de Lie topologique abélienne, et considérons les classes d'équivalence de suites exactes

$$0 \rightarrow \mathfrak{m} \rightarrow \mathfrak{e} \rightarrow \mathfrak{g} \rightarrow 0. \quad (1)$$

Ici, l'exactitude de la suite est entendue comme exactitude d'une suite d'algèbres de Lie discrètes. Du point de vue des algèbres de Lie topologiques, il y a donc des extensions non triviales qui ne sont que des extensions d'espaces vectoriels topologiques (au cas où \mathfrak{g} et \mathfrak{m} sont effectivement de dimension infinie), il y a des extensions d'algèbres de Lie topologiques qui sont scindées en tant que suite d'espaces vectoriels topologiques, et il y a des extensions qui mélangent les deux phénomènes. Afin d'exclure le premier type d'extensions et de se concentrer sur le deuxième, on se restreint à des extensions qui sont topologiquement scindées. Cette restriction se reflète au niveau des cochaînes en ne considérant que des *cochaînes continues*. En effet, en prenant un scindage de (1), on peut écrire $\mathfrak{e} = \mathfrak{g} \oplus \mathfrak{m}$ en tant qu'espaces vectoriels topologiques, et le crochet devient alors

$$[(x, a), (y, b)] = ([x, y], -x \cdot b + y \cdot a + \alpha(x, y)).$$

La continuité du crochet et de la section $\sigma : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{e}$ impliquent que $\alpha : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{m}$ est un 2-cocycle *continu* sur \mathfrak{g} à valeurs dans \mathfrak{m} .

Comme illustré dans le paragraphe précédent, l'analyse fonctionnelle entre dans notre étude d'une façon assez algébrique. En fait, nous sommes amenés à travailler avec des espaces vectoriels topologiques de Fréchet, puisque beaucoup d'algèbres de Lie de dimension infinie apparaissent comme espaces de sections d'un fibré vectoriel sur une variété.

Les algèbres de Lie auxquelles nous nous intéressons sont des algèbres de Lie de champs de vecteurs sur une variété ou des produits tensoriels $A \otimes_{\mathbb{K}} \mathfrak{k}$ d'une \mathbb{K} -algèbre de Lie \mathfrak{k} par une \mathbb{K} -algèbre associative commutative unitaire A ; le produit tensoriel est ensuite regardé comme \mathbb{K} -algèbre de Lie. On appellera ces algèbres de Lie *algèbres de courants*.

Dans la première section, je regroupe mes recherches sur la cohomologie continue des algèbres de Lie de champs de vecteurs, qu'on appelle aussi *cohomologie de Gelfand-Fuks*. La différence avec la cohomologie discrète ou algébrique est que les cochaînes sont supposées être continues par rapport à une topologie fixée sur l'algèbre de Lie et sur le module. Je crois que malgré le fait que ce sujet existe depuis plus de trente ans et que la question fondamentale, à savoir la conjecture de Bott, a été résolue il y a trente ans, il reste des questions ouvertes. Par exemple, celles sur des critères clairs pour la dégénérescence des suites spectrales de Gelfand-Fuks, le calcul explicite d'exemples, des formules explicites pour les cocycles, ou des résultats analogues pour des cohomologies

différentes comme par exemple la *cohomologie de Leibniz*. De plus, je pense que le sujet n'est pas bien illustré dans des livres; par exemple, aucun livre sur le sujet n'explique comment l'annulation des classes de Pontryagin de la variété facilite le calcul, bien que ceci soit bien connu des experts du sujet. Des modèles, au sens de la théorie d'homotopie rationnelle, existent pour la cohomologie de Gelfand-Fuks, mais dans aucun livre, on n'explique comment les calculer explicitement, à partir d'exemples concrets comme dans [6].

Dans la première section, j'applique des méthodes et outils connus en théorie de Gelfand-Fuks à d'autres algèbres de Lie ou à d'autres cohomologies, et cela pour illustrer l'universalité des outils en vue d'obtenir de nouveaux résultats (sections 1.1, 1.2 and 1.4). La section 1.5 contient une discussion des limites de la théorie de Gelfand-Fuks pour des algèbres de Lie de dimension infinie purement algébriques. En effet, toute topologie sur l'algèbre de Lie des dérivations de l'algèbre des polynômes de Laurent $\mathbb{K}[X, X^{-1}]$ semble artificielle, mais nous ne connaissons pas de calcul de la *cohomologie algébrique* de cette algèbre de Lie. Or, sa cohomologie continue munie de la topologie de sous-algèbre de Lie de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs différentiables sur le cercle est bien connue.

La deuxième section part d'un esprit plus homologique. Nous discutons l'interprétation de la 3-cohomologie d'une algèbre de Lie en tant que (classes d'équivalence) de *modules croisés*. Un module croisé est un homomorphisme d'algèbres de Lie $\mu : \mathfrak{m} \rightarrow \mathfrak{n}$ avec une action compatible de \mathfrak{n} sur \mathfrak{m} par dérivations. Mon point de vue est qu'on peut assez facilement construire de tels modules croisés pour des classes de cohomologie données. Cette construction permet de mieux comprendre leur lien avec d'autres classes. Le point de vue plus traditionnel est de voir des modules croisés comme obstructions contre l'existence d'extensions. La géométrie entre en scène quand ce cadre algébrique est appliqué à des algébroides de Lie et des groupoides de Lie. C'est à travers ces objets que les classes d'obstruction de Neeb dans [22] sont liées à des gerbes sur la variété. La compréhension approfondie de la relation entre des modules croisés de groupoides de Lie et des gerbes est le sujet du prochain projet dans notre collaboration avec Karl-Hermann Neeb.

Dans la troisième section, nous étudions l'algèbre homologique et la théorie de Lie des *algèbres de courants holomorphes*, i.e. des algèbres de Lie qui sont espaces de sections holomorphes de fibrés triviaux en algèbres de Lie sur des variétés complexes. Plus précisément, nous déterminons leurs extensions centrales universelles dans le cas où l'algèbre de Lie fibre est simple, nous calculons la deuxième cohomologie continue pour une algèbre fibre quelconque, et nous adressons la question de savoir si le groupe topologique des applications holomorphes d'une variété complexe à valeurs dans un groupe de Lie porte une structure de groupe de Lie Fréchet.

La dernière section est vouée aux déformations d'algèbres de Lie de dimension infinie. Nous discutons d'abord un lien entre déformations d'algèbres de Krichever-Novikov avec le champ algébrique des modules des courbes. Notre point de vue est que ce lien se comprend facilement en introduisant un *champ des déformations* d'algèbres de Lie. Nous montrons que le champ des modules

admet un morphisme naturel dans le champ des déformations. Il s'avère que ce morphisme est presque un monomorphisme, grâce à la théorie de Pursell-Shanks qui caractérise une variété par son algèbre de Lie des champs de vecteurs. Ensuite, nous discutons les déformations d'une algèbre de Lie définie par générateurs et relations. Le phénomène nouveau intéressant est que, malgré le fait que la cohomologie adjointe est de dimension infinie, il n'y a qu'un nombre fini de vraies déformations, i.e. de déformations non obstruites.

Pour fournir des renseignements supplémentaires autour des notions principales de notre texte, nous avons inclus des appendices sur la cohomologie de Gelfand-Fuks, certains sujets d'algèbre homologique et sur des variétés de dimension infinie.

1 Cohomologie d'algèbres de Lie de champs de vecteurs

Il s'agit dans cette section de *cohomologie de Gelfand-Fuks*, i.e. de la cohomologie de l'algèbre de Lie topologique $\text{Vect}(M)$ des champs de vecteurs lisses sur une variété différentiable M et de certaines algèbres de Lie associées à une variété complexe X . Dans tous les cas, ces algèbres de Lie seront des algèbres de Lie topologiques de Fréchet¹ par rapport à la topologie naturelle de Fréchet sur l'espace des sections d'un fibré vectoriel (holomorphe) sur une variété lisse M (resp. complexe X).

Les algèbres de Lie qu'on rencontrera dans le contexte holomorphe seront l'algèbre de Lie des champs de vecteurs holomorphes $\text{Hol}(X)$ sur X , l'algèbre de Lie $\text{Vect}_{1,0}(X)$ des champs \mathcal{C}^∞ de type $(1,0)$ (i.e. les champs qui sont localement de la forme

$$\sum_{i=1}^n f(z_1, \dots, z_n, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n) \frac{\partial}{\partial z_i})$$

et les algèbres de Lie $\text{Mer}_k(X)$ de champs méromorphes sur X à pôles possibles dans k points fixés. Le nombre de pôles d'un élément de $\text{Mer}_k(X)$ peut être strictement plus petit que k , ou même zéro. Dans le cas où $X = \Sigma$ est une surface de Riemann compacte, les $\text{Mer}_k(X)$ sont appelées *algèbres de Krichever-Novikov*. Le crochet sur toutes ces algèbres de Lie est hérité du crochet sur l'algèbre de Lie $\text{Vect}(X)$ de tous les champs \mathcal{C}^∞ sur X (resp. de l'algèbre de Lie $\text{Vect}(X \setminus \{p_1, \dots, p_k\})$ des champs \mathcal{C}^∞ sur $X \setminus \{p_1, \dots, p_k\}$ pour les points fixés p_1, \dots, p_k s'il s'agit de $\text{Mer}_k(X)$).

Finalement, on aura besoin de l'algèbre de Lie W_n des champs de vecteurs formels en n variables formelles complexes. En tant qu'espace vectoriel, $W_n = \prod_{i=1}^n \mathbb{C}[[x_1, \dots, x_n]] \frac{\partial}{\partial x_i}$. La topologie sur l'espace de séries formelles $\mathbb{C}[[x_1, \dots, x_n]]$ est la topologie de la convergence simple des coefficients. Cette

¹Un espace vectoriel topologique réel (ou complexe) est de Fréchet s'il est complet, métrisable et localement convexe. Il est donc homéomorphe à un sous-espace d'un produit infini dénombrable de \mathbb{R} (ou \mathbb{C}) muni de la métrique $d(x, y) = \sum_k \frac{2^{-k} |x_k - y_k|}{1 + |x_k - y_k|}$.

topologie se décrit aussi en tant que celle de la limite inverse, où tous les quotients de dimension finie portent la topologie usuelle. Le crochet est donné par

$$\left[\sum_{i=1}^n f_i(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_i}, \sum_{j=1}^n g_j(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_j} \right] = \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^n f_i \frac{\partial g_j}{\partial x_i} - g_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right) \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

La cohomologie d'une algèbre de Lie topologique est calculée comme usuellement par un complexe de cochaînes. Nous avons essayé de trouver une approche par des foncteurs dérivés pour définir cette cohomologie topologique, mais nous n'avons pas réussi. Soit \mathfrak{g} une des algèbres de Lie $\text{Vect}(M)$, $\text{Hol}(X)$, $\text{Vect}_{1,0}(X)$, $\text{Mer}_k(X)$ ou W_n . $C^p(\mathfrak{g}; \mathbb{C}) := \text{Hom}_{\mathbb{C}\text{-cont}}(\Lambda^p \mathfrak{g}, \mathbb{C})$ l'espace des applications multilinéaires alternées continues de \mathfrak{g} vers \mathbb{C} ; c'est l'espace des p -cochaînes en cohomologie de Gelfand-Fuks. Les produits tensoriels qui interviennent dans $\Lambda^p \mathfrak{g}$ sont toujours munis de la topologie du *produit tensoriel projectif* \otimes_π (par rapport à la topologie de Fréchet sur \mathfrak{g}). C'est la topologie caractérisée par la propriété que pour tout espace localement convexe E et toute application bilinéaire $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow E$, il existe une unique application continue $\mathfrak{g} \otimes_\pi \mathfrak{g} \rightarrow E$, voir [30] §43. Rien ne change pour le cadre holomorphe. La différentielle

$$dc(X_1, \dots, X_{p+1}) = \sum_{i < j} (-1)^{i+j} c([X_i, X_j], X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_{p+1}),$$

définie ici pour une p -cochaîne c , rend la collection des $C^p(\mathfrak{g}; \mathbb{C})$ s un complexe de cochaînes, dont la cohomologie, notée $H^*(\mathfrak{g}; \mathbb{C})$, est par définition la *cohomologie de Gelfand-Fuks* de \mathfrak{g} .

Le calcul de $H^*(\text{Vect}(M); \mathbb{C})$ pour une variété M donnée a été l'objet de plusieurs méthodes. On va esquisser deux d'entre elles dans la sous-section suivante. Une troisième méthode fait intervenir un modèle pour l'algèbre des cochaînes dans le sens de la théorie d'homotopie rationnelle, et a été inventée par Haefliger. Nous l'avons discuté dans le groupe de travail Angers-Nantes de théorie d'homotopie. Cette discussion m'amène à croire que l'approche de Haefliger peut être formulé aussi pour les algèbres de Lie de champs de vecteurs holomorphes.

1.1 La suite spectrale de Gelfand-Fuks

La suite spectrale de Gelfand-Fuks est un système de deux suites spectrales, l'une imbriquée dans l'autre. Elle provient d'un système de deux filtrations imbriquées du complexe $(C^q(\text{Vect}(M); \mathbb{C}), d)$, dont les éléments sont vus comme sections généralisées d'un certain fibré vectoriel. D'abord, on filtre par le *support* de la section généralisée, ensuite, pour un support fixé, par *l'ordre* de la section généralisée.

Plus précisément, soit $\otimes^q TM := \otimes_{i=1}^q \text{pr}_i^*(TM)$ le fibré vectoriel produit tensoriel des tirés-en-arrière $\text{pr}_i^*(TM)$ du fibré tangent TM de M par la i -ème projection $\text{pr}_i : M^q \rightarrow M$. Il est clair comment antisymétriser $\otimes^q TM$ pour que une cochaîne $c \in C^q(\text{Vect}(M); \mathbb{C})$ puisse être vu comme une *section généralisée*,

i.e. un élément du dual continu de l'espace des sections. Soit maintenant M_k^q défini par

$$M_k^q := \{(x_1, \dots, x_q) \in M^q \mid \forall \{i_1, \dots, i_{k+1}\} \subset \{1, \dots, q\} : \exists j, l : x_{i_j} = x_{i_l}\}.$$

Cette filtration de M^q donne lieu à une filtration sur $(C^p(\text{Vect}(M); \mathbb{C}), d)$ en posant $c \in C_k^q(\text{Vect}(M); \mathbb{C})$ si la section c est *concentrée sur M_k^q* , i.e. $c(s) = 0$ pour toutes les sections s avec $\text{supp}(s) \subset M^q \setminus M_k^q$. On a donc une filtration finie

$$0 = C_0^q(\text{Vect}(M); \mathbb{C}) \subset C_1^q(\text{Vect}(M); \mathbb{C}) \subset \dots \subset C_q^q(\text{Vect}(M); \mathbb{C}) = C^q(\text{Vect}(M); \mathbb{C}).$$

M_1^q est simplement la diagonale $\Delta \subset M^q$; c'est pour cela que la filtration est des fois appelée *filtration diagonale*. $(C_1^q(\text{Vect}(M); \mathbb{C}), d)$ est même un sous-complexe, le *sous-complexe diagonal* et noté $C_\Delta^q(\text{Vect}(M); \mathbb{C})$. On notera $H_\Delta^*(\text{Vect}(M); \mathbb{C})$ la cohomologie du sous-complexe diagonal.

La suite spectrale correspondante a comme terme E_0

$$\tilde{E}_0^{k, *-k} = C_k^q(\text{Vect}(M); \mathbb{C}) / C_{k-1}^q(\text{Vect}(M); \mathbb{C}).$$

Le côté droit définit un complexe quotient dont la cohomologie est calculé par une autre suite spectrale, à savoir celle associée à la *filtration d'ordre*. Nous allons nous restreindre au sous-complexe diagonal dans la suite.

Une section généralisée $c \in C^q(\text{Vect}(M); \mathbb{C})$, concentrée sur $E \subset M^q$ est appelée *d'ordre $o(c) \leq l$* si $c(s) = 0$ pour toute section s dont le l -jet sur E est trivial. On définit par suite

$$F^m C_1^q(\text{Vect}(M); \mathbb{C}) = \{c \in C^q(\text{Vect}(M); \mathbb{C}) \mid o(c) \leq q - m\}.$$

Dans la suite spectrale associée, on a :

Théorème 1 (Gelfand-Fuks) *Soit M une variété \mathcal{C}^∞ de dimension n , et soit W_n l'algèbre de Lie topologique des champs de vecteurs formels en n variables formelles, munie de la topologie de la convergence simple des coefficients.*

Dans la suite spectrale de la filtration d'ordre pour le sous-complexe diagonal, on a :

$$E_2^{p,q} = H_{-p}(M; \mathbb{C}) \otimes H^q(W_n; \mathbb{C}),$$

En ce sens, la cohomologie de Gelfand-Fuks est un mélange d'homologie de la variété et de cohomologie de l'algèbre de Lie des champs des vecteurs formels.

Dans [33], nous avons développé ce type de suite spectrale pour l'algèbre de Lie des champs des vecteurs $\text{Vect}_{1,0}(X)$. La seule modification est que le fibré tangent holomorphe est un fibré holomorphe, donc on peut prendre des jets par rapport aux coordonnées holomorphes z_1, \dots, z_n pour une variété complexe X de dimension complexe n . Le résultat principal de [33] est le théorème suivant :

Théorème 2 *Soit X une variété complexe de dimension complexe n et W_n comme dans théorème 1.*

Il existe une suite spectrale pour la cohomologie diagonale de $Vect_{1,0}(M)$ ayant comme terme E_2 :

$$E_2^{p,q} \cong H_{\bar{\partial}}^{-p,0}(M)' \otimes H^q(W_n; \mathbb{C}).$$

où $(-)'$ signifie l'espace vectoriel dual.

À cause du fait que W_1 a peu d'espaces de cohomologie non nuls, cette suite spectrale dégénère dans le cas des surfaces de Riemann compactes Σ , et on trouve que $H_{\Delta}^2(Vect_{1,0}(\Sigma); \mathbb{C})$ est de dimension g pour Σ de genre $g > 1$. Des générateurs explicites sont décrits dans [33].

Esquisse de preuve.

Notons simplement TX le fibré tangent holomorphe de X . L'espace vectoriel $Vect_{1,0}(X)$ est l'espace des sections C^∞ de TX . $\otimes^q TX$ (voir p. 5) est un fibré holomorphe sur la variété complexe X^q . En particulier, la notion d'un m -jet en z trivial d'une section de $\otimes^q TX$ (en un point $x \in X^q$) est indépendant du choix de la coordonnée locale z . Nous restreignons notre cadre maintenant au sous-complexe diagonal $C_{\Delta}^*(Vect_{1,0}(X); \mathbb{C})$.

Comme avant, les sous-espaces

$$F^m C_{\Delta}^q(Vect_{1,0}(X); \mathbb{C}) = \{c \in C_{\Delta}^q(Vect_{1,0}(X); \mathbb{C}) \mid c \text{ a ordre } \leq q - m\}$$

induisent une filtration sur le complexe diagonal. En effet,

$$d(F^m C_{\Delta}^q(Vect_{1,0}(X); \mathbb{C})) \subset F^m C_{\Delta}^{q+1}(Vect_{1,0}(X); \mathbb{C}),$$

puisque le crochet de $Vect_{1,0}(X)$ ne fait intervenir que des dérivées par rapport à z_i , $i = 1, \dots, n$. De plus, la filtration est exhaustive, puisque une section $s \in \Gamma(\otimes^q TX)$ avec ∞ -jet en z trivial est nulle.

Le terme $E_0^{p,q}$ de la suite spectrale associée est le quotient de l'espace des cochaînes diagonales $C_{\Delta}^{p+q}(Vect_{1,0}(X); \mathbb{C})$ qui sont d'ordre $\leq q$ (i.e. qui sont nulles sur des sections ayant q -jet trivial (en z)) divisé par celles d'ordre $< q$.

Traduisons maintenant les éléments de $E_0^{p,q}$ en sections généralisées (antisymétrisées de façon convénable) du fibré

$$\hat{\mathcal{E}}_0^{p,q} = \text{Hom}(S^q \text{norm}_{X^{p+q}} \Delta, (\otimes^{p+q} TX)|_{\Delta}).$$

Ici, $\text{norm}_{X^{p+q}} \Delta$ est le fibré holomorphe normal de la sous-variété $\Delta(X) \subset X^{p+q}$ (c'est le fibré quotient du fibré holomorphe tangent de X^q par le fibré holomorphe tangent de $\Delta(X)$). La version antisymétrisée est notée

$$\mathcal{E}_0^{p,q} = \text{Alt}(S^q \text{norm}_{X^{p+q}} \Delta, (\otimes^{p+q} TX)|_{\Delta}).$$

Passons maintenant aux fibres de ces fibrés : soit V la fibre de TX . La fibre de $\hat{\mathcal{E}}_0^{p,q}$ est par suite

$$\text{Hom}(S^q \{(V \oplus \dots \oplus V)/V_{\Delta}\}, \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{p+q}).$$

Ici, V_Δ signifie l'image de la diagonale $V \rightarrow V \oplus \dots \oplus V$. À cause de la restriction de la filtration d'ordre de Gelfand-Fuks à des jets en z , seule la fibre du tangent holomorphe apparaît dans la formule. Par une résolution de Koszul, le terme $S^q \{(V \oplus \dots \oplus V)/V_\Delta\}$ est traduit en facteurs $S^{q-i+1} \left(\bigoplus_{p+q} V \right) \otimes \Lambda^{i-1} V$. Les applications alternées du facteur $S^* \left(\bigoplus_{p+q} V \right)$ vers $\bigotimes^* V$ donnent le complexe de Gelfand-Fuks pour W_n , le facteur $\Lambda^* V$ celui des formes différentielles. En fait, W_n est vue ici comme l'algèbre de Lie des champs de vecteurs formels sur le dual V' , au lieu celle sur V ; puisque $V \cong V'$, on fait passer le dual plutôt sur l'espace des formes que sur W_n , cf les détails dans [10] pp. 144–147. On obtient :

$$E_1^{p,q} = \Omega^{-p,0}(M)' \otimes H^q(W_n; \mathbb{C}).$$

La différentielle $d_1^{p,q}$ est identifiée à ∂ sur $\Omega^{-p,0}(X)$, donc :

$$d_1^{p,q} = \partial \otimes id : \Omega^{-p,0}(X)' \otimes H^q(W_n; \mathbb{C}) \rightarrow \Omega^{-(p+1),0}(X)' \otimes H^q(W_n; \mathbb{C}).$$

Ceci montre le théorème. \square

C'est une question ouverte de savoir si la suite spectrale de Gelfand-Fuks par rapport à la filtration de support dégénère également.

1.2 Méthodes Čech ou simpliciales

Bott-Segal [2] et Haefliger [15] ont montré dans les années 1974–1978 que la cohomologie de Gelfand-Fuks $H^*(\text{Vect}(M); \mathbb{C})$ est isomorphe à la cohomologie singulière $H^*(\Gamma(E); \mathbb{C})$ de l'espace des sections $\Gamma(E)$ d'un certain fibré E sur M , qui est associé au fibré tangent TM de M et a fibre typique X_n . L'espace X_n est tel que sa cohomologie singulière soit isomorphe à la cohomologie de Gelfand-Fuks de $\text{Vect}(\mathbb{R}^n)$, si n est la dimension de M . Ceci exprime l'idée que $H^*(\text{Vect}(M); \mathbb{C})$ se construit en recollant les résultats locaux, i.e. la cohomologie de Gelfand-Fuks de $\text{Vect}(\mathbb{R}^n)$.

Plus tard, Kawazumi [17] a montré qu'on obtient un théorème similaire pour l'algèbre de Lie des champs de vecteurs holomorphes $Hol(\Sigma)$ sur une surface de Riemann ouverte Σ . Dans ma thèse, dont les résultats principaux sont publiés dans [32], j'ai généralisé l'approche de Kawazumi (qui utilise la méthode de Bott-Segal) au cas de la dimension n . Il est basé sur les étapes suivantes (je ne montre ici uniquement les étapes qui sont différentes des travaux antérieurs – je n'ai pas la place d'être exhaustif ici !). Soit X une variété complexe de dimension complexe n .

- (a) Première étape : les cas *ponctuel* et *local*.
 - (i) $X = \mathbb{C}^n$ et $Hol(X) = W_n$, le version formelle de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs holomorphes. Il existe un espace X_n tel que sa cohomologie singulière soit isomorphe à la cohomologie de Gelfand-Fuks de W_n .
 - (ii) $X = \mathbb{C}^n$ et $Hol(X) = Hol(\mathbb{C}^n)$, l'algèbre de Lie des champs de vecteurs holomorphes sur \mathbb{C}^n . Le cohomologie singulière de X_n est isomorphe à la cohomologie Gelfand-Fuks de $Hol(\mathbb{C}^n)$.

(iii) $X = U$ et $\text{Hol}(X) = \text{Hol}(U)$ pour un ouvert de Stein contractile U .
 La cohomologie singulière X_n est encore isomorphe à la cohomologie de Gelfand-Fuks de $\text{Hol}(U)$.

(b) Deuxième étape : adapter la première étape pour passer à un bon recouvrement de Stein par des ouverts de Stein contractiles $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in I}$ of X . Ceci signifie que toutes intersections finies sont encore de Stein et contractiles. On note $U_\sigma = \bigcap_{i \in \sigma} U_i$ pour un ensemble d'indices fini σ et $U^\sigma = \bigcup_{i \in \sigma} U_i$. Nous supposons dans toutes les formules que tous les U_i , U_σ et U^σ sont non-vides. D'abord, on montre l'existence d'une *application fondamentale*

$$\hat{f}_\sigma : C^*(\text{Hol}(U_\sigma)) \rightarrow \Omega^*(U^\sigma; C^*(\text{Hol}(\mathbb{C}^n)))$$

qui lie la cohomologie de l'algèbre de Lie cosimpliciale $\text{Hol}_{\mathcal{U}}(X)$ associée au (nerf grossi du) recouvrement aux formes différentielles à valeurs dans $C^*(\text{Hol}(\mathbb{C}^n))$ sur la variété cosimpliciale associée au (nerf grossie du) recouvrement. Ensuite, on se restreint par équivalence de cohomologie au sous-complexe des formes différentielles holomorphes grâce à l'hypothèse de Stein.

(c) La dernière étape est le *théorème d'addition* de Kawazumi qui identifie la cohomologie de l'algèbre de Lie cosimpliciale à celle de $\text{Hol}(X)$ dans le cas où X lui-même est une variété de Stein. On déduit des travaux de Bott-Segal (*cf* cor. 5.8 de [2]) que l'espace d'arrivée de l'application fondamentale donne un modèle cosimplicial pour l'espace des sections du fibré E .

En exécutant ces étapes, on trouve :

Proposition 1

$$H^*(\text{Hol}(\mathbb{C}^n); \mathbb{C}) \cong H^*(W_n; \mathbb{C}) \cong H^*(X_n; \mathbb{C})$$

avec le même espace X_n comme dans les travaux de Bott-Segal, qui est en fait une variété complexe.

Esquisse de preuve. Le dual continu de l'espace des séries formelles W_n dans la topologie de la convergence simple des coefficients s'identifie à un espace de polynômes, *cf* [30] thm. 22.1, p. 228. Le dual continu de l'espace $\text{Hol}(\mathbb{C}^n)$ des champs de vecteurs holomorphes ou des fonctions holomorphes sur \mathbb{C}^n s'identifie à l'espace des fonctions entières de type exponentiel, *cf* [30] thm. 22.2, p. 233. Comme toujours en théorie de Gelfand-Fuks, les duaux continus sont regardés comme espaces vectoriels, sans topologie. Les complexes de cochaînes continues sont ensuite des produits tensoriels complétés, convenablement antisymétrisés, de ces duaux.

L'application de jet de Taylor

$$\text{Hol}(\mathbb{C}^n) \rightarrow W_n, \quad \sum_{i=1}^n f_i(z_1, \dots, z_n) \frac{\partial}{\partial z_i} \mapsto \sum_{i=1}^n \text{jet}_x^\infty(f_i)(z_1, \dots, z_n) \frac{\partial}{\partial z_i}$$

associe à un champ son jet de Taylor infini en un point $0 \in \mathbb{C}^n$. C'est un morphisme injectif continu d'algèbres de Lie d'image dense, et induit donc une application de restriction injective

$$\phi : C^*(W_n; \mathbb{C}) \rightarrow C^*(Hol(\mathbb{C}^n); \mathbb{C}).$$

L'application du jet de Taylor et ϕ sont équivariants par rapport à l'action du champ d'Euler $e_0 := \sum_{i=1}^n z_i \frac{\partial}{\partial z_i}$. e_0 agit en tant qu'élément de graduation sur les deux algèbres de Lie. Le théorème 1.5.2 p. 45 [10] implique que le calcul de la cohomologie de Gelfand-Fuks des deux algèbres de Lie se réduit au sous-complexe des cochaînes invariants par l'action de e_0 , i.e. des cochaînes de degré total zéro. Or, les sous-complexes $C^*(W_n; \mathbb{C})^{e_0}$ et $C^*(Hol(\mathbb{C}^n); \mathbb{C})^{e_0}$ coïncident sous ϕ . Ainsi, $Hol(\mathbb{C}^n)$ et W_n ont des cohomologies isomorphes.

La variété X_n est l'image réciproque dans l'espace total d'un voisinage ouvert du $2n$ -squelette de la base du $GL_n(\mathbb{C})$ -fibré universel, cf [2] p. 290. Sa cohomologie se décrit le mieux en disant que c'est un quotient de l'algèbre de Weil $\Lambda gl_n(\mathbb{C})^* \otimes S gl_n(\mathbb{C})^*$. \square

Ici, nous avons adapté la preuve de Kawazumi; il est également possible d'adapter la preuve de Bott-Segal. Nous omettons la discussion des autres étapes du programme.

En conclusion [32] :

Théorème 3 *Soit X une variété complexe de Stein de dimension complexe n . Alors il existe un fibré E associé au fibré tangent holomorphe TX et de fibre typique X_n tel que*

$$H^*(Hol(X); \mathbb{C}) \cong H^*(\Gamma E; \mathbb{C}).$$

On peut étendre ce théorème formellement à des variétés qui ne sont pas de Stein en définissant la cohomologie de Gelfand-Fuks d'un tel X comme la cohomologie de l'algèbre de Lie cosimpliciale $Hol_{\mathcal{U}}(X)$ par rapport à un bon recouvrement de Stein de X (dont l'existence est alors une hypothèse sur X).

Nous avons effectué des calculs explicites pour des surfaces de Riemann compactes.

1.3 Cohomologie des algèbres de Krichever-Novikov

La suite spectrale de Millionshchikov [21] qui s'appuie sur la presque graduation des algèbres de Krichever-Novikov m'a motivé à regarder la cohomologie des algèbres de Krichever-Novikov.

Observons tout d'abord qu'une sous-algèbre dense a une cohomologie de Gelfand-Fuks isomorphe :

Lemme 1 *Si $i : \mathfrak{h} \hookrightarrow \mathfrak{g}$ est dense dans la topologie de sous-espace, alors on a un isomorphisme d'espaces vectoriels gradués*

$$C^*(\mathfrak{g}; \mathbb{C}) \rightarrow C^*(\mathfrak{h}; \mathbb{C}),$$

induit par i , et par conséquent un isomorphisme entre leurs cohomologies de Gelfand-Fuks.

Dans [31], nous avons observé que le problème du calcul de la cohomologie des algèbres de Krichever-Novikov est mal posé, puisqu'il n'y a pas de topologie naturelle sur ces algèbres. Le résultat principal de [31] est le fait que si $Mer_k(\Sigma)$ est muni de la topologie induite par le plongement $Mer_k(\Sigma) \subset Hol(\Sigma \setminus \{p_1, \dots, p_k\})$ (où p_1, \dots, p_k sont les points fixés où les champs peuvent avoir des pôles), alors les deux algèbres de Lie ont des cohomologies de Gelfand-Fuks isomorphes, puisque l'une est dense dans l'autre. La cohomologie de Gelfand-Fuks de $Hol(\Sigma \setminus \{p_1, \dots, p_k\})$ se déduit des résultats de Kawazumi [17].

La densité des champs méromorphes, qu'on peut encore interpréter comme *sections régulières* du fibré tangent algébrique sur la courbe affine, $Mer_k(\Sigma) \subset Hol(\Sigma \setminus \{p_1, \dots, p_k\})$ se déduit quant à elle d'un théorème de Behnke-Stein [1]. C'est un prototype de théorème de densité, dont une version générale s'énonce dans la situation suivante :

Considérons une variété complexe connexe compacte X et une sous-variété complexe $Y \subset X$ de codimension 1, donnée par un diviseur effectif ample D_Y . X se plonge par suite dans l'espace projectif, de telle façon que Y soit la sous-variété affine donnée par le complément d'un hyperplan.

Théorème 4 *Soit E un fibré vectoriel algébrique sur la variété algébrique affine $X \setminus Y$. Supposons qu'il existe un fibré vectoriel algébrique F sur l'espace projectif tel que E soit un sous-fibré ou un fibré quotient de la restriction de F à X .*

Alors $E(X \setminus Y) \subset E^{an}(X \setminus Y)$ est dense, où $E(X \setminus Y)$ est l'espace des sections régulières sur $X \setminus Y$ et $E^{an}(X \setminus Y)$ l'espace des sections holomorphes sur $X \setminus Y$.

Ce théorème s'applique à toute sorte d'algèbre qui est espace de sections d'un fibré vectoriel, et montre la densité de la sous-algèbre des sections algébriques (dans la topologie induite) dans l'espace de toutes les sections holomorphes. Pour des algèbres associatives par exemple, on obtient des théorèmes d'isomorphisme pour la cohomologie cyclique ou de Hochschild continue.

Dans [35], nous déterminons des cocycles représentatifs pour un ensemble de générateurs de la cohomologie de Gelfand-Fuks $H^2(Hol(\Sigma); \mathcal{F}_\lambda(\Sigma))$ en termes d'objets géométriques. Ici, $\mathcal{F}_\lambda(\Sigma)$ est l'espace des λ -densités holomorphes sur la surface de Riemann ouverte Σ , i.e. pour $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mathcal{F}_\lambda(\Sigma)$ est l'espace de fonctions holomorphes $g(z)(dz)^\lambda$ sur Σ , munit de l'action de d'un champ de vecteurs $X = f(z)\frac{\partial}{\partial z}$ par

$$f(z)\frac{\partial}{\partial z} \cdot g(z)(dz)^\lambda = (fg'(z) + \lambda f'g(z))(dz)^\lambda.$$

Kawazumi a calculé dans *loc. cit.* les dimensions des espaces de cohomologie et le symbole principal des cocycles représentant les classes de cohomologie. Nous avons ensuite utilisé ces résultats pour construire des cocycles en termes de connexions affine T et projective R sur Σ . Une *connexion affine* T et une

connexion projective R sont des objets géométriques sur Σ , définis par leurs propriétés de transformation. Plus précisément, sous changement de coordonnée $z_\beta = h(z_\alpha)$, définie sur l'intersection de deux ouverts de cartes $U_\alpha \cap U_\beta$, R doit se transformer par

$$R_\beta (h')^2 = R_\alpha + S,$$

où la dérivée schwarzienne S est donnée par

$$S = \frac{h'''}{h'} - \frac{3}{2} \left(\frac{h''}{h'} \right)^2.$$

De même, T doit se transformer comme

$$T_\beta h' = T_\alpha + \frac{h''}{h'}.$$

L'existence de ce genre de connexions exprime la possibilité de munir la variété en question d'une certaine structure géométrique, en l'occurrence d'une structure affine ou projective, en choisissant un *atlas projectif* (resp. un *atlas affine*), donné par des cartes dans lesquelles R_α (resp. T_α) est nul. Des connexions affines (et donc des connexions projectives) existent sur toute surface de Riemann ouverte. Dans le cas des surfaces compactes, elles n'existent que pour le genre 1.

On va maintenant expliquer à l'aide d'un exemple comment construire des cocycles en regardant les propriétés de transformation du symbole principal, et ensuite en compensant les termes gênant en rajoutant des polynômes différentiels en T et R : les extensions centrales de $Mer_k \Sigma$ (et de $Hol(\Sigma \setminus \{p_1, \dots, p_k\})$ où Σ est une surface de Riemann compacte) sont données par des cocycles du type

$$c(f, g) = \frac{1}{2} \int_\Sigma \left| \begin{array}{cc} f & g \\ f''' & g''' \end{array} \right|.$$

Mais quand on effectue un changement de coordonnées sur ce déterminant (en utilisant que f et g sont des fonctions de coefficients de champs de vecteurs), on trouve que le tout ne se transforme pas comme une 2-forme différentielle. En revanche, le déterminant se transforme comme une 1-forme holomorphe, à certains termes près, si bien que

$$c(f, g) = \int_\Sigma \left(\frac{1}{2} \left| \begin{array}{cc} f & g \\ f''' & g''' \end{array} \right| - 2R \left| \begin{array}{cc} f & g \\ f' & g' \end{array} \right| \right) dz \wedge \bar{\omega}$$

est la bonne expression : l'intégrand se transforme maintenant comme une 2-forme différentielle. Ici, $\omega \in H^1(\Sigma)$ est un générateur, et nous avons ajouté un déterminant qui est en fait un cobord et ne change donc pas la classe de cohomologie, mais qui est nécessaire afin de rendre l'expression une forme différentielle.

Nous renvoyons à [35] pour les autres formules explicites. Remarquons que notre méthode pour déterminer des cocycles pour $Hol(\Sigma)$ à partir de cocycles pour $Vect(S^1)$ (les symboles principaux!) en utilisant des connexions affines et projectives, a été reprise plus tard par Bouarroudj and Gargoubi dans [3].

1.4 Cohomologie de Leibniz des champs de vecteurs

La notion d'*algèbre de Leibniz* est une généralisation de la notion d'algèbre de Lie : le crochet doit seulement vérifier une identité de Jacobi, pas forcément l'antisymétrie. Les algèbres de Leibniz sont des algèbres sur une certaine opérade. Cohomologie et théorie des déformations des algèbres de Leibniz se déduisent facilement du cadre général pour des opérades quadratiques. Comme les algèbres de Lie sont de Leibniz, on peut appliquer la cohomologie de Leibniz aux algèbres de Lie, et en déduire d'autres invariants (i.e. classes de cohomologie) pour les algèbres de Lie.

Dans [9], Alessandra Frabetti et moi adaptions les suites spectrales de Gelfand-Fuks à la cohomologie de Leibniz. Ceci est plutôt facile, puisque la seule différence est que le complexe des cochaînes consiste maintenant de toutes les cochaînes, et ne pas seulement des cochaînes antisymétriques. Ensuite, en utilisant les calculs de cohomologie de Leibniz (au sens de Gelfand-Fuks) de Lodder [19] de l'algèbre de Lie W_1 , nous avons déduit la cohomologie de Leibniz diagonale $HL_{\Delta}^*(\text{Vect}(S^1); \mathbb{C})$ de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs sur le cercle.

La cohomologie de Leibniz $HL^*(W_1; \mathbb{C})$ de W_1 est l'algèbre de Leibniz duale engendrée par le cocycle de Godbillon-Vey θ_0 et un autre générateur β en degré 4. Les cup produits θ_0^2 et $\beta \cup \theta_0$ sont zéro. Le cup produit $\beta^2 \cup \beta$ est égal à $2\beta \cup \beta^2$ à cause de la relation des algèbres de Leibniz duales et le fait que le degré de β est pair. Donc les seuls cocycles de Leibniz de degré supérieur qui sont locaux² sont les $\beta^k := \beta \cup \beta^{k-1}$ and $\theta_0 \cup \beta^k$.

Le théorème principal de [9] s'énonce comme suit :

Théorème 5 *La cohomologie diagonale de Leibniz de l'algèbre de Lie $\text{Vect } S^1$ est isomorphe à l'espace vectoriel gradué engendré par les classes des cocycles locaux*

$$\begin{aligned} \theta_0 \cup \beta^r & \text{ en degré } 3 + 4r, \text{ pour } r \geq 0 \\ \beta^s & \text{ en degré } 4s, \text{ pour } s \geq 1 \end{aligned}$$

et celles des cocycles diagonaux

$$\begin{aligned} \omega_r & \text{ en degré } 2 + 4r, \text{ pour } r \geq 0 \\ \gamma_s & \text{ en degré } 4s - 1, \text{ pour } s \geq 1 \end{aligned}$$

où $\omega_0 = \omega$ est le cocycle de Gelfand-Fuks en degré 2 et ω_r, γ_s déterminent de nouveaux invariants pour $r, s \geq 1$.

Plus de renseignements sur ces classes se trouvent dans l'appendice A. Il reste à comprendre si la cohomologie de Gelfand-Fuks est aussi dans le cadre de Leibniz multiplicativement engendré par la cohomologie diagonale. Ceci permettrait de calculer toute la cohomologie de Leibniz de $\text{Vect}(S^1)$.

²Local veut dire préservant le support, voir l'appendice A.

1.5 L'approche de Skryabin à la cohomologie des champs de vecteurs

Normalement le calcul de la cohomologie algébrique ou discrète (en opposition à la cohomologie de Gelfand-Fuks) d'une algèbre de Lie de dimension infinie est assez difficile. Par exemple, Dimitry Millionshchikov et moi, nous ne connaissons pas de calcul de la cohomologie *algébrique* de l'algèbre de Lie

$$\text{Vect}_{\text{pol}}(S^1) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathbb{C}x^{i+1} \frac{d}{dx}$$

des champs de vecteurs polynomiaux sur le cercle (nous connaissons bien sûr les termes de bas degré). D'un autre côté, la cohomologie de Gelfand-Fuks de $\text{Vect}_{\text{pol}}(S^1)$, vue comme sous-algèbre de Lie de $\text{Vect}(S^1)$ et munie de la topologie induite, est bien connue en utilisant lemme 1 et la densité.

Le passage au sous-complexe des cochaînes invariantes sous l'action du champ d'Euler, par exemple, comme dans la preuve de proposition 1, ne réduit pas le calcul à des complexes de cochaînes de dimension finie.

Il y a d'autres approches au calcul de la cohomologie algébrique des algèbres de Lie de dimension infinie. J'ai déjà mentionné l'approche par la graduation, que Millionshchikov a adapté aux presque graduations des algèbres de Krichever-Novikov. Malheureusement, son approche utilise le calcul pour $\text{Vect}_{\text{pol}}(S^1)$, donc ne peut pas servir dans ce but.

Skryabin explique dans [29] une approche à la cohomologie algébrique via la théorie des représentations. Pour l'instant, elle ne marche que pour le degré 1, et avec une généralité moindre en degré 2. D'un autre côté, elle marche sur n'importe quel anneau commutatif associatif unitaire R où 2 et 3 sont inversibles.

En effet, soit W un R -module projectif de rang $n > 0$ fini qui est un sous-module du module des dérivations $\text{Der}(R)$. Soit Ω^1 simplement $\text{Hom}_R(W, R)$ et supposons $\Omega^1 = R dR$ où, pour tout $f \in R$, df est défini par $df(D) = Df$ pour tout $D \in W$. Soit $\mathfrak{g} = \Omega^1 \otimes_R W$ l'algèbre de Lie des formes différentielles à valeurs dans W . Skryabin définit la catégorie \mathcal{C}_1 des R -, W - et \mathfrak{g} -modules simultanés avec relations de compatibilité entre les actions. Il analyse en détail des cocycles sur W à valeurs dans un objet de \mathcal{C}_1 par leur ordre, et donne des conditions pour déterminer quand il s'agit d'opérateurs différentiels. Son résultat est le calcul de toute la 1-cohomologie à valeurs dans un objet de \mathcal{C}_1 . Finalement, en utilisant l'astuce $H^2(W, V) \hookrightarrow H^1(W, \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(W, V))$ (vraie pour des extensions *centrales*, i.e. pour une action triviale de W sur V), il arrive à en déduire l'extension centrale universelle \mathbb{Z} -scindée de W . Ainsi ([29] thm. 7.1, p. 103) on a que, pour $n > 1$, toute extension centrale \mathbb{Z} -scindée de W est scindée en tant qu'algèbres de Lie, mais pour $n = 1$, l'extension universelle a pour centre $H^1(\Omega)$, la cohomologie dans le complexe de de Rham $\Omega^* = \Lambda \Omega^1$. Ceci est attendu d'après les calculs en cohomologie continue, mais ici le résultat est montré pour la cohomologie *algébrique*.

Pour $\text{Vect}_{\text{pol}}(S^1)$, cela ne donne rien de nouveau, puisqu'on connaît déjà le H^2 algébrique. Mais pour $\text{Mer}_k(\Sigma)$, ceci est nouveau : $\text{Mer}_k(\Sigma)$ est bien un

\mathcal{O}_{Σ_k} -module projectif, en tant qu'espace de sections sur la variété affine lisse $\Sigma_k = \Sigma \setminus \{p_1, \dots, p_k\}$, et de rang 1. Il suffit donc de calculer $H^1(\Omega)$, mais ici elle coïncide avec la cohomologie de de Rham, puisqu'on peut la calculer à l'aide du complexe des formes algébriques sur une variété affine lisse. En conclusion, l'extension centrale universelle \mathbb{Z} -scindée de $Mer_k(\Sigma)$ a un centre de dimension $b_1(\Sigma_k)$, le premier nombre de Betti de Σ_k . Ceci est une version faible de la conjecture de Feigin-Novikov, cf [21].

Notons que le cadre de l'article de Skryabin est un cas spécial de la théorie des *algèbres de Lie-Rinehart* de Rinehart [27], Huebschmann [16], et semblable à celui des *algèbres modulaires* de Grabowski [12], Siebert [28]. Observons que les algèbres de Lie-Rinehart apparaissent comme modules de sections des algébroides de Lie.

2 Modules croisés et 3-cohomologie

2.1 Construction de modules croisés

Un *module croisé* d'algèbres de Lie est un morphisme d'algèbres de Lie $\mu : \mathfrak{m} \rightarrow \mathfrak{n}$ plus une action compatible de \mathfrak{n} sur \mathfrak{m} par dérivation. Dans la même façon que les extensions abéliennes sont classifiées par la 2-cohomologie, la 3-cohomologie classe les modules croisés, i.e. une 3-classe de cohomologie correspond de façon unique à une classe d'équivalence de modules croisés. Voir Appendice B pour plus de renseignements sur des modules croisés et leur lien avec la 3-cohomologie.

Mon intérêt dans les modules croisés d'algèbres de Lie date d'une question de Jean-Louis Loday concernant le module croisé représentant le cocycle de Godbillon-Vey θ_0 , dont la classe de cohomologie

$$[\theta_0] \in H^3(W_1; \mathbb{C}) \cong H^3(Vect(S^1); \mathbb{C})$$

est un générateur. Le cocycle est donné par la valeur en $t = 0$ de la fonction

$$\theta_t(f, g, h) = \begin{vmatrix} f(t) & g(t) & h(t) \\ f'(t) & g'(t) & h'(t) \\ f''(t) & g''(t) & h''(t) \end{vmatrix},$$

où f, g, h sont les fonctions de coefficients de trois champs de vecteurs.

J'ai redécouvert (40 ans après Gerstenhaber) qu'on peut construire des modules croisés d'algèbres de Lie pour une algèbre de Lie \mathfrak{g} en recollant une suite exacte de \mathfrak{g} -modules

$$0 \rightarrow V' \rightarrow V \rightarrow V'' \rightarrow 0$$

avec une extension abélienne donnée par un 2-cocycle α

$$0 \rightarrow V'' \rightarrow V'' \times_{\alpha} \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \rightarrow 0.$$

La classe de cohomologie à laquelle correspond le module croisé construit de cette façon est $[\partial\alpha]$, l'image de α sous l'homomorphisme connectant associé à la suite exacte courte de \mathfrak{g} -modules.

Dans toute catégorie de \mathfrak{g} -modules qui possède assez d'injectifs, ou plus précisément, dans laquelle tout module se plonge dans un qui n'a pas de 3-cohomologie, on peut représenter de cette façon une classe d'équivalence de modules croisés.

L'étape clé (cf Appendice A) pour construire un module croisé qui correspond à $[\theta_0]$ est que

$$d^{\mathbb{C}}\alpha = d_{\text{dR}}\theta_t, \quad (2)$$

parce que cette équation implique (par un calcul direct) que l'image de α sous le connectant (qui est associé à la suite exacte courte de de Rham explicitée plus loin) est θ_0 . Ici, $d^{\mathbb{C}}$ est le cobord de Lie à valeurs dans le module trivial \mathbb{C} , d_{dR} la différentielle de de Rham appliquée à la fonction θ_t , et α est le 2-cocycle suivant sur W_1 à valeurs dans le module des 1-formes formelles Ω^1 :

$$\alpha(f, g) = \begin{vmatrix} f' & g' \\ f'' & g'' \end{vmatrix}.$$

La suite exacte courte de W_1 -modules est la suite de de Rham

$$0 \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow \Omega^0 \rightarrow \Omega^1 \rightarrow 0.$$

La construction du module croisé

$$0 \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow \Omega^0 \rightarrow \Omega^1 \times_{\alpha} W_1 \rightarrow W_1 \rightarrow 0$$

est le résultat principal de [34].

L'article [36] utilise ces idées pour construire un module croisé correspondant au cocycle $\langle [\cdot, \cdot], \cdot \rangle$ dont la classe engendre $H^3(\mathfrak{g}; \mathbb{C})$ pour une algèbre de Lie simple complexe de dimension finie \mathfrak{g} . Ici, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est la forme de Killing sur \mathfrak{g} . L'origine de notre travail est l'observation que le module croisé qu'on vient de construire pour θ_0 sur W_1 se restreint en un module croisé sur $sl_2(\mathbb{C}) \subset W_1$ qui correspond à un multiple de $\langle [\cdot, \cdot], \cdot \rangle$. La suite de de Rham devient pour une algèbre de Lie simple complexe de dimension finie arbitraire la suite des duaux restreints³

$$0 \rightarrow L_0^{\sharp} \rightarrow M_0^{\sharp} \rightarrow N_0^{\sharp} \rightarrow 0$$

associée à la suite

$$0 \rightarrow N_{\lambda} \rightarrow M_{\lambda} \rightarrow L_{\lambda} \rightarrow 0$$

qui définit le quotient irréductible L_{λ} du module de Verma M_{λ} de plus haut poids λ , où on a pris le cas spécial $\lambda = 0$ (et donc $L_0 \cong \mathbb{C}$).

La preuve que ce module croisé

$$0 \rightarrow \mathbb{C} \rightarrow M_0^{\sharp} \rightarrow N_0^{\sharp} \times_{\alpha} \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \rightarrow 0$$

pour un certain α donne un multiple de la classe de $\langle [\cdot, \cdot], \cdot \rangle$ utilise des raisonnements sur des suites spectrales pour montrer que l'application induite

$$H^3(\mathfrak{g}, L_0^{\sharp}) \rightarrow H^3(\mathfrak{g}, M_0^{\sharp})$$

est nulle.

³Le dual restreint M^{\sharp} d'un module gradué $M = \bigoplus_i M_i$ est $M^{\sharp} = \bigoplus_i M_i^*$, la somme directe des duaux des morceaux gradués.

2.2 Groupoïdes de Lie et gerbes

Pendant notre travail sur [36], je restais en contact avec Karl-Hermann Neeb qui travaillait aussi sur des modules croisé à ce moment-là. Nous avions des points de vue différents sur ce sujet : je pensais que le point de vue *constructif* était plus intéressant. Karl-Hermann était plus intéressé par le point de vue *obstructif*, i.e. étant donné un morphisme $\psi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathbf{out}(\mathfrak{a})$ d'algèbres de Lie de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} dans les dérivations extérieures d'une algèbre de Lie \mathfrak{a} , est-ce qu'il existe une extension de \mathfrak{g} par \mathfrak{a} qui induit ψ ? La réponse fait intervenir un module croisé associé à ψ dont la classe est l'obstruction à l'existence de l'extension. Karl-Hermann a formulé ceci en détail pour des algèbres de Lie topologiques [22]. Il l'a ensuite appliqué pour construire un module croisé d'algèbres de Lie topologiques associé à un K -fibré principal P sur une variété M et une extension centrale \hat{K} du groupe structural K par un groupe abélien Z . La classe d'obstruction du module croisé donne lieu à une classe dans $H_{\text{dR}}^3(M)$, la 3-cohomologie de de Rham de M . Il restait la question de savoir si cette classe est l'obstruction complète à l'existence d'un \hat{K} -fibré \hat{P} tel que $\hat{P}/Z \cong P$, et celle sur le lien avec des gerbes sur M , des objets qui sont aussi classifiés par des 3-classes sur M .

Dans [18], Camille Laurent-Gengoux et moi résolvons ces questions en exhibant sous le cadre des algèbres de Lie topologiques un cadre d'algébroïdes de Lie (l'algébroïde d'Atiyah) et de groupoïdes de Lie. Dans ce contexte, certaines questions ont déjà été résolues par Mackenzie. Le résultat principal de [18] est l'identification des différentes classes d'obstruction pour relier les deux cadres :

Théorème 6 *Soit P un K -fibré principal P sur la variété connexe M et*

$$1 \rightarrow Z \rightarrow \hat{K} \rightarrow K \rightarrow 1$$

une extension centrale du groupe structural. Alors la 3-classe de cohomologie $[\omega_{\text{top alg}}]$ du module croisé d'algèbres de Lie topologiques

$$0 \rightarrow \mathfrak{c} \rightarrow \hat{\mathfrak{n}} \rightarrow \mathbf{aut}(P) \rightarrow \mathbf{Vect}(M) \rightarrow 0$$

définit la même classe de de Rham que le 3-cocycle ω_{grp} associé au module croisé de groupoïdes de Lie

$$0 \rightarrow M \times Z \rightarrow P_K(\hat{K}) \rightarrow (P \times P)/K \rightarrow M \times M \rightarrow 0.$$

Ici $\mathbf{aut}(P)$ est l'algèbre de Lie topologique des champs de vecteurs K -invariants sur P , \mathfrak{n} est la sous-algèbre des champs verticaux, l'algèbre de Lie de *jauge*, et $\mathfrak{c} = \mathcal{C}^\infty(M, \mathfrak{z})$ où \mathfrak{z} est l'algèbre de Lie de Z . D'un autre côté, $P_K(\hat{K})$ est le groupoïde de Lie donné par les applications K -equivariantes des fibres P_m ($m \in M$) vers \hat{K} , et $(P \times P)/K$ est le groupoïde de Lie de l'algébroïde de Lie d'Atiyah.

La preuve utilise ce que nous appelons la cohomologie de Deligne. En tant que conséquence de ce théorème, on voit qu'à *torsion près*, la classe de Neeb est l'obstruction complète du problème d'existence.

Un autre résultat de [18] est la bijection entre modules croisés de groupoïdes de Lie d'un certain type sur M et gerbes de bande abélienne, trivialisée :

Théorème 7 *Il existe une correspondance biunivoque entre gerbes de bande abélienne, trivialisée sur une variété connexe M , et modules croisés de groupoïdes de Lie à noyau trivial et à conoyau $M \times M$. Elle induit la correspondance biunivoque entre les classes de cohomologie en passant aux classes d'équivalence.*

La raison profonde de ce théorème est le fait que tout module croisé de groupoïdes de Lie qui satisfait aux conditions du théorème est isomorphe à un qui provient d'un problème d'extension du groupe structural d'un fibré principal (pour plus de précision, voir prop. 1 de *loc. cit.*).

3 Algèbres de courants holomorphes

Une deuxième classe importante d'algèbres de Lie de dimension infinie est celle des *algèbres de courants*, i.e. des algèbres de Lie de la forme $A \otimes \mathfrak{k}$ où A est une algèbre associative commutative unitaire et \mathfrak{k} une algèbre de Lie, le crochet sur $A \otimes \mathfrak{k}$ étant :

$$[a \otimes x, b \otimes y] = ab \otimes [x, y],$$

pour $a, b \in A$ et $x, y \in \mathfrak{k}$. Nous allons toujours réserver le \mathfrak{k} pour l'algèbre de Lie facteur du produit tensoriel, et \mathfrak{g} pour l'algèbre de Lie toute entière $\mathfrak{g} = A \otimes \mathfrak{k}$. $sl_n(A)$ ou $gl_n(A)$ sont des exemples d'algèbres de courants avec $\mathfrak{k} = sl_n$ ou $\mathfrak{k} = gl_n$ qui jouent un rôle important en K -Théorie. En théorie conforme des champs, les algèbres de courants jouent aussi un rôle, puisque les champs de la théorie sont des \mathfrak{k} -courants sur une variété (et où on prend donc $A = \mathcal{C}^\infty(M)$), ou encore en théorie des déformations où le changement de base amène directement aux produits tensoriels $A \otimes \mathfrak{k}$. Pour $A = \mathcal{C}^\infty(M)$ sur une variété M , $A \otimes \mathfrak{k}$ s'identifie à l'algèbre de Lie $\mathcal{C}^\infty(M, \mathfrak{k})$ des fonctions à valeurs dans \mathfrak{k} sur M . Ici le produit tensoriel doit être interprété en tant que π -produit tensoriel (*cf* section 1) au cas où \mathfrak{k} est topologique.

Je m'intéresse surtout aux *algèbres de courants holomorphes*, i.e. à des algèbres de courants de la forme $\mathcal{O}(X, \mathfrak{k})$ pour une variété complexe (de Stein) X et une algèbre de Lie \mathfrak{k} , très souvent de dimension finie.

3.1 L'extension centrale universelle

Un premier article sur le sujet concerne l'extension centrale universelle de $\mathcal{O}(X, \mathfrak{k})$ pour une algèbre de Lie complexe (semi-)simple de dimension finie \mathfrak{k} . Il y a beaucoup d'articles sur l'identification de l'extension centrale universelle des algèbres de courants $A \otimes \mathfrak{k}$. Limitons-nous au fait que Maier a considéré la question pour une algèbre de Fréchet A dans [20], et l'a résolu en passant par la notion de module des différentielles de Kähler-Fréchet $\Omega^1(A)$, qui est un A -module de Fréchet. Le centre de l'extension centrale universelle est alors $\Omega^1(A) / \overline{dA}$.

Dans [24], Karl-Hermann Neeb et moi avons identifié le module de Kähler-Fréchet $\Omega^1(A)$ pour l'algèbre $A = \mathcal{O}(X)$ des fonctions holomorphes sur une variété de Stein X avec le A -module de Fréchet des 1-formes différentielles holomorphes sur X , ainsi nous avons résolu le problème de l'extension centrale universelle dans ce cas. Plus précisément, la différentielle de de Rahm

$$d : \mathcal{O}(X) \rightarrow \Omega^1(X)$$

est une dérivation continue de $\mathcal{O}(X)$ -modules, et donne ainsi par universalité du module de Kähler-Fréchet $(\Omega^1(\mathcal{O}(X)), d_{\mathcal{O}(X)})$ lieu à un unique morphisme continu de $\mathcal{O}(X)$ -modules

$$\gamma_X : \Omega^1(\mathcal{O}(X)) \rightarrow \Omega^1(X) \quad \text{tel que} \quad \gamma_X \circ d_{\mathcal{O}(X)} = d.$$

Théorème 8 *Soit X une variété de Stein. Alors l'application*

$$\gamma_X : \Omega^1(\mathcal{O}(X)) \rightarrow \Omega^1(X)$$

est un isomorphisme de $\mathcal{O}(X)$ -modules de Fréchet.

Le théorème peut être montré directement sur un ouvert $U \subset \mathbb{C}^n$ tel que les restrictions des polynômes soient denses dans U . Le cas général se traite en faisceautisant l'application γ .

Le théorème est vrai plus généralement sur des *domaines riemanniens* X sur une variété de Stein Y , i.e. pour une variété complexe X plus une application holomorphe $p : X \rightarrow Y$ qui est partout régulière.

3.2 2-cohomologie des algèbres de courants

Dans un deuxième article [25] avec Karl-Hermann Neeb, nous avons calculé la 2-cohomologie pour une algèbre de courants arbitraire, et cela dans le cadre de la cohomologie continue (où par exemple A est une algèbre de Fréchet et \mathfrak{k} de dimension finie, mais pas nécessairement semi-simple, et la cohomologie est calculée en utilisant des cochaînes continues).

Pour ne pas citer tous les auteurs de calculs de cohomologie pour les algèbres de courants, citons seulement les articles de Haddi [14] et Zusmanovich [38], où l'homologie correspondante a été calculé dans un cadre algébrique et en utilisant des scindements non naturels de certains applications quotient. Notre contribution à la question est donc de ne pas utiliser de section non naturelle d'une application quotient et d'avoir établi un cadre qui se prête à la cohomologie continue.

Notre point de vue est le suivant : considérons une 2-cochaîne sur \mathfrak{g} comme application linéaire $f : \Lambda^2(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathfrak{z}$ à valeurs dans \mathfrak{z} . Une telle application est un 2-cocycle si elle est nulle sur le sous-espace $B_2(\mathfrak{g}) := \text{im}(\partial)$ des 2-bords, qui est l'image de l'application linéaire

$$\partial : \Lambda^3(\mathfrak{g}) \rightarrow \Lambda^2(\mathfrak{g}), \quad x \wedge y \wedge z \mapsto [x, y] \wedge z + [y, z] \wedge x + [z, x] \wedge y.$$

Grâce à l'identité de Jacobi, $B_2(\mathfrak{g})$ est contenu dans le sous-espace $Z_2(\mathfrak{g})$ des 2-cycles, qui est le noyau de l'application $b_{\mathfrak{g}} : \Lambda^2(\mathfrak{g}) \rightarrow \mathfrak{g}, x \wedge y \mapsto [x, y]$. L'espace quotient

$$H_2(\mathfrak{g}) := Z_2(\mathfrak{g})/B_2(\mathfrak{g})$$

est l'espace de 2-homologie de \mathfrak{g} .

Un 2-cocycle f est un *cobord* s'il est de la forme $f(x, y) = d_{\mathfrak{g}}\ell(x, y) := -\ell([x, y])$ pour une application linéaire de la forme $\ell : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{z}$. Nous écrivons $B^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{z})$ pour l'ensemble des 2-cobords et $Z^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{z})$ pour celui des 2-cocycles. f est un cobord exactement s'il est nul sur $Z_2(\mathfrak{g})$. Ceci amène à la description suivante de l'espace de 2-cohomologie à valeurs dans \mathfrak{z} :

$$H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{z}) := Z^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{z})/B^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{z}) \cong \text{Hom}(H_2(\mathfrak{g}), \mathfrak{z}) \rightarrow \text{Hom}(Z_2(\mathfrak{g}), \mathfrak{z}).$$

Le calcul consiste donc en une description détaillée de l'espace des cycles et des bords pour l'algèbre de courants $A \otimes \mathfrak{k}$. En effet, une première étape est de montrer que la décomposition en somme directe

$$\Lambda^2(\mathfrak{g}) \cong (\Lambda^2(A) \otimes S^2(\mathfrak{k})) \oplus (A \otimes \Lambda^2(\mathfrak{k})) \oplus (I_A \otimes \Lambda^2(\mathfrak{k})),$$

où $I_A \subset S^2(A)$ est le noyau de l'application de multiplication, induit une décomposition du même type de l'espace des 2-cycles

$$Z_2(\mathfrak{g}) \cong (\Lambda^2(A) \otimes S^2(\mathfrak{k})) \oplus (A \otimes Z_2(\mathfrak{k})) \oplus (I_A \otimes \Lambda^2(\mathfrak{k})).$$

Puisque deux cocycles f et g définissent la même classe de cohomologie si et seulement s'ils coïncident sur le sous-espace $Z_2(\mathfrak{g})$ de $\Lambda^2(\mathfrak{g})$, une classe de cohomologie $[f] \in H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{z})$ peut être représentée par trois applications linéaires

$$f_1 : \Lambda^2(A) \otimes S^2(\mathfrak{k}) \rightarrow \mathfrak{z}, \quad f_2 : A \otimes Z_2(\mathfrak{k}) \rightarrow \mathfrak{z}, \quad \text{and} \quad f_3 : I_A \otimes \Lambda^2(\mathfrak{k}) \rightarrow \mathfrak{z},$$

telles que $f = f_1 \oplus f_2 \oplus f_3$ on $Z_2(\mathfrak{g})$. Réciproquement, trois telles applications f_1, f_2 et f_3 définissent un cocycle si et seulement si $f := f_1 \oplus f_2 \oplus f_3$ est nulle sur $B_2(\mathfrak{g})$. Le résultat principal de [25] est le théorème suivant :

Théorème 9 (Description des cocycles) *L'application $f = f_1 + f_2 + f_3$ comme plus haut est un 2-cocycle si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :*

- (a) $\text{im}(\tilde{f}_1) \subset \text{Sym}^2(\mathfrak{k}, \mathfrak{z})^{\mathfrak{k}}$.
- (b) $\tilde{f}_1(T_0(A))$ est nulle sur $\mathfrak{k} \times \mathfrak{k}'$.
- (c) $d_{\mathfrak{k}}(\tilde{f}_2(a)) = \Gamma(\tilde{f}_1(a, 1))$ pour tout $a \in A$.
- (d) $\tilde{f}_3(I_A)$ est nulle sur $\mathfrak{k} \times \mathfrak{k}'$.

Ici, les applications \tilde{f}_i pour $i = 1, 2, 3$ s'obtiennent des applications f_i en faisant pivoter les \mathfrak{k} arguments du codomaine vers le domaine. $\text{Sym}^2(\mathfrak{k}, \mathfrak{z})^{\mathfrak{k}}$ est l'espace des formes bilinéaires \mathfrak{k} -invariants symétriques de \mathfrak{k} vers \mathfrak{z} , $\mathfrak{k}' = [\mathfrak{k}, \mathfrak{k}]$ est l'algèbre dérivée, $d_{\mathfrak{k}}$ est l'opérateur cobord pour l'algèbre de Lie \mathfrak{k} , l'application Γ est

l'application qui associe à la forme bilinéaire invariante symétrique κ le 3-cocycle $\Gamma(\kappa)(x, y, z) := \kappa([x, y], z)$, et $T_0(A)$ est décrit comme suit : définissons deux application trilineaires

$$T : A^3 \rightarrow \Lambda^2(A), \quad (a, b, c) \mapsto \sum_{\text{cyc}} ab \wedge c := ab \wedge c + bc \wedge a + ca \wedge b$$

et

$$T_0 : A^3 \rightarrow \Lambda^2(A), \quad T_0(a, b, c) := T(a, b, c) - abc \wedge 1.$$

On pose alors $T_0(A) := \text{span}(\text{im}(T_0))$.

Les cocycles de la forme $f_1 + f_2$, où f_1 et f_2 ne sont pas des cocycles sont appelés *couplés*. Ceci est une notion nouvelle qui s'impose dans notre étude. Tous les cobords sont de la forme $f = f_2$, donc la classe de cohomologie d'un cocycle couplé ne contient que des cocycles couplés.

Nous montrons en plus que \mathfrak{g} possède des 2-cocycles couplés non triviaux si et seulement si l'image de la dérivation universelle $d_A : A \rightarrow \Omega^1(A)$ est non triviale et si \mathfrak{k} possède une forme bilinéaire symétrique invariante κ pour laquelle le 3-cocycle $\Gamma(\kappa)$ est un cobord non trivial. On peut appeler une telle forme bilinéaire symétrique invariante $\kappa \in \text{Sym}^2(\mathfrak{k})^{\mathfrak{k}}$ *exacte* si $\Gamma(\kappa)$ est un cobord, et donc énoncer cette propriété en disant que \mathfrak{k} possède une forme bilinéaire symétrique invariante exacte non triviale.

Nous avons tout un stock d'exemples d'algèbres de Lie \mathfrak{k} possédant des formes bilinéaires symétriques invariantes exactes non triviales, mais nous ne sommes pas pour autant arrivé à formuler une classification satisfaisante.

4 Groupes de courants holomorphes

Dans un troisième travail [26] avec Karl-Hermann Neeb, nous considérons la question si les groupes topologiques du type $\mathcal{C}^\infty(M, K)$ pour une variété non compacte M et un groupe de Lie K et $\mathcal{O}(X, K)$ pour une variété complexe de Stein X et un groupe de Lie complexe K sont des groupes de Lie Fréchet de dimension infinie. L'algèbre de Lie Fréchet $\mathcal{O}(X, \mathfrak{k})$ est supposée d'être à la fois l'algèbre de Lie de $\mathcal{O}(X, K)$ et l'espace modèle, où \mathfrak{k} est l'algèbre de Lie de K .

Voir l'appendice C pour des précisions sur les variétés et les groupes de Lie de dimension infinie.

Le lien entre groupes de Lie et algèbres de Lie en dimensions infinie n'est pas aussi fort qu'en dimension finie. Par exemple, si X possède des fonctions holomorphes non constantes (ce qui est le cas pour une variété de Stein) et si $\exp_K(\mathfrak{k}) \neq K$, on peut montrer que l'exponentielle

$$\exp : \mathcal{O}(X, \mathfrak{k}) \rightarrow \mathcal{O}(X, K)$$

donnée par $\exp(f) := f \circ \exp_K$ où \exp_K est l'exponentielle de K , n'est pas localement surjective. Ainsi on ne peut pas utiliser l'exponentielle pour définir la structure de variété.

Nous montrons dans [26] le théorème suivant :

Théorème 10 Soit Σ une surface de Riemann connexe ouverte avec $\pi_1(\Sigma)$ de type fini, et soit K un groupe de Lie Banach complexe connexe.

Alors $\mathcal{O}(X, K)$ possède une unique structure de groupe de Lie Fréchet telle que l'algèbre de Lie soit $\mathcal{O}(X, \mathfrak{k})$ et que l'application d'évaluation

$$\text{ev} : \mathcal{O}(X, K) \times \Sigma \rightarrow K$$

soit holomorphe.

Esquisse de preuve. Nous allons donner une esquisse de la preuve dans le cas $\Sigma = \mathbb{C}^\times$. La dérivée logarithmique δ , cf Appendice C, peut servir à établir une bijection

$$\mathcal{O}_*(\mathbb{C}, K) \rightarrow \Omega^1(\mathbb{C}, \mathfrak{k});$$

son inverse est l'application d'évolution qui associe à une 1-forme α à valeurs dans une algèbre de Lie la solution f de l'équation différentielle ordinaire

$$\begin{cases} f(0) = e \\ \delta f = \alpha f \end{cases} \quad (3)$$

δ est injectif, puisque nous nous restreignons à $\mathcal{O}_*(\mathbb{C}, K)$, l'espace des applications préservant les points de base $0 \in \mathbb{C}$ et le neutre $e \in K$. La surjectivité de δ dépend de deux choses : d'un côté, l'image de δ est contenue dans le sous-espace de Maurer-Cartan de $\Omega^1(\mathbb{C}, \mathfrak{k})$, d'un autre côté, le problème (3) n'admet une solution que si α n'a pas d'holonomie non triviale, i.e. si α est dans le noyau de l'application des périodes

$$P : \Omega^1(X, \mathfrak{k}) \rightarrow \text{Hom}(\pi_1(X), K).$$

Puisque \mathbb{C} est de dimension 1, l'équation de Maurer-Cartan est trivialement vérifiée par toutes les 1-formes à valeurs dans \mathfrak{k} , et puisque \mathbb{C} est 1-connexe, il n'y a pas d'obstruction de la part des périodes non plus. La bijection nous permet d'un côté de mettre une structure de variété de Fréchet (en fait, d'espace de Fréchet) sur $\mathcal{O}_*(\mathbb{C}, K)$ (et *a fortiori* sur $\mathcal{O}(\mathbb{C}, K)$), et d'un autre côté de transporter la structure de groupe sur $\Omega^1(\mathbb{C}, \mathfrak{k})$: on pose

$$\alpha * \beta := \delta(f \cdot g) = \delta(g) + \text{Ad}(g)^{-1} \delta(f)$$

pour $f, g \in \mathcal{O}_*(\mathbb{C}, K)$ tels que $\delta(f) = \alpha$ et $\delta(g) = \beta$. Observons qu'il suffit que β ait une préimage sous δ pour définir le produit.

Maintenant, considérons le même contexte pour $\mathcal{O}_*(\mathbb{C}^\times, K)$:

$$\mathcal{O}_*(\mathbb{C}^\times, K) \xrightarrow{\delta} \Omega^1(\mathbb{C}^\times, \mathfrak{k}) \xrightarrow{P} \text{Hom}(\pi_1(X), K).$$

On a $P^{-1}(1) = \mathcal{O}_*(\mathbb{C}^\times, K)$. L'idée est donc de montrer que P est une *submersion*, i.e. que TP possède de sections locales (continues), et d'utiliser ensuite un théorème de fonctions implicites paramétré de Glöckner [11].

Des sections locales pour P peuvent être obtenues comme suit : soit $\beta \in P^{-1}(1)$, et posons $\alpha_X(z) = \frac{1}{2\pi i} \frac{dz}{z} X$ pour $X \in \mathfrak{k}$. La section σ_β autour de β est alors définie par :

$$\sigma_\beta : \mathfrak{k} \rightarrow \Omega^1(\mathbb{C}^\times, \mathfrak{k}), \quad X \mapsto \alpha_X * \beta.$$

Ceci donne une section

$$U \xrightarrow{\log_U} \mathfrak{k} \xrightarrow{\sigma_\beta} \Omega^1(\mathbb{C}^\times, \mathfrak{k})$$

de $P : \Omega^1(\mathbb{C}^\times, \mathfrak{k}) \rightarrow U$, puisque

$$P(\alpha_X * \beta) = P(\alpha_X) \cdot P(\beta) = P(\alpha_X) = \exp_K(X).$$

Ceci montre la partie existence du théorème dans le cas $\Sigma = \mathbb{C}^\times$. \square

Il reste bien sûr la question de savoir comment prendre en charge l'équation de Maurer-Cartan afin de rendre des groupes de courants où le domaine a dimension strictement supérieure à 1 des groupes de Lie Fréchet.

5 Déformations d'algèbres de Lie de dimension infinie

5.1 Déformations d'algèbres de Lie de champs de vecteurs provenant de familles de schémas

Je me suis intéressé aux déformations d'algèbres de Lie de dimension infinie suite à un article de Alice Fialowski and Martin Schlichenmaier [7] sur des déformations non triviales de l'algèbre de Virasoro et de $\text{Vect}(S^1)$ qui proviennent d'algèbres de Krichever-Novikov sur des familles de schémas. Regardons l'exemple des courbes elliptiques dans $\mathbb{C}P^2$. Elles sont paramétrées par e_1, e_2 et e_3 et ont pour équation

$$Y^2Z = 4(X - e_1Z)(X - e_2Z)(X - e_3Z)$$

avec $e_1 + e_2 + e_3 = 0$ et $\Delta = 16(e_1 - e_2)^2(e_1 - e_3)^2(e_3 - e_2)^2 \neq 0$, la dernière condition implique la non singularité. Ces équations forment une *famille de courbes elliptiques* sur la base $B = \{(e_1, e_2, e_3) \mid e_1 + e_2 + e_3 = 0, e_i \neq e_j \ \forall i \neq j\}$. En complétant la base (i.e. l'espace des paramètres) en $\hat{B} = \{(e_1, e_2, e_3) \mid e_1 + e_2 + e_3 = 0\}$, on admet des cubiques singulières. Dégénérescence partielle (e.g. $e_1 = e_2 \neq e_3$) amène à la *cubique nodale*

$$Y^2Z = 4(X - eZ)^2(X + 2eZ),$$

pendant que dégénérescence totale (i.e. $e_1 = e_2 = e_3 = 0$) amène à la *cubique cuspidale*

$$Y^2Z = 4X^3.$$

Le cubique nodale est *stable* au sens de Deligne-Mumford, et est donc un point du bord de la compactification de Deligne-Mumford de l'espace des modules.

La cubique cuspidale ne l'est pas. Fialowski-Schlichenmaier introduisent des points marqués sur ces familles de courbes, et donnent des formules explicites pour les générateurs et relations des algèbres de Lie de champs de vecteurs sur les familles marquées. Ils montrent que ces familles donnent des déformations globales sur $\mathbb{C}[t]$ de l'algèbre de Witt $\text{Vect}_{\text{pol}}(S^1)$ (qu'on obtient pour $t = 0$) telle que toutes les algèbres de Lie fibres pour $t \neq 0$ sont isomorphes, mais non isomorphes à l'algèbre de Witt. On obtient ainsi une déformation non triviale d'une algèbre de Lie formellement et infinitésimalement rigide (i.e. $H^2(\text{Vect}_{\text{pol}}(S^1); \text{Vect}_{\text{pol}}(S^1)) = 0$). Ceci illustre les limites de la théorie des déformations basée sur la cohomologie adjointe pour des algèbres de Lie de dimension infinie.

Mon souhait [37] était de comprendre la méthode de construction de Fialowski-Schlichenmaier en termes plus abstraits, i.e. en tant que morphisme entre l'espace de modules de courbes $\mathcal{M}_{g,n}$ et un espace de modules de déformations $\mathcal{D}ef$. C'est bien étudié et établi que l'espace de modules de courbes $\mathcal{M}_{g,n}$ peut se voir comme un *champ algébrique*. Ainsi la première étape était de construire un champ $\mathcal{D}ef$ de déformations d'algèbres de Lie (qui est assez loin d'être un champ algébrique). Le champ $\mathcal{D}ef$ est défini sur la catégorie des schémas affines Aff/\mathbb{C} en tant que pseudo-foncteur $\mathcal{D}ef$ qui associe à un schéma affine $U = \text{Spec}(B)$ le groupoïde des B -algèbres de Lie : B est une algèbre associative commutative unitaire et les morphismes du groupoïde sont tous les isomorphismes de B -algèbres de Lie. On déduit du théorème de descente fidèlement plate de Grothendieck [13] que le pseudo-foncteur $\mathcal{D}ef$ satisfait aux conditions de descente qui le rendent un champ (dans une des topologies fpqc, fppf ou étale).

Ensuite, il existe un morphisme de champs $I : \mathcal{M}_{g,n} \rightarrow \mathcal{D}ef$ qui est construit de la même façon que Fialowski-Schlichenmaier construisent leurs exemples : étant donnée une famille de courbes projectives à points marqués sur $U = \text{Spec}(B)$, on extrait les points et on prend l'algèbre de Lie des dérivations sur l'algèbre qui définit le schéma affine associé – ceci donne bien une B -algèbre de Lie. Pour que I soit effectivement un morphisme de champs, nous nous restreignons à la topologie fppf ou étale. Observons que $\text{Der}(-, -)$ sur la catégorie des algèbres ou $\text{Vect}(-)$ sur la catégorie des variétés n'est pas un foncteur en général; on ne peut pas tirer-en-arrière ou pousser-en-avant un champ de vecteurs. Néanmoins, ils deviennent des foncteurs quand on n'admet que des isomorphismes dans la catégorie.

Puis, nous avons observé que I est presque un monomorphisme grâce à des résultats de Siebert [28]. En effet, la théorie que Siebert met au point implique qu'une variété algébrique affine, spectre d'une \mathbb{C} -algèbre normale intègre, est entièrement déterminée par son algèbre de Lie des déformations. Pour des schémas de base plus généraux, ce n'est pas le cas. D'un autre côté, pour des familles de courbes lisses, I est un monomorphisme.

Nous espérons utiliser le morphisme I pour tirer-en-arrière des faisceaux intéressants de $\mathcal{D}ef$ sur $\mathcal{M}_{g,n}$, comme par exemple des faisceaux correspondant à la cohomologie d'algèbres de Lie, et de montrer qu'ils "vivent" dans l'anneau des classes géométriques de $\mathcal{M}_{g,n}$ (ce qui semble raisonnable du point de vue

des calculs de cohomologie). Ceci est un travail en cours.

5.2 Déformations de \mathfrak{m}_0

Ensemble avec Alice Fialowski, nous avons fait un travail sur la théorie des déformations de l'algèbre de Lie \mathfrak{m}_0 , définie par générateurs e_i , $i \geq 1$, et relations $[e_1, e_i] = e_{i+1}$ pour tout $i \geq 2$.

Dans [8], nous avons d'abord calculé les espaces de cohomologie $H^1(\mathfrak{m}_0, \mathfrak{m}_0)$ et $H^2(\mathfrak{m}_0, \mathfrak{m}_0)$. Comme prévu, ils sont tous les deux de dimension infinie, ce qui pourrait inciter à s'abstenir d'étudier cette cohomologie de près. Afin d'avoir une bonne raison pour persévérer, introduisons de la structure supplémentaire sur ces espaces de dimension infinie. L'algèbre de Lie \mathfrak{m}_0 est \mathbb{N} -graduée, et donc les espaces de cohomologie le sont également. $H^1(\mathfrak{m}_0, \mathfrak{m}_0)$ porte un crochet qui le rend une algèbre de Lie graduée. Dans [8], nous avons calculé cette structure d'algèbre de Lie :

Théorème 11 *Le crochet sur $H^1(\mathfrak{m}_0, \mathfrak{m}_0)$ est entièrement déterminé par la description suivante : les deux générateurs commutant de poids zéro ω_1 et ω_2 agissent sur l'algèbre de Lie triviale engendrée par γ en poids 1 et α_l en poids $l \geq 2$ en tant que opérateurs de graduation, γ a degré -1 par rapport à ω_1 , degré 1 par rapport à ω_2 , et α_l a degré l par rapport à ω_1 , degré 0 par rapport à ω_2 .*

La situation pour $H^2(\mathfrak{m}_0, \mathfrak{m}_0)$ est pire, puisqu'il est de dimension infinie même en chaque composante gradué séparément. Mais les éléments de $H^2(\mathfrak{m}_0, \mathfrak{m}_0)$ déterminent les déformations infinitésimales de l'algèbre de Lie \mathfrak{m}_0 , et il est donc naturel de se poser la question lesquelles parmi celles-là s'intègrent en des "vraies" déformations polynomiales ou formelles. En partant du cocycle ω qui est un élément de $H^2(\mathfrak{m}_0, \mathfrak{m}_0)$, l'identité de Jacobi pour le crochet déformé n'est vraie que si une infinité de classes de cohomologie dans $H^3(\mathfrak{m}_0, \mathfrak{m}_0)$ (parmi elles le carré de Massey de $[\omega]$) sont nulles. Ces classes constituent donc une *obstruction* à l'identité de Jacobi pour le crochet déformé, et on appellera *non obstruée* une classe pour laquelle toutes ces classes d'obstruction sont nulles. Nous avons montré que cette condition choisit en poids négatif ou nul un nombre fini de classes, et on arrive à relier ces classes à la classification connue des algèbres de Lie \mathbb{N} -graduées $\mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^{\infty} \mathfrak{g}_i$ avec des composantes homogènes \mathfrak{g}_i de dimension 1 et deux générateurs sur un corps de caractéristique zéro. Le résultat principal de [8] est le suivant :

Théorème 12 *Les vraies déformations de \mathfrak{m}_0 sont de type fini en tout poids $l \leq 1$. Plus précisément, l'espace des classes non obstruées est en poids*

- $l \leq -3$ ou $l = 0$ de dimension 2,
- $l = -2$ ou $l = 0$ de dimension 3,

mais il n'existe pas de vraies déformations en $l = -1$. En poids $l = 0$, ce sont des déformations vers \mathfrak{m}_1 et L_1 . En poids $l = 1$, il existe exactement deux vraies déformations, tandis que en poids $l \geq 1$, il en existe au moins deux.

Nous n'avons pas de renseignement plus précis sur la question de savoir combien de vraies déformations il y a en poids supérieur. Dans notre travail, nous montrons que pour ces poids une déformation est vraie si et seulement si tous ses carrés de Massey sont nuls (en tant que cochaînes!), et cela implique que les vraies déformations sont données par un système infini dénombrable d'équations quadratiques homogènes en un nombre infini dénombrable de variables. Nous n'avons pas réussi à résoudre ce système en général.

Dans un travail prochain, nous allons étudier la même question pour l'algèbre de Lie \mathfrak{m}_2 , définie par générateurs $e_i, i \geq 1$, et relations $[e_1, e_i] = e_{i+1}$ pour tout $i \geq 2$, $[e_2, e_j] = e_{j+2}$ pour tout $j \geq 3$. Ceci devrait être plus facile suivant les calculs préliminaires qu'on a effectués.⁴

A Glossaire sur les cocycles d'algèbres de Lie de champs de vecteurs

Dans cet appendice, nous allons rappeler quelques calculs de cohomologie bien connus pour des algèbres de Lie de champs de vecteurs, et quelques cocycles célèbres. Voir comme références [10] ou [5].

Nous allons commencer par le calcul de $H^*(W_1; \mathbb{C})$. Notons $e_i = x^{i+1} \frac{d}{dx}$, $i = -1, 0, 1, 2, \dots$ les éléments de W_1 . Un élément général de W_1 est donc une combinaison linéaire des e_i . Les espaces $C^p(W_1; \mathbb{C})$ sont construits à partir du dual continu W'_1 de W_1 , avec $C^1(W_1; \mathbb{C}) = W'_1$, et W'_1 s'identifie naturellement à l'espace des polynômes en une variable, cf [30] thm. 22.1, p. 228.

Donc, notons les éléments du dual $\epsilon_i, i = -1, 0, 1, 2, \dots$, duaux aux e_i , et un élément général de W'_1 est une combinaison linéaire finie des ϵ_i . Maintenant, la réduction aux *cochaînes Euler-invariantes*, i.e. aux cochaînes invariantes par rapport à l'action du champ d'Euler e_0 , cf thm. 1.5.2 p. 45 [10], permet la réduction à un sous-complexe fini dans le calcul de la cohomologie. Ceci provient du fait que e_0 agit en tant qu'opérateur de degré à la fois sur W_1 et sur W'_1 .

Le sous-complexe est donné par $C^1(W_1; \mathbb{C})^{e_0} = \mathbb{C}\epsilon_0$, $C^2(W_1; \mathbb{C})^{e_0} = \mathbb{C}\epsilon_1 \wedge \epsilon_{-1}$, $C^3(W_1; \mathbb{C})^{e_0} = \mathbb{C}\epsilon_1 \wedge \epsilon_0 \wedge \epsilon_{-1}$, et $C^p(W_1; \mathbb{C})^{e_0} = 0$ pour $p > 3$. L'opérateur de cobord d a comme seul terme non nul sur le sous-complexe $de_0 = -\frac{1}{2}\epsilon_1 \wedge \epsilon_{-1}$. Ainsi, on obtient $\dim H^*(W_1; \mathbb{C}) = 1$ pour $*$ = 0, 3 et $\dim H^*(W_1; \mathbb{C}) = 0$ sinon.

Quand on écrit le cocycle $\epsilon_1 \wedge \epsilon_0 \wedge \epsilon_{-1}$ en tant que fonction sur les trois champs de vecteurs formels f, g, h (qu'on a identifiés ici à leurs fonctions de coefficients), on obtient (à un multiple près) le *cocycle de Godbillon-Vey*

$$\theta_0(f, g, h) = \begin{vmatrix} f & g & h \\ f' & g' & h' \\ f'' & g'' & h'' \end{vmatrix} (0).$$

⁴Ce travail est fait (été 2007). Une prépublication est disponible.

θ_0 est l'évaluation en $0 \in \mathbb{R}$ de la famille de cochaînes

$$\theta_t(f, g, h) = \begin{vmatrix} f & g & h \\ f' & g' & h' \\ f'' & g'' & h'' \end{vmatrix} (t) = \begin{vmatrix} f(t) & g(t) & h(t) \\ f'(t) & g'(t) & h'(t) \\ f''(t) & g''(t) & h''(t) \end{vmatrix}.$$

θ_t et θ_s pour $t \neq s$ sont reliés par l'action de difféomorphismes de \mathbb{R} qui envoient s sur t . L'action d'une algèbre de Lie \mathfrak{g} sur sa cohomologie est triviale, puisqu'elle est donnée par la dérivée de Lie $L_X = d \circ i_X + i_X \circ d$ pour un $X \in \mathfrak{g}$ et L_X envoie donc un cocycle sur un cobord. De là, on tire que l'action sur la cohomologie de tout élément du groupe de Lie est nulle, s'il est contenu dans un sous-groupe à un paramètre. On déduit que θ_t et θ_s sont des cocycles cohomologues, et que le point d'évaluation ne joue donc pas de rôle.

Quelques commentaires sur la cohomologie de $\text{Vect}(S^1)$: en utilisant le théorème 1 ci-dessus ensemble avec le calcul des autres complexes quotient, Gelfand-Fuks (cf [10]) ont montré que

$$H^*(\text{Vect}(S^1); \mathbb{C}) = \Lambda[\theta_0] \otimes S[\omega],$$

i.e. c'est le produit tensoriel d'une algèbre extérieure en θ_0 (ou de n'importe quel autre θ_t pour $t \in S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$) qui est de degré 3, avec une algèbre symétrique en un générateur ω de degré 2. ω est le *cocycle de Gelfand-Fuks*

$$\omega(f, g) = \int_{S^1} \begin{vmatrix} f' & g' \\ f'' & g'' \end{vmatrix} (t) dt.$$

Il est *l'intégrale sur la fibre* du cocycle de Godbillon-Vey θ_t dans le sens que je vais rappeler dans un instant.

Remarquons que la cohomologie $H^*(\text{Vect}(S^1); \mathbb{C})$ peut se décrire en disant qu'elle est isomorphe à la cohomologie singulière de l'espace topologique $\text{Map}(S^1, S^3)$ dans la topologie compacte-ouverte. En effet, la variété complexe X_1 est homotopiquement équivalente à S^3 , et le fibré correspondant sur S^1 est trivial.

Pour définir la procédure *d'intégration sur la fibre* d'un cocycle, que j'ai appris de Boris Shoikhet, soit M une variété \mathcal{C}^∞ de dimension n avec un système de coordonnées ϕ_x en $x \in M$ qui dépend de façon \mathcal{C}^∞ de x (donc M a un fibré tangent trivial). Tout système de coordonnées ϕ_x induit une application de développement de Taylor

$$\Phi_x : \text{Vect}(M) \rightarrow W_n,$$

et donc un morphisme de complexes

$$\Phi_x^* : C^*(W_n, \mathbb{C}) \rightarrow C^*(\text{Vect}(M), \mathbb{C}).$$

Étant donné un cocycle θ de degré q sur W_n , $x \mapsto \Phi_x^* \theta$ est une famille \mathcal{C}^∞ de cocycles cohomologues sur $\text{Vect}(M)$ (encore une fois à cause de la trivialité de l'action des difféomorphismes). En prenant la différentielle de de Rham de

cette fonction $\Phi_x^*\theta$ à valeurs dans les cocycles, $d_{\text{dR}}\Phi_x^*\theta$ est un cobord, disons $d_{\text{dR}}\Phi_x^*\theta = d^{\mathbb{C}}\omega$ pour une 1-forme ω à valeurs dans les $(q-1)$ -cochaînes ($d^{\mathbb{C}}$ est l'opérateur de cobord à valeurs dans le module trivial \mathbb{C}). Pour un 1-cycle σ sur M , l'intégrale $\int_{\sigma}\omega$ est par définition l'intégration sur la fibre de θ . C'est en effet un cocycle par le théorème de de Rham :

$$d^{\mathbb{C}}\int_{\sigma}\omega = \int_{\sigma}d^{\mathbb{C}}\omega = \int_{\sigma}d_{\text{dR}}\Phi_x^*\theta = \int_{\partial\sigma}\Phi_x^*\theta = 0.$$

Donc, l'équation (2) $d^{\mathbb{C}}\alpha = d_{\text{dR}}\theta_t$ pour le 2-cocycle

$$\alpha(f, g) = \begin{vmatrix} f' & g' \\ f'' & g'' \end{vmatrix}$$

à valeurs dans les 1-formes (ou 1-densités, cf section 1.3), veut dire que le cocycle de Gelfand-Fuks est l'intégrale sur la fibre du cocycle de Godbillon-Vey.

Observons que les cocycles θ_0 et ω dans $H^*(\text{Vect}(S^1); \mathbb{C})$ ne sont pas de la même nature : θ_0 est un cocycle *local*, i.e. le support (cf section 1.1) de $\theta(f, g, h)$ est contenu dans l'intersection des supports de f, g et h . Par un théorème bien connu de J. Peetre, les opérateurs locaux sont des opérateurs différentiels. Le produit de cocycles locaux dans $C^*(\text{Vect}(M); \mathbb{C})$ est local, et les cochaînes locales forment même un sous-complexe.

D'un autre côté, le support de ω est tout S^1 , car c'est une intégrale. C'est l'intégrale d'un cocycle local, et nous l'appelons donc un cocycle diagonal. En général, un cocycle $c \in C^q(\text{Vect}(M); \mathbb{C})$ s'appelle *diagonal* si $c(X_1, \dots, X_q) = 0$ quand $\bigcap_{i=1}^q \text{supp}(X_i) = \emptyset$, i.e. si la section généralisée c du fibré vectoriel $\otimes^q TM$ sur M^q est concentrée sur la diagonale $\Delta \subset M^q$ (cf section 1.1).

Dans [19], Lodder calcule la cohomologie de Leibniz continue (cf section 1.4) de l'algèbre de Lie W_1 . Il s'avère d'être

$$HL^*(W_1; \mathbb{C}) = \Lambda[\theta_0] \otimes T[\beta],$$

le produit tensoriel d'une algèbre extérieure sur θ_0 avec une algèbre tensorielle sur un générateur β de degré 4, pour lequel une formule explicite est donnée par :

$$\beta(l, f, g, h) = l'(0) \begin{vmatrix} f & g & h \\ f' & g' & h' \\ f'' & g'' & h'' \end{vmatrix} (0).$$

On voit que $\beta = \epsilon_0 \otimes \theta_0$, pour ϵ_0 dual au champ d'Euler e_0 . Le premier générateur nouveau γ_1 est ensuite donné par l'intégrale sur la fibre de β :

$$\gamma_1(l, f, g) = \int_{S^1} l'(t) \begin{vmatrix} f' & g' \\ f'' & g'' \end{vmatrix} (t) dt.$$

B Glossaire sur certains sujets d'algèbre homologique

Pour une algèbre de Lie \mathfrak{g} , l'homologie de \mathfrak{g} et la cohomologie de \mathfrak{g} sont définies en tant que foncteurs dérivés du foncteur des coinvariants et celui des

invariants sur la catégorie des $U\mathfrak{g}$ -modules. Pour des calculs explicites, Chevalley et Eilenberg ont inventé le complexe de Chevalley-Eilenberg en tant que résolution explicite du corps de base \mathbb{C} . Il est donné par une différentielle du type Koszul sur la collection des espaces vectoriels $U\mathfrak{g} \otimes \Lambda\mathfrak{g}$. En appliquant le foncteur $\text{Hom}_{U\mathfrak{g}}(-, \mathfrak{z})$ à cette résolution pour un $U\mathfrak{g}$ -module fixé \mathfrak{z} , on obtient un complexe dont la cohomologie est par définition la cohomologie d'algèbres de Lie de \mathfrak{g} à valeurs dans \mathfrak{z} . Comme les morphismes sont $U\mathfrak{g}$ -équivariants, on peut simplifier pour obtenir le *complexe de Chevalley-Eilenberg* ($\text{Hom}_{\mathbb{C}}(\Lambda\mathfrak{g}, \mathfrak{z}), d$). Pour le module trivial $\mathfrak{z} = \mathbb{C}$, la différentielle (ou opérateur de cobord) se réduit à celle de la formule en section 1. La seule différence est que pour la cohomologie de Gelfand-Fuks, on ne prend que des cochaînes qui sont des applications linéaires *continues* pour une algèbre de Lie topologique \mathfrak{g} .

Il y a des interprétations standard des espaces de cohomologie de bas degré. Ces interprétations ne changent pas dans le contexte topologique; la seule différence est qu'on prend des suites exactes *topologiquement scindées*, i.e. des suites qui sont scindées en tant que suites d'espaces vectoriels topologiques (i.e. images et noyaux de tous les morphismes sont des facteurs directs fermés, ou encore tous les morphismes ont des sections continues). $H^2(\mathfrak{g}; \mathfrak{z})$ classe les *extensions abéliennes* de \mathfrak{g} par \mathfrak{z} , i.e. les suites exactes courtes d'algèbres de Lie

$$0 \rightarrow \mathfrak{z} \xrightarrow{i} \mathfrak{e} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g} \rightarrow 0$$

telles que \mathfrak{z} est (identifiée à) une sous-algèbre abélienne de \mathfrak{e} . Le crochet sur \mathfrak{e} peut s'écrire

$$[(a, x), (b, y)] = (x \cdot b - y \cdot a + \alpha(x, y), [x, y])$$

en fixant une identification $\mathfrak{e} \cong \mathfrak{z} \oplus \mathfrak{g}$ comme espaces vectoriels topologiques et avec $a, b \in \mathfrak{z}$ et $x, y \in \mathfrak{g}$.

La seule donnée dans une extension abélienne qui n'est pas spécifiée par l'algèbre de Lie \mathfrak{g} et le \mathfrak{g} -module \mathfrak{z} , est le 2-cocycle (continu) α qui caractérise l'extension à l'addition d'un cobord près. En fait, $H^2(\mathfrak{g}; \mathfrak{z})$ est en bijection avec l'ensemble des classes d'équivalence d'extensions abéliennes; la bijection associe à une extension son cocycle α , et à un cocycle α le crochet sur $\mathfrak{z} \oplus \mathfrak{g}$ qui figure plus haut. Ici, une extension

$$0 \rightarrow \mathfrak{z} \rightarrow \mathfrak{e} \rightarrow \mathfrak{g} \rightarrow 0$$

s'appelle *équivalente* à une extension

$$0 \rightarrow \mathfrak{z} \rightarrow \mathfrak{e}' \rightarrow \mathfrak{g} \rightarrow 0$$

s'il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & V & \xrightarrow{i} & \mathfrak{e} & \xrightarrow{\pi} & \mathfrak{g} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow id_V & & \downarrow \psi & & \downarrow id_{\mathfrak{g}} & & \\ 0 & \longrightarrow & V & \xrightarrow{i'} & \mathfrak{e}' & \xrightarrow{\pi'} & \mathfrak{g} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

L'extension abélienne est appelée *centrale* si \mathfrak{z} est un \mathfrak{g} -module trivial. Par exemple, l'*algèbre de Virasoro* est l'extension centrale de $\text{Vect}(S^1)$ donnée par le cocycle ω de Gelfand-Fuks. Comme $H^2(\text{Vect}(S^1); \mathbb{C})$ est de dimension 1, l'algèbre de Virasoro a la propriété spéciale d'être l'*extension centrale universelle* de $\text{Vect}(S^1)$, i.e. toute extension centrale de $\text{Vect}(S^1)$ factorise par l'algèbre de Virasoro.

Le problème de trouver le centre de l'extension centrale universelle des algèbres de courant $A \otimes \mathfrak{k}$ pour une algèbre de Lie complexe semi-simple de dimension finie \mathfrak{k} et une algèbre de Fréchet associative commutative unitaire A a été résolu par Maier dans [20]. Il montre explicitement qu'un 2-cocycle continu donné ω' à valeurs dans l'espace de Fréchet \mathfrak{z} factorise en tant que $\omega' = \xi \circ \omega_A$ pour une application continue $\xi : \Omega^1(A) / \overline{dA} \rightarrow \mathfrak{z}$ et le cocycle universel ω_A donné par

$$\omega_A(a \otimes x, b \otimes y) = \kappa(x, y) a d_A b.$$

Ici, κ (qu'on a aussi noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ parfois) est la forme de Killing sur \mathfrak{g} , et $(\Omega^1(A), d_A)$ est le *Fréchet A -module des différentielles de Kähler*.

La propriété universelle de $(\Omega^1(A), d_A)$ est que pour tout Fréchet A -module M et toute dérivation continue $D : A \rightarrow M$, il existe une unique application continue de A -modules $\phi : \Omega^1(A) \rightarrow M$ telle que $D = \phi \circ d_A$. Il peut être construit comme le module des différentielles de Kähler, i.e. si I_A est le noyau de l'application de multiplication $\mu : A \otimes A \rightarrow A$ (où le produit tensoriel est muni de la π -topologie, voir section 1), alors $\Omega^1(A) = I_A / \overline{I_A^2}$. Il faut compléter afin de rendre le quotient un espace de Fréchet. L'application universelle $d_A : A \rightarrow \Omega^1(A)$ est définie par $d_A(a) := [a \otimes 1 - 1 \otimes a]$, la classe étant l'image dans le quotient.

Passons maintenant à la 3-cohomologie. De la même manière que la 2-cohomologie classe les extensions abéliennes, la 3-cohomologie classe les *modules croisés*. Un module croisé est un morphisme d'algèbres de Lie $\mu : \mathfrak{m} \rightarrow \mathfrak{n}$ sur une action η de \mathfrak{n} sur \mathfrak{m} par des dérivations tel que

- (a) $\mu(\eta(n) \cdot m) = [n, \mu(m)]$ pour tout $n \in \mathfrak{n}$ et tout $m \in \mathfrak{m}$,
- (b) $\eta(\mu(m)) \cdot m' = [m, m']$ pour tous $m, m' \in \mathfrak{m}$.

À chaque module croisé d'algèbres de Lie $\mu : \mathfrak{m} \rightarrow \mathfrak{n}$, on associe une suite exacte à quatre termes

$$0 \rightarrow V \xrightarrow{i} \mathfrak{m} \xrightarrow{\mu} \mathfrak{n} \xrightarrow{\pi} \mathfrak{g} \rightarrow 0$$

où $\ker(\mu) =: V$ et $\mathfrak{g} := \text{coker}(\mu)$.

Dans le cadre des algèbres de Lie et modules localement convexes (de dimension infinie), on suppose en plus que la suite exacte est scindée en tant que suite d'espaces vectoriels topologiques (i.e. toutes les images et tous les noyaux sont fermés et des facteurs directs topologiques).

- Par (a), \mathfrak{g} est une algèbre de Lie, car $\text{im}(\mu)$ est un idéal.
- Par (b), V est une sous-algèbre centrale de \mathfrak{m} , et en particulier abélienne.
- Par (a), l'action de \mathfrak{n} sur \mathfrak{m} induit une structure de \mathfrak{g} -module sur V .
- Notons qu'en général, ni \mathfrak{m} ni \mathfrak{n} sont des \mathfrak{g} -modules.

Deux modules croisés $\mu : \mathfrak{m} \rightarrow \mathfrak{n}$ (avec action η) et $\mu' : \mathfrak{m}' \rightarrow \mathfrak{n}'$ (avec action η') tels que $\ker(\mu) = \ker(\mu') =: V$ et $\text{coker}(\mu) = \text{coker}(\mu') =: \mathfrak{g}$

s'appellent *élémentairement équivalent* s'il existe des morphismes d'algèbres de Lie $\phi : \mathfrak{m} \rightarrow \mathfrak{m}'$ et $\psi : \mathfrak{n} \rightarrow \mathfrak{n}'$ tels qu'ils soient compatibles avec les actions, i.e.

$$\phi(\eta(n) \cdot m) = \eta'(\psi(n)) \cdot \phi(m) \quad \forall n \in \mathfrak{n} \quad \forall m \in \mathfrak{m},$$

et tels que le diagramme suivant soient commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & V & \xrightarrow{i} & \mathfrak{m} & \xrightarrow{\mu} & \mathfrak{n} & \xrightarrow{\pi} & \mathfrak{g} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow id_V & & \downarrow \phi & & \downarrow \psi & & \downarrow id_{\mathfrak{g}} & & \\ 0 & \longrightarrow & V & \xrightarrow{i'} & \mathfrak{m}' & \xrightarrow{\mu'} & \mathfrak{n}' & \xrightarrow{\pi'} & \mathfrak{g} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

L'équivalence de modules croisés est ensuite la relation d'équivalence engendrée par l'équivalence élémentaire.

Soit maintenant \mathfrak{g} une algèbre de Lie topologique. Un résultat de [36] est :

Théorème 13 *Notons $\text{crmod}_{\text{top}}(\mathfrak{g}, V)$ le groupe abélien des modules croisés (topologiquement scindés) et par $H^3(\mathfrak{g}, V)$ le groupe abélien de classes de cohomologie continue. Supposons qu'il existe une suite exacte courte topologiquement scindée de \mathfrak{g} -modules*

$$0 \rightarrow V \rightarrow W \rightarrow U \rightarrow 0$$

telle que $H^3(\mathfrak{g}, W) = 0$.

Alors il existe un isomorphisme de groupes abéliens

$$b : \text{crmod}_{\text{top}}(\mathfrak{g}, V) \cong H^3(\mathfrak{g}, V).$$

La structure de groupe abélienne sur l'ensemble des modules croisés est donnée par la *somme de Baer*. Dans le cadre non topologique, le théorème est usuellement attribué à Gerstenhaber. Dans ce cas, on n'a pas besoin de demander l'existence de la suite exacte de \mathfrak{g} -modules comme la catégorie des \mathfrak{g} -modules possède assez d'injectifs.

C Glossaire sur des variétés de dimension infinie

Nous recommandons l'article de survol [23] comme référence sur les variétés et groupes de Lie de dimension infinie.

Un *groupe de Lie* est simplement un groupe topologique qui est en même temps une variété telle que la multiplication et l'inversion soient lisses. Ainsi, pour définir des groupes de Lie de dimension infinie, il suffit de définir des variétés de dimension infinie. Nous allons faire ceci dans le cadre des espaces de Fréchet, malgré le fait qu'il suffirait de considérer des espaces vectoriels topologiques localement convexes. Un *espace de Fréchet* est un espace vectoriel topologique localement convexes métrisable complet.

Pour pouvoir faire de l'analyse dans un espace de Fréchet, il faut la notion de dérivée. Il est curieux que la notion de *différentielle de Fréchet* (qui est la notion

de la différentielle (totale)) n'est pas la bonne notion ici : il suppose qu'on ait une bonne notion de continuité sur les espaces d'opérateurs. C'est la notion de la norme d'opérateurs dans le cadre des espaces de Banach, mais il n'existe pas de notion satisfaisante au-delà des espaces de Banach. Nous allons donc garder la notion de *dérivée de Gâteaux*, qui est la notion de dérivée directionnelle.

Soit donc U un ouvert d'un espace de Fréchet E , et $f : U \rightarrow F$ une fonction continue à valeurs dans un Fréchet. Considérons

$$df(x)(h) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t}.$$

Si cette limite existe pour tout $h \in E$ et tout $x \in U$ et définit une fonction continue $df : U \times E \rightarrow F$, alors on appelle f une fonction \mathcal{C}^1 . En itérant, on trouve la notion d'une fonction \mathcal{C}^∞ . Le point clé pour définir la notion de variété est la règle de la dérivée d'une composée; elle est valide pour des fonctions \mathcal{C}^1 entre espaces localement convexes, et ceci nous suffit amplement. Une fonction $\mathcal{C}^\infty f : E \rightarrow F$ entre espaces de Fréchet complexes est appelée *holomorphe* si $df(x) : E \rightarrow F$ est complexe linéaire. Entre espaces de Fréchet, f est holomorphe si et seulement si elle est *analytique complexe*, i.e. peut s'approximer par des polynômes en tant que limite simple.

Quelques commentaires sur la *topologie compacte-ouverte* pour des espaces d'applications comme $\mathcal{O}(X, K)$.

Elle est engendrée par des ouverts

$$W(C, O) = \{f : X \rightarrow K \mid f(C) \subset O\}$$

pour un compact C de X et un ouvert O de K . Pour montrer que la topologie compacte-ouverte rend en effet $\mathcal{O}(X, K)$ un groupe topologique, nous utilisons prop. 1, Ch. III, §1.2 de [4] qui montre qu'étant donné un filtre \mathcal{F} sur un groupe G tel que

- $\bigcap \mathcal{F} = 1$
- $\forall U \in \mathcal{F} \exists V \in \mathcal{F} : VV \subset U$
- $\forall U \in \mathcal{F} \exists V \in \mathcal{F} : V^{-1} \subset U$
- $\forall U \in \mathcal{F} \exists g \in G, \exists V \in \mathcal{F} : gVg^{-1} \subset U$

il existe une unique topologie sur G qui le rend un groupe topologique tel que \mathcal{F} soit le filtre des voisinages de 1.

Un sous-ensemble $N \subset M$ d'une variété de Fréchet M modélé sur l'espace de Fréchet E , est appelée une *sous-variété scindée* s'il existe un facteur direct $F \subset E$ et une carte (ϕ, U) de M tels que $\phi(U \cap N) = \phi(U) \cap F$. Dans le théorème 10, nous montrons que $\mathcal{O}_*(\Sigma, K)$ est une sous-variété scindée de l'espace de Fréchet $\Omega^1(\Sigma, \mathfrak{k})$.

Pour cela, nous avons besoin de la *dérivée logarithmique* d'une fonction $f \in \mathcal{O}(X, K)$. Elle est définie en utilisant la *forme de Maurer-Cartan* $\kappa \in \Omega^1(X, \mathfrak{k})$ sur K qui est l'unique 1-forme invariante à gauche sur K telle que $\kappa(X) = X$ pour tout $X \in \mathfrak{k}$ (regardé comme champ invariant à gauche). La dérivée logarithmique de $f \in \mathcal{O}(X, K)$ est alors définie par $\delta(f) = f^*(\kappa) \in \Omega^1(X, \mathfrak{k})$. Elle satisfait à la règle de produit

$$\delta(f \cdot g) = \text{Ad}(g)^{-1}\delta(f) + \delta(g),$$

et à l'équation de Maurer-Cartan, que j'exprime ici pour une 1-forme arbitraire ω comme

$$d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] = 0.$$

Le crochet de 1-formes α, β à valeurs dans une algèbre de Lie est définie comme la 2-forme à valeurs dans l'algèbre de Lie donnée par

$$[\alpha, \beta](v, w) = [\alpha(v), \beta(w)] - [\alpha(w), \beta(v)]$$

où v, w sont des vecteurs tangents.

Références

- [1] H. Behnke, K. Stein, Entwicklung analytischer Funktionen auf Riemannschen Flächen. *Math. Ann.* **120** (1948) 430–461
- [2] R. Bott, G. Segal, The cohomology of the vector fields on a manifold. *Topology* **16** (1977) 285–298
- [3] S. Bouarroudj, H. Gargoubi, Projectively invariant cocycles of holomorphic vector fields on an open Riemann surface. *Tokyo J. Math.* **25**, 1 (2002) 33–40
- [4] N. Bourbaki, *Topologie générale*. Hermann Paris 1971
- [5] B. L. Feigin, D. B. Fuks, Cohomologies of Lie groups and Lie algebras. Lie groups and Lie algebras, II, 125–223, *Encyclopaedia Math. Sci.*, 21, Springer, Berlin, 2000
- [6] Y. Félix, J.-C. Thomas, Rational Betti numbers of configuration spaces. *Topology and its Appl.* **102** (2000) 139–149
- [7] A. Fialowski, M. Schlichenmaier, Global deformations of the Witt algebra of Krichever-Novikov type. *Commun. Contemp. Math.* Vol. **5**, No. 6 (2003) 921–945
- [8] A. Fialowski, F. Wagemann, Cohomology and deformations of the infinite dimensional filiform Lie algebra \mathfrak{m}_0 , math.RT/0703383, accepté au *J. of Algebra*
- [9] A. Frabetti, F. Wagemann, On the Leibniz cohomology of vector fields. *Ann. Global Anal. Geom.* **21**, No. 2 (2002) 177–190
- [10] D. Fuks, *Cohomology of infinite dimensional Lie algebras*. Nauka Moscow 1984
- [11] H. Glöckner, Implicit functions from topological vector spaces to Banach spaces, *Israel Journal Math.* **155** (2006) 205–
- [12] J. Grabowski, Isomorphisms and ideals of the Lie algebra of vector fields. *Invent. Math.* **50** (1978) 13–33
- [13] A. Grothendieck, M. Raynaud, *Revêtements étales et groupe fondamental*. (SGA 1) Exposés I à XIII séminaire de géométrie algébrique du Bois Marie 1960/61 (SGA 1) ; augmenté de deux exposés de M. Raynaud SMF Paris 2003

- [14] A. Haddi, Homologie des algèbres de Lie étendues à une algèbre commutative. *Comm. in Alg.* **20**,4 (1992) 1145–1166
- [15] A. Haefliger, Sur la cohomologie de l’algèbre de Lie des champs de vecteurs. *Ann. Sci. ENS 4ème série* **9** (1976) 503–532
- [16] J. Huebschmann, Poisson cohomology and quantization. *J. Reine Angew. Math.* **408** (1990) 57–113
- [17] N. Kawazumi, On the complex analytic Gelfand-Fuks cohomology of open Riemann surfaces. *Ann. Inst. Fourier Grenoble* **43**,3 (1993) 655–712
- [18] C. Laurent-Gengoux, F. Wagemann, Obstruction classes of crossed modules of Lie algebroids and Lie groupoids linked to existence of principal bundles, *math.AT/0611226*, soumis
- [19] J. Lodder, Leibniz cohomology for differentiable manifolds. *Ann. Inst. Fourier Grenoble* **48**, 1 (1998) 73–95
- [20] P. Maier, Central extensions of topological current algebras. In : *Geometry and Analysis on Finite- and Infinite-dimensional Groups*, A. Strasburger et al. (eds.) *Banach Center Publications* **55**, Wrszawa (2002) 61–76
- [21] D. Millionshchikov, Krichever-Novikov algebras and the cohomology of the algebra of meromorphic vector fields, *AMS Translations Ser. 2* **179** (1997) 101–108
- [22] K.-H. Neeb, Non-abelian extensions of topological Lie algebras. *Comm. Algebra* **34** (2006) no. 3, 991–1041
- [23] K.-H. Neeb, Towards a Lie theory of locally convex groups. *Jpn. J. Math.* **1**,2 (2006) 291–468
- [24] K.-H. Neeb, F. Wagemann, Universal central extension of holomorphic current algebras. *Manuscripta Math.* **112** (2003) 441–458
- [25] K.-H. Neeb, F. Wagemann, The second cohomology of current algebras of general Lie algebras. *accepté au Canadian J. of Math.*
- [26] K.-H. Neeb, F. Wagemann, Lie group structures on the group of smooth and holomorphic maps on non-compact manifolds. *math.DG/0703460*, soumis
- [27] G. Rinehart, Differential forms over general commutative algebras. *Trans. AMS* **108** (1963) 195–222
- [28] T. Siebert, Lie algebras of derivations and affine algebraic geometry over fields of characteristic 0. *Math. Ann.* **305** (1996) 271–286
- [29] S. Skryabin, Degree one cohomology for the Lie algebras of derivations. *Lobachevskii J. Math.* **14** (2004) 86–123
- [30] F. Trèves, *Topological vector spaces, distributions and kernels*. Academic Press 1967
- [31] F. Wagemann, Some Remarks on the Cohomology of Krichever-Novikov Algebras. *Lett. Math. Phys.* **47** (1999) 173–177
- [32] F. Wagemann, Differential Graded Cohomology and Lie Algebras of Holomorphic Vector Fields. *Comm. Math. Phys.* **208** (1999) 521–540

- [33] F. Wagemann, A Two Dimensional Analogue of the Virasoro Algebra. *J. Geom. Phys.* **36** (2000) 103–116
- [34] F. Wagemann, A Crossed Module representing the Godbillon-Vey Cocycle. *Lett. Math. Phys.* **51** (2000) 293–299
- [35] F. Wagemann, Explicit Formulae for Cocycles of Holomorphic Vector fields with values in λ -Densities. *J. Lie Theory*, Vol. **11**, 1 (2001) 173–184
- [36] F. Wagemann, On Lie algebra crossed modules. *Comm. Algebra* 34 (2006) no. 5, 1699-1722
- [37] F. Wagemann, Deformations of Lie algebras of vector fields arising from families of schemes. <http://arxiv.org/abs/0707.4054>, accepté au *J. of Geo. Phys.*
- [38] P. Zusmanovich, The second homology group of current Lie algebras. *SMF Astérisque* **226** (1994) 435–452